Theoretische Physik III (Lehramt)
Prof. Dr. J. Pawlowski, Dr. E. Thommes

Übungsblatt 10

Summe der Punkte: 20

Abgabe am Donnerstag, dem 30.06.2011 zu Beginn der Vorlesung.

Aufgabe 10.1: *zeitunabhängige Schrödingergleichung, 1-dim. Probleme* **(4 Punkte)**

Gegeben sei ein 1-dim. Potenzial $V(x)$. Betrachten Sie die zugehörige 1-dim. zeitabhängige Schrödingergleichung (siehe Vorlesung)

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(x,t) \;=\; \hat{H}\Psi(x,t) \qquad \text{mit} \qquad \hat{H} \;=\; -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)$$

a) Machen Sie den Separationsansatz

$$\Psi(x,t) \;=\; f(t)\,\psi(x).$$

Bestimmen Sie $f(t)$ und zeigen Sie, dass $\psi(x)$ Eigenfunktion des Hamiltonoperators $\hat{H}$ ist, d.h. es gilt

$$\hat{H}\psi(x) \;=\; E\psi(x) \qquad (*)$$

mit einer Konstanten E.
Anmerkung: $(*)$ heißt zeitunabhängige Schrödingergleichung.

b) Das Potenzial $V(x)$ habe an der Stelle $x = a$ eine Unstetigkeit wie in Fig. 1 dargestellt. Sei nun $\psi_I(x)$ eine Lösung von $(*)$ im Bereich $x \leq a$ und $\psi_{II}(x)$ eine Lösung von $(*)$ im Bereich $x \geq a$. Begünden Sie, warum die Lösungen von $(*)$ an der Sprungstelle $x = a$ die Anschlußbedingungen

$$\psi_I(a) = \psi_{II}(a) \qquad \text{und} \qquad \psi'_I(a) = \psi'_{II}(a)$$

erfüllen.
Anleitung: Nehmen Sie an, $\psi(x)$ oder $\psi'(x)$ hätte bei $x = a$ ein Verhalten $\sim \Theta(x-a)$ und überlegen, welche Konsequenzen dies für $\psi''(x)$ hätte.

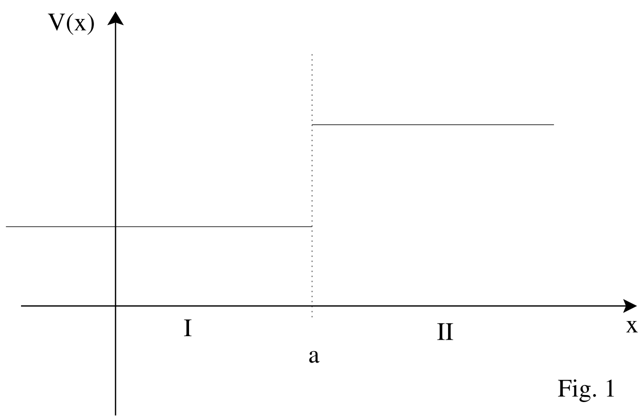

Fig. 1

Bitte wenden !

Aufgabe 10.2: *1-dim. Potenzialstufe* **(8 Punkte)**

Ein Strom von Teilchen der Masse m und Energie $E < V_0$ falle von links in positiver x-Richtung laufend auf die Potenzialstufe

$$V(x) = V_0\Theta(x) \qquad \text{mit der Konstanten} \qquad V_0 > 0 \quad .$$

a) Zeigen Sie:

$$\psi(x) = \begin{cases} e^{ikx} + re^{-ikx} & \text{für} \quad x < 0 \quad \text{(Bereich I)} \\ te^{-\kappa x} & \text{für} \quad x > 0 \quad \text{(Bereich II)} \end{cases}$$

ist eine Lösung der zugehörigen zeitunabhängigen Schrödingergleichung. Drücken Sie k und κ durch E und V_0 aus und bestimmen Sie r und t als Funktion von k und κ.

Anleitung : Benutzen Sie die in Aufgabe 10.1 b) angegebenen Stetigkeitsbedingungen für ψ. Betrachten Sie im Bereich II nur solche Lösungen, für die $\int_0^\infty dx|\psi(x)|^2 < \infty$ ist.

Anmerkung: Es wurde ohne Einschränkung der Allgemeinheit angenommen, dass die Amplitude der von links einfallenden Welle gleich 1 ist.

b) Berechnen Sie $|r|^2$ und interpretieren Sie das Ergebnis. Wie kann man $t \neq 0$ interpretieren ?

c) Betrachten Sie den Grenzfall einer unendlich hohen Potentialstufe $V_0 \to \infty$. Bestimmen Sie für diesen Grenzfall r und t und zeigen Sie, dass dann $\psi(0) = 0$ ist.

Anmerkung: Dies ist die allgemeine Randbedingung für eine unendlich hohe Potenzialschwelle.

Aufgabe 10.3: *1-dim. Problem: unendlich tiefer Potenzialtopf* **(8 Punkte)**

Betrachten Sie den eindimensionalen, unendlich tiefen Potenzialtopf

$$V(x) \ = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 < x < L \\ +\infty & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Bestimmen Sie die (auf eins normierten) Lösungen der zugehörigen zeitunabhängigen Schrödingergleichung, d.h. bestimmen Sie die (auf eins normierten) Eigenfunktionen $\psi(x)$ und die zugehörigen Energieeigenwerte E des zugehörigen Hamiltonoperators $\hat{H}$.

Tipp: Verwenden Sie die Randbedingung für eine unendlich hohe Potenzialschwelle (siehe Aufgabe 10.2 c).

b) Berechnen Sie für die Eigenfunktionen aus a) die Erwartungswerte von Ort und Impuls sowie deren mittlere quadratische Abweichung.

c) Bestimme Sie nun die (auf eins normierten) Eigenfunktionen von $\hat{H}$ für den Fall

$$V(x) \ = \begin{cases} 0 & \text{für } -L/2 < x < L/2 \\ +\infty & \text{sonst,} \end{cases}$$

so dass ihre Symmetrieeigenschaften bzgl. Spiegelung an $x = 0$ offensichtlich werden (am einfachsten aus den Lösungen von a)). Wie ändern sich die Energieeigenwerte ? Wie ändern sich die Erwartungswerte von Ort und Impuls sowie deren mittlere quadratische Abweichung ?