

4.6 Erhaltungssätze & Anwendungen

Wir haben die Maxwellgl. im letzten Kapitel im Rahmen einer kovarianten Feldtheorie definiert; im Feld A_ν : ($J=0$)

$$\text{mit} \quad \partial_\nu F^{\nu\mu}(A) = 0 \quad (4.117)$$

$$F^{\nu\mu} = \partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu$$

In der Punktmechanik folgen die Euler-Lagrangegl. aus der Lagr. fkt. $L(q(t), \dot{q}(t); t)$

$$\text{mit} \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \quad (4.118)$$

In Analogie werden wir ein Lagrange dichte

$$\text{mit} \quad \partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}(A, \partial_\nu A; t)}{\partial \partial_\nu A_\nu} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} = 0 \quad (4.119)$$

und der Wirkung $S[A] = \int d^4x \mathcal{L}$

Offensichtlich hängt \mathcal{L} von $F_{\mu\nu}$ ab und muß ein Skalar unter Lorentz-Transform. sein.

Es folgt

$$S[A] = \frac{1}{16\pi} \int F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} d^4x \quad (4.120)$$

und

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = -\frac{1}{8\pi} (\vec{E}^2 - \vec{B}^2)$$

Die Lagrange dichte hängt nur von $\partial_\mu A_\nu$ ab und wir folgern die EL-Gleichung

$$\partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\nu A_\mu} = 0 \quad (4.121)$$

Die Maxwell'schen Gleichungen folgen dann mit

$$\frac{\partial F_{\rho\sigma}}{\partial \partial_\nu A_\mu} = \eta^\nu_\rho \eta^\sigma_\mu - \eta^\nu_\sigma \eta^\rho_\mu \quad (4.122)$$

Eine interessante Folgerung ist mit der Energiedichte verbunden. Die Hamilton dichte ist

$$\mathcal{H} = \dot{A}_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_\mu} - \mathcal{L}, \quad (4.123)$$

$$H = \dot{q} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} - \mathcal{L}$$

und gibt die Energiedichte $u = \mathcal{H}$, siehe Kapitel 2.4 & 3.4. Wir haben

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_\mu} = -\frac{1}{4\pi} F^{0\mu}, \quad \overset{\circ}{A}_\mu F^{0\mu} = F_{0\mu} F^{0\mu}$$

und damit

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{8\pi} \left(2F_{0\mu} F^{0\mu} - F_{0\mu} F^{0\mu} - \frac{1}{2} F_{ij} F^{ij} \right) \quad (4.124)$$

$$= -\frac{1}{16\pi} (F_{0\mu} F^{0\mu} - F_{ij} F^{ij})$$

bis auf
totale Ableitung \rightarrow

$$\approx \frac{1}{16\pi} (F_{0\mu}^2 + F_{ij}^2)$$

Wir verwenden weiterhin, daß $F_{0i} = -E_i$ und

$B_i = \varepsilon_{ijk} F_{jk}$, und damit

$$u = \mathcal{H} = \frac{1}{8\pi} (\vec{E}^2 + \vec{B}^2) \quad (4.126)$$

wie schon im Kapitel 3.4 in Analogie verwendet.

Wieder sieht man die elektromagn. Dualität im Vakuum

In der Anwesenheit von Quellen gilt

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\mu$$

mit der Ladungsdichte (4.127)

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{c} j_\mu A^\mu$$

Wir sind jetzt in der Lage, ein System einer allgemeinen Strom- und Ladungsverteilung und der damit verbundenen elektromagnet. Felder zu beschreiben.

