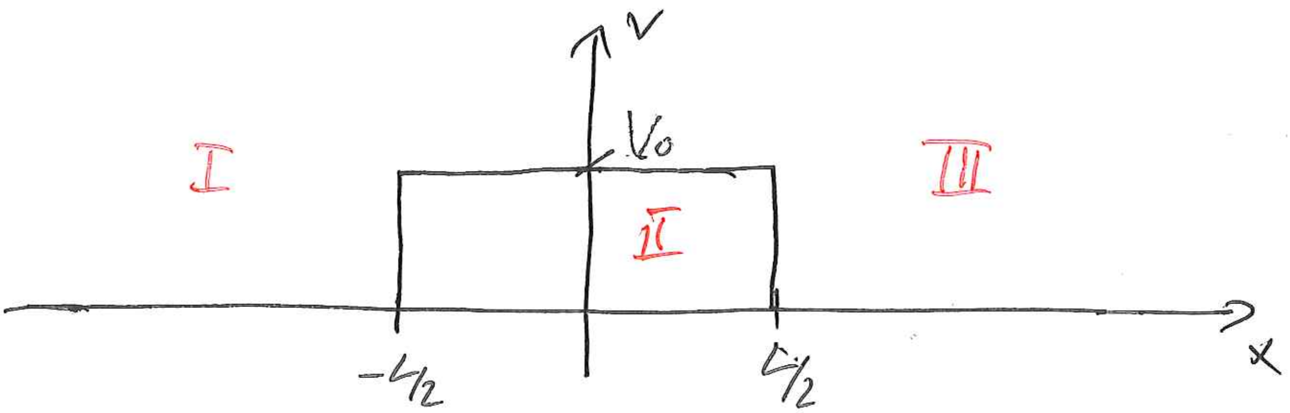
6.2 Tunneleffekt

Wir betrachten nun das Potential



$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x > L/2 \quad \text{I} \\ V_0 & \text{für} \quad |x| < L/2 \quad \text{II} \\ 0 & \text{für} \quad x < -L/2 \quad \text{III} \end{cases} \qquad (6.24)$$

Die stat. Schrödingergleichung

$$\left[-\hbar^2/2m \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)\right] \Psi(x) = E\,\Psi(x)$$

hat die Lösung

Reflexionskoeffizient

$$\Psi_I(x) = e^{ikx} + R e^{-ikx}$$

$$\Psi_{II}(x) = A e^{\kappa x} + B e^{-\kappa x}$$

$$\Psi_{III}(x) = T e^{ikx}$$

Transmissionskoeff.

$$(6.25)$$

mit $\quad k^2 = \frac{2m}{\hbar^2} E^2, \quad \kappa^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(V_0 - E)$

Die Anschlußbedingungen sind

$$\psi_{I}(-L/2) = \psi_{II}(-L/2)\ ,\quad \psi'_{I}(-L/2) = \psi'_{II}(-L/2)$$

und

$$\psi_{III}(L/2) = \psi_{II}(L/2)\ ,\quad \psi'_{III}(L/2) = \psi'_{II}(L/2) \qquad (6.26)$$

Der Wahrscheinlichkeitsstrom, Gl. (6.40), S. 133,

$\psi(x,t) = \psi(x)e^{-\frac{i}{\hbar}Et}$:
$$j(x,t) = \frac{\hbar}{2mi}\left[\psi^{*}(x)\frac{\partial\psi(x)}{\partial x} - \psi(x)\frac{\partial\psi^{*}(x)}{\partial x}\right] \qquad (6.27)$$

ist konstant und damit trivial erhalten. Es gilt

$$\begin{aligned} j_{I} &= \frac{\hbar}{m}\left(1-|R|^2\right) \\ j_{III} &= \hbar/m\,|T|^2 \end{aligned} \qquad (6.28)$$

Wegen (6.26) gilt

$$j_{I} = j_{II} = j_{III} \Rightarrow \boxed{1 = |T|^2 + |R|^2} \qquad (6.29)$$

Der Gesamtstrom (normiert auf 1) setzt sich aus reflektiertem Anteil und transmittiertem Anteil zusammen.

