4.5 Kovariante Formulierung der Maxwellgleichungen

Die homogenen Maxwellgleichungen, (4.17) rechte (S. 66) Spalte, werden durch (4.18) und (4.20),

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad , \qquad E = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial x^0} \tag{4.92}$$

gelöst. Wir hatten außerdem im Zusammenhang mit den Wellengleichungen die Lorentzeichung, (4.26), S. 71, verwendet,

$$\frac{\partial \phi}{\partial x^0} + \vec{\nabla}\vec{A} = 0 \tag{4.93}$$

Dies legt die Verwendung von Viererpotentialen nahe, wie auch schon im Zusammenhang mit der Wellengl. (4.28), S. 71 erwähnt. Wir definieren

$$(A^\nu) = (A^0, A^1, A^2, A^3) = (\phi, \vec{A}) \tag{4.94}$$

und führen die Notation

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu} = \partial_\nu \, , \quad \frac{\partial}{\partial x_\nu} = \partial^\nu \tag{4.95}$$

ein. Das bedeutet $(\partial_\nu) = (\partial/\partial ct, \vec{\nabla})$, $\boxed{(\partial^\nu) = (\partial/\partial ct, -\vec{\nabla})}$.

Die Lorentzeichung (4.93) liest sich dann

$$\partial_\nu A^\nu = 0 \qquad (4.96)$$

und ist somit invariant unter Lorentztrafos. Weiterhin gilt

$$E^i = -(\partial^0 A^i - \partial^i A^0), \quad (E^i) = \vec{E} = (E_x, E_y, E_z)$$

und

$$B^1 = -(\partial^2 A^3 - \partial^3 A^2), \quad B^2 = -(\partial^3 A^1 - \partial^1 A^3) \qquad (4.97)$$
$$B^3 = -(\partial^1 A^2 - \partial^2 A^1)$$

$$\Rightarrow B^i = -\varepsilon^{ijk} \partial^j A^k, \qquad \varepsilon^{123} = 1$$

Wir sehen sofort, daß $\vec{E}$ und $\vec{B}$ in der Vierervektorschreibweise sehr ähnlich definiert sind. In der Tat gilt mit dem Feldstärketensor

$$\boxed{\begin{aligned} F_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \\ F^{\mu\nu} &= \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \end{aligned}} \qquad (4.98)$$

für $\vec{E}$ und $\vec{B}$ Felder; $\varepsilon^{123}=1$, $\varepsilon^{123}=-\varepsilon^{213}=\varepsilon^{231}\ldots$

$$E^i=-F^{0i}, \quad B^i=-\varepsilon^{ijk}F^{jk} \qquad (4.99)$$

oder als Tensor

$$(F^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \qquad (4.100)$$

#kontrav. Indice

kovari. Indi

Der Tensor $F^{\mu\nu}$ ist ein kontravarianter $(2,0)$ Tensor zweiter Stufe. Es gilt

$$(F_{\mu\nu}) = \left(\eta_{\mu\rho}\eta_{\nu\sigma}F^{\rho\sigma}\right) = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \qquad (4.101)$$

Mit Gl. (4.100)&(4.101) können wir die Maxwellg (4.17), S.66 in eine elegante Form bringen, die die Kovarianz der Gleichungen widerspiegelt:

$$\boxed{\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\nu \qquad \text{mit} \quad (j^\nu) = (\underset{\underset{j^0}{\parallel}}{c\rho}, \vec{j}) = (j^0, \vec{j})} \qquad (4.102)$$

Wir verwenden

$$\partial_\mu \partial^\mu = \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 \qquad (4.103)$$

und daher ist Gl. (4.102) äquivalent zu

$$\begin{aligned} \partial_\mu F^{\mu\nu} &= \partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial_\mu \partial^\nu A^\mu \\ &= \left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right) A^\nu - \partial^\nu \partial_\mu A^\mu = j^\nu \end{aligned} \qquad (4.104)$$

Dies ist identisch mit Gl. (4.25); $(\partial^\mu) = \left(\frac{\partial}{\partial ct}, -\vec{\nabla}\right)$.