Die von einem \vec{E} -Feld geleistete Arbeit auf eine Stromverteilung \vec{j} in einem Volumen V

$$U_{\text{Med}} = \int_V d^3x \vec{j} \cdot \vec{E} \quad (4.128)$$

gegeben. In einem geschlossenen System muß U_{Med} durch eine entsprechende Änderung der elektromagnet. Energie in Gl. (4.127) ausgeglichen

werden. Wir verwenden, (Gl. (4.17), S. 66)

$$\vec{j} = \frac{c}{4\pi} \vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (4.129)$$

in Gl. (4.128) :

$$\begin{aligned} \int_V d^3\vec{r} \vec{j} \cdot \vec{E} &= \frac{1}{4\pi} \int_V d^3\vec{r} \left[c \vec{E} (\vec{\nabla} \times \vec{B}) - \vec{E} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right] \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_V d^3\vec{r} \left[c \underbrace{\vec{B} (\vec{\nabla} \times \vec{E})}_{-\frac{\partial \vec{B}}{c \partial t}} - c \vec{\nabla} (\vec{E} \times \vec{B}) - \vec{E} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right] \end{aligned} \quad (4.130)$$

$$= -\frac{1}{8\pi} \frac{\partial}{\partial t} \int_V d^3\vec{r} (\vec{E}^2 + \vec{B}^2) - \frac{c}{4\pi} \int_V d^3\vec{r} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \times \vec{B}$$

Gleichung (4.130) gilt für beliebige Volumina

und damit lokal

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{S} = -\vec{j} \cdot \vec{E}} \quad (4.131)$$

der Poyntingsche Satz, die Kontinuitätsgleichung.

Der Poyntingsche Vektor \vec{S} ist durch

$$\boxed{\vec{S} = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times \vec{B}} \quad (4.132)$$

gegeben. Gl. (4.131) sagt aus, daß die verrichtete

Arbeit, $\vec{j} \cdot \vec{E}$, (differentiell) durch die Änderung der Energiedichte, $\frac{\partial u}{\partial t}$, und dem Energiestrom durch die Fläche ∂V , $\vec{\nabla} \cdot \vec{S}$, gegeben ist.

Analog ergibt sich die Impulserhaltung des Systems. Die elektromagn. Kraft ist durch

$$\frac{d\vec{P}_{\text{mech}}}{dt} = \vec{F} = q(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}) \quad (4.133)$$

gegeben, und damit für eine kont. Ladungs- und Stromverteilung

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{P}_{\text{mech}}}{dt} &= \int_V d^3\vec{r} \left[\rho \cdot \vec{E} + \vec{j}/c \times \vec{B} \right] \\ &= \int_V d^3\vec{r} \left[\frac{1}{4\pi} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) \vec{E} + \frac{1}{4\pi} \left(\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \times \vec{B} \right] \end{aligned}$$

Wir verwenden, daß

(4.134)

$$-\frac{1}{4\pi c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \times \vec{B} = -\frac{1}{c^2} \partial_t \vec{S} + \frac{1}{4\pi c} \vec{E} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (4.135)$$

$\underbrace{\vec{E} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}_{-c \vec{\nabla} \times \vec{E}}$

und damit

$$\frac{d\vec{P}_{\text{med}}}{dt} + \frac{d\vec{P}_{\text{ED}}}{dt} = \frac{1}{4\pi} \int_V d^3\vec{r} \left[\vec{E}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \vec{E} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) + \vec{B}(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - \vec{B} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \right] \quad (4.136)$$

mit

$$\vec{P}_{\text{ED}} = \frac{1}{4\pi c} \int_V d^3\vec{r} \vec{E} \times \vec{B}$$

Mit der Definition des Maxwellschen

Spannungstensors

$$T_{ij} = \frac{1}{4\pi} \left[E_i E_j + B_i B_j - \frac{1}{2} (\vec{E}^2 + \vec{B}^2) \delta_{ij} \right] \quad (4.137)$$

folgt

$$\frac{d(\vec{P}_{\text{med}} + \vec{P}_{\text{ED}})_i}{dt} = \int_V d^3x \frac{\partial}{\partial x_j} T_{ij} = \int_V d^3x \vec{F}_j \cdot T_{ij} \quad (4.138)$$

Wir haben gesehen, daß der Poyntingvektor $\vec{S} = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times \vec{B}$, Gl. (4.132), S. (110) den Energiefluß (Leistung / Fläche) angibt.

Als Beispiel möchten wir das für eine elektromagnetische Welle berechnen. Wir hatten in Kapitel 4.3 gesehen, daß diese transversal sind, $\vec{E} \perp \vec{B}$ und $\vec{u} \cdot \vec{E} = \vec{u} \cdot \vec{B} = 0$, mit z.B.