Die Bedingungen (6.26) lauten für ψ aus (6.25),

$$e^{-ikL/2} + R\,e^{ikL/2} = A\,e^{-k_0 L/2} + B\,e^{k_0 L/2}$$

$$ik\left(e^{-ikL/2} - R\,e^{ikL/2}\right) = k_0\left(A\,e^{-k_0 L/2} - B\,e^{k_0 L/2}\right)$$

und

$$T\,e^{ikL/2} = A\,e^{k_0 L/2} + B\,e^{-k_0 L/2} \qquad (6.30)$$

$$ikT\,e^{ikL/2} = k_0\left(A\,e^{k_0 L/2} - B\,e^{-k_0 L/2}\right)$$

Die Gleichungen lassen sich alg. nach T & R auflösen und ergeben

$$T = \frac{2k\,k_0\,e^{-ikL}}{2k\,k_0\cosh(k_0 L) + i\,(k_0^2 - k^2)\sinh(k_0 L)}$$

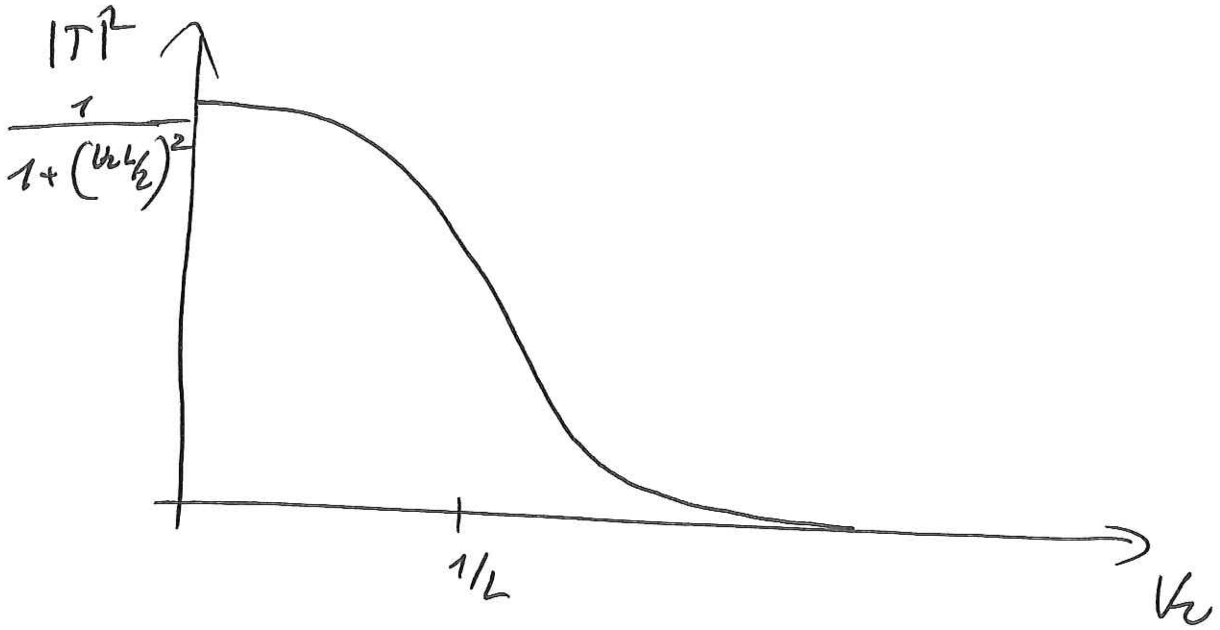
und

$$R = -\frac{i\,(k_0^2 + k^2)\sinh(k_0 L)\;e^{-ikL}}{2k\,k_0\cosh(k_0 L) + i\,(k_0^2 - k^2)\sinh(k_0 L)}$$

mit

$$|T|^2 + |R|^2 = 1$$

Die Tunnelwahrscheinlichkeit hängt von der Höhe der Barriere ab, und fällt exponentiell mit $k = \frac{2m}{\hbar^2}(V_0 - E)$ ab



Der Tunneleffekt ist für viele interessante und wichtige physikal. Phänomene relevant:

- α - Zerfall
- Kernfusion (Sonne)
- Rastertunnelmikroskop
- Josephson effekt
- Allgem. spont. Sym. brechung

⋮