Wir hatten schon bemerkt, daß die homogenen Maxwell Gl. Integrabilitätsbedingungen sind. Insbesondere gilt

$$\begin{aligned} 0 = \vec{\nabla}\vec{B} &= +\frac{\partial}{\partial x_i}\varepsilon^{ijk}\frac{\partial}{\partial x_j} A^k = \varepsilon^{ijk}\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j} A^k \\ &= \frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}\underbrace{\left[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right]}_{\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_i}\right)} A^k = 0 \end{aligned} \qquad (4.105)$$

und

$$\begin{aligned} \left(\vec{\nabla} \times \vec{E}\right)^i &= \overbrace{\varepsilon^{ijk}\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_k}\phi}^{0} - \varepsilon^{ijk}\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_0} A^k \\ &= \frac{\partial}{\partial x_0}\underbrace{\left(-\varepsilon^{ijk}\partial^j A^k\right)}_{B^i} \end{aligned} \qquad (4.106)$$

Wieder kann man das elegant & kovariant formulieren,

$$\boxed{\partial_\nu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0 \qquad (4.107)}$$

mit $\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma}$, dem dualen Feldstärketensor, $\varepsilon^{0123} = 1 = -\varepsilon^{1023} = \ldots$.

In $\tilde{F}^{\mu\nu}$ sind E und B-Felder vertauscht:

$$\boxed{\tilde{F}^{\mu\nu}(\vec{E},\vec{B}) = F^{\mu\nu}(\vec{E}\to\vec{B}, \vec{B}\to -\vec{E}) \qquad (4.108)}$$

Dies nennt man die elektromagn. Dualität.

In der Diskussion der Invarianzen und der Transformationseigenschaften der Maxwellgl. zeigt sich die Stärke der kovarianten Formulierung mit

$$\boxed{\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\nu \ , \ \partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0 \qquad (4.109)}$$

Invarianzen:

(1) Eichinvarianz unter $A_\mu \to A_\mu - \partial_\mu \omega$,

siehe Gl. (4.29), S. 72: $\quad$ (4.110)

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \to \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$
$$- (\partial_\mu \partial_\nu \omega - \partial_\nu \partial_\mu \omega)$$
$$= F_{\mu\nu} \qquad (4.111)$$

Es folgt, daß der Feldstärketensor und damit $\vec{E}, \vec{B}$ invariant sind.

(2) Lorentztransformationen

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} \to \Lambda_\mu{}^\rho \partial_\rho \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta F^{\alpha\beta}$$
$$= \Lambda^\nu{}_\beta \partial_\rho F^{\rho\beta}$$
$$= \Lambda^\nu{}_\beta \frac{4\pi}{c} j^\beta \qquad (4.112)$$

Es folgt, daß die Maxwellgl. kovariant unter Lorentztrafos. sind, d.h. $\partial'_\mu F'^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j'^\nu$; $\partial'_\mu \tilde{F}'^{\mu\nu} = 0$.

(3) Lorentztrafos. von $\vec{E}$ & $\vec{B}$-Feldern:

Wir hatten implizit schon bei der Diskussion des Faradayschen Induktionsgesetzes bemerkt, daß ein bewegtes $\vec{B}$-Feld ein $\vec{E}$-Feld induziert.

Hier greifen wir auf unseren Beispiel boost, S. 87, Gl. (4.72) zurück:

$$F^{\mu\nu\,\prime} = \Lambda^{\mu}{}_{\rho}\Lambda^{\nu}{}_{\sigma}F^{\rho\sigma} = \left(\Lambda F \Lambda^{T}\right)^{\mu\nu} \qquad (4.113)$$

mit

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

was zu geboosteten $\vec{E}'$ & $\vec{B}'$-Feldern führt:

$$\begin{aligned} E_x' &= E_x & \qquad B_x' &= B_x \\ E_y' &= \gamma(E_y - \beta B_z) & \qquad B_y' &= \gamma(B_y + \beta E_z) \\ E_z' &= \gamma(E_z + \beta B_x) & \qquad B_z' &= \gamma(B_z - \beta E_y) \end{aligned} \qquad (4.114)$$

d.h., die E & B-Komponenten in Boostrichtung sind unverändert

Durch einen Boost in x-Richtung verändern sich x^0 und x^1,

$$\begin{pmatrix} x^{0'} \\ x^{1'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta \\ -\gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \end{pmatrix} \qquad (4.115)$$

und $\quad (x^{2'}, x^{3'}) = (x^2, x^3)$

sowie

$$\begin{pmatrix} A^{0'} \\ A^{1'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta \\ -\gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^0 \\ A^1 \end{pmatrix} \qquad (4.116)$$

und

$$(A^{2'}, A^{3'}) = (A^2, A^3)$$

1) Damit sind sofort F^{23}, F^{32} invariant unter diesem Boost, siehe Def. von $F^{\mu\nu}$ in Gl. (4.98), und damit B_x.

2) $E_{y,z}$, $B_{y,z}$ transformieren wie Vektoren, da x^0, x^1 wie Vektoren transformieren, und $x^{2,3}$ invariant sind.

3) E_x ist invariant, da $\begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta \\ -\gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta \\ -\gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.