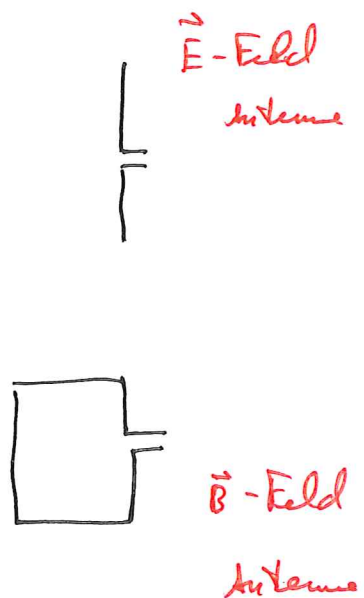
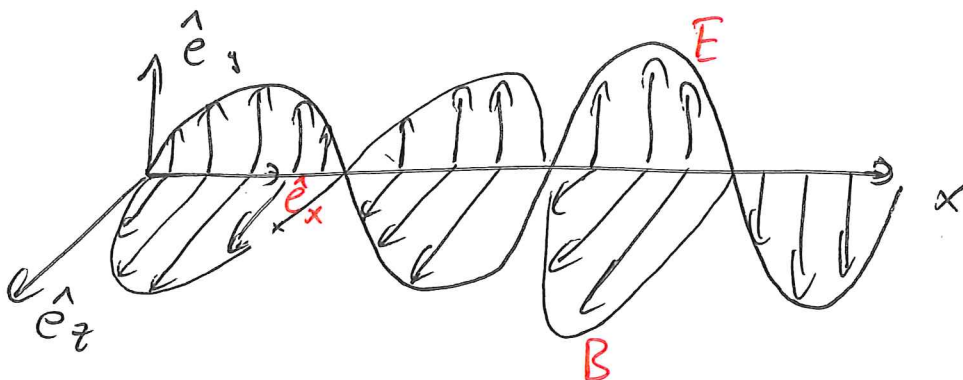
$$\vec{E} = E_0 \hat{e}_y \sin k_x x = E_0 \hat{e}_y \sin(\vec{u} \cdot \vec{x} - \omega t)$$

$$\vec{B} = E_0 \hat{e}_z \sin k_x x$$

(4.133)

mit

$$\vec{k} = k \hat{e}_x, \quad c^2 k^2 = \omega^2$$



Die Wellenlänge der EM-Wellen ist

$$\lambda = \frac{2\pi}{\underbrace{\omega}_{1/\nu}} \cdot c = \frac{2\pi}{k} \quad (4.134)$$

mit der Einordnung

$$\lambda \text{ in m} \quad 10^8 \quad 10^5 \quad 10^2 \quad 10^{-1} \quad 10^{-4} \quad 10^{-7} \quad 10^{-10} \quad 10^{-13} \quad 10^{-16}$$

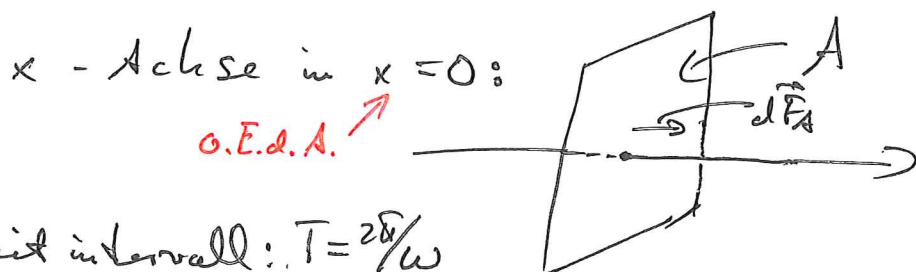
Langwellen Radio Infrarot UV Röntgen Gammastrahl

$$\nu \text{ in Hz} \quad 10^4 \quad 10^7 \quad 10^{10} \quad 10^{13} \quad 10^{16} \quad 10^{19} \quad 10^{22}$$

Der Poyntingvektor ist damit

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times \vec{B} = \frac{c}{4\pi} E_0^2 \hat{e}_x \cdot \sin^2(kx - \omega t) \quad (4.134)$$

Energiefluß durch eine Fläche A senkrecht zur



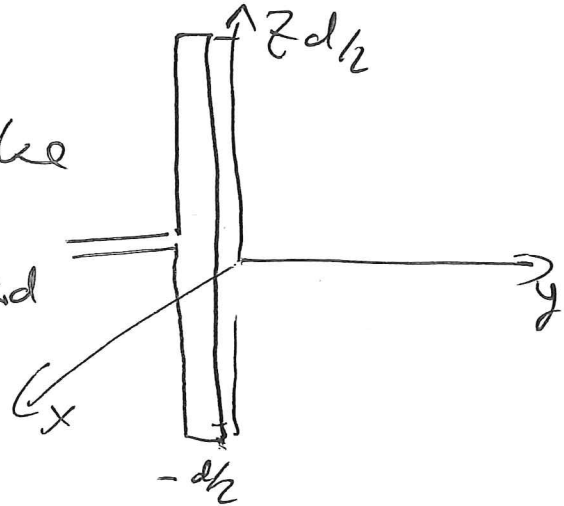
Zeitintervall: $T = 2\pi/\omega$

$$\int_0^T dt \int_A d\vec{F}_A \cdot \vec{S} = A \frac{c}{4\pi} E_0^2 \int_0^T \sin^2 \omega t dt$$

$$\int_0^T dt \int_A dA \cdot \hat{e}_x = \frac{c}{8\pi} E_0^2 A \quad (4.134)$$

Wir möchten nun die Strahlungsleistung einer
Linienantenne berechnen. Diese habe die
Länge d (und idealisiert die Dicke 0).

Die maximale Stromstärke
sei I und der Strom wird
ideal sinusförmig ange-



nommen. Es gilt als Parametrisierung des
4-er Potentials A_μ :

$$g(\vec{r}, t) = g(\vec{x}) e^{-i\omega t}$$

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = \vec{j}(\vec{x}) e^{-i\omega t}$$

(4.135)

Die 4-dim Greensche Funktion, S Da, Gl. (4.33)

ist

$$G_{\text{ret}} \left(\underset{\text{ct}}{x_0}, \vec{r}_0; \underset{\text{ct}'}{x_0'}, \vec{r}' \right) = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \delta \left(t' - \left[t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c} \right] \right)$$

(4.136)

die retardierte Greensche Funktion.

Der Vektorpot. ist dann durch

$$\begin{aligned} \vec{A}(\vec{r}, t) &= \frac{1}{c} \int d^3 r' dt' \frac{\vec{j}(\vec{r}', t')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \delta(t' - t + \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}) \\ &= e^{-i\omega t} \underbrace{\frac{1}{c} \int d^3 r' \frac{\vec{j}(\vec{r}') e^{ik|\vec{r} - \vec{r}'|}}{|\vec{r} - \vec{r}'|}}_{\vec{A}(\vec{r})} \quad (1.137) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} A_0(\vec{r}, t) &= \int d^3 r' dt' \rho(\vec{r}', t') G_{\text{ret}}(x; x') \\ &= e^{-i\omega t} \underbrace{\int d^3 r' \frac{\rho(\vec{r}') e^{ik|\vec{r} - \vec{r}'|}}{|\vec{r} - \vec{r}'|}}_{A_0(\vec{r}) = \phi(\vec{r})} \quad (1.138) \end{aligned}$$

Sei nun d die Ausdehnung der Strom- und Ladungsverteilung, in unserem Beispiel die Länge der Antenne, dann können wir 3 Zonen unterscheiden,

$$\boxed{\lambda = 2\pi / c\omega}$$

$$d \ll r \ll \lambda$$

Nahzone

$$d \ll r \approx \lambda$$

Zwischenzone (1.139)

$$d \ll \lambda \ll r$$

Fernzone

$$\boxed{kr \gg 1}$$

In der Nahzone könne stat. Approx. verwendet werden, die r -Abhängigkeit hängt von den spezifischen Gegebenheiten ab, z.B. der Geometrie der Quelle.

In der Fernzone (Wellenzone) stehen die Felder (wie schon diskutiert) senkrecht auf dem Radiusvektor und fallen wie $1/r$ ab.

Wir diskutieren die Fernzone:

$$\lim_{|k r| \rightarrow \infty} \vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \frac{e^{i k r}}{r} \int d^3 r' \vec{j}(\vec{r}') e^{-i k \hat{e}_r \cdot \vec{r}'}$$

$$\text{mit } |\vec{r} - \vec{r}'| \xrightarrow{r \gg r'} r - \hat{e}_r \cdot \vec{r}' + \mathcal{O}(r'^2/r) \quad (4.14c)$$

und

$$\lim_{|k r| \rightarrow \infty} \vec{A}_0(\vec{r}) = \frac{e^{i k r}}{r} \int d^3 r' \rho(\vec{r}') e^{-i k \hat{e}_r \cdot \vec{r}'}$$

Der führende Term in der Entwicklung von \vec{A} ist

$$\begin{aligned}\vec{A}(\vec{r}) &\approx \frac{e^{i\omega r}}{r} \int d^3\vec{r}' \vec{j}(\vec{r}') \\ &= -\frac{e^{i\omega r}}{r} \int d^3\vec{r}' \vec{r}' \left(\vec{\nabla}' \cdot \vec{j} \right) / c \\ &= -i\omega \frac{e^{i\omega r}}{r} \int d^3\vec{r}' \rho(\vec{r}') \vec{r}' \\ &\quad \uparrow \\ &\quad i\omega \rho = \vec{\nabla}' \cdot \vec{j} \leftarrow \text{kont. Gleichung}\end{aligned}$$

und damit

$$\vec{A}(\vec{r}) = -\frac{i\omega e^{i\omega r}}{r} \vec{p}$$

mit elektr. Dipolmoment

$$\vec{p} = \int d^3\vec{r}' \vec{r}' \rho(\vec{r}')$$

und den Feldern (führende Ordnung ω^2/r)

$$\vec{B} = c\omega^2 \hat{e}_r \times \vec{p} \frac{e^{i\omega r}}{r}$$

$$\vec{E} = \vec{B} \times \hat{e}_r$$

Der führende Anteil in Gl. (4.140) ist der Monopolanteil, $|\vec{r} - \vec{r}'| \rightarrow r$ mit

$$A_0(\vec{r}) \Big|_{\text{Monopol}} \approx \frac{q(t' = t - r/c)}{r} \quad (4.141)$$

und ist rein statisch, wir werden uns daher auf \vec{A} konzentrieren. \rightarrow 118a

Wir kommen nun zu unserer Linearantenne zurück,

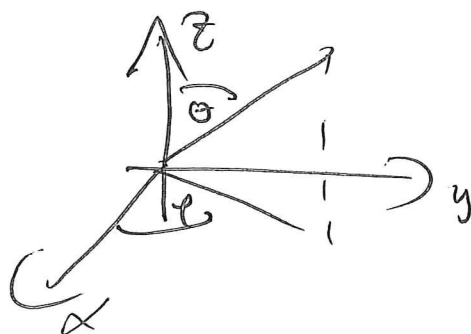
S. 115, mit der Stromverteilung

$$\vec{j}(\vec{x}) = I \sin\left(\frac{\omega d}{2} - \omega|z|\right) \delta(x) \delta(y) \hat{e}_z \cdot \Theta(d/2 - z) \Theta(d/2 + z) \quad (4.142)$$

und damit

$$\vec{A}(\vec{r}) = \hat{e}_z \int_{-d/2}^{d/2} dz \sin\left(\frac{\omega d}{2} - \omega|z|\right) e^{-ikr \cos\theta} dz$$

mit Kugelkoordin.



Nach Integrationen haben wir

$$\vec{A}(\vec{r}) = \hat{e}_z \frac{2I e^{i\omega r}}{\omega r} \frac{\cos\left(\frac{\omega d}{2} \cos\Theta\right) - \cos\frac{\omega d}{2}}{\sin^2\Theta}$$

und damit

(4.143)

$$\vec{B} = ik \hat{e}_r \times \vec{A}$$

$$\vec{E} = \vec{B} \times \hat{e}_r$$

(4.144)