University of Heidelberg SS 2011

Theoretische Physik III (Lehramt)
Prof. Dr. J. Pawlowski, Dr. E. Thommes

Übungsblatt 12

Summe der Punkte: 23

Abgabe am Donnerstag, den 14.07.2011 zu Beginn der Vorlesung.

Aufgabe 12.1: *Unschärfe der Drehimpulskomponenten* **(5 Punkte)**
$\{|lm\rangle, \quad l = 0, \frac{1}{2}, 1, ...; \quad m = -l, -l+1, ..., +l\}$ sei eine Standardbasis von Drehimpulseigenzuständen.

a) Berechnen Sie die Unschärfen $\Delta\hat{L}_x$ und $\Delta\hat{L}_y$ sowie das Produkt $\Delta\hat{L}_x \cdot \Delta\hat{L}_y$ als Funktion der Quantenzahlen l und m. Für welches m (bei gegebenem l) nehmen $\Delta\hat{L}_x$ und $\Delta\hat{L}_y$ den kleinsten Wert an und wie groß ist dieser ?

b) Vergleichen Sie das Ergebnis aus a) mit dem Ergebnis, das Sie erhalten, wenn Sie die in der Vorlesung für das Produkt der Schwankungsquadrate zweier beliebiger Observablen hergeleitete Unschärferelation auf die Komponenten $\hat{L}_x$ und $\hat{L}_y$ anwenden.

Aufgabe 12.2: **(2 Punkte)**
Beweisen Sie die Identität (Jacobi-Identität):

$$\left[\hat{A}, \left[\hat{B}, \hat{C}\right]\right] + \left[\hat{B}, \left[\hat{C}, \hat{A}\right]\right] + \left[\hat{C}, \left[\hat{A}, \hat{B}\right]\right] = 0$$

Aufgabe 12.3:*Zeitabhängige Schrödinger-Gleichung* **(6 Punkte)**
Betrachten Sie ein Teilchen der Masse m in einem zum Nullpunkt symmetrischen unendlich tiefen Kastenpotenzial (siehe auch Aufgabe 10.3 c)

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } |x| \leq a \\ +\infty & \text{für } |x| > a \end{cases} \quad .$$

Betrachten Sie nun die Zeitabhängigkeit der Wellenfunktion $\psi(x,t)$ eines nichtstationären Zustands, der zur Zeit $t = 0$ aus der normierten Summe der Grundzustandseigenfunktion $\psi_0(x)$ und der Wellenfunktion $\psi_1(x)$ des ersten angeregten Zustands gebildet wird.

a) Veranschaulichen Sie sich den zeitlichen Verlauf von $|\psi(x,t)|^2$durch Skizzen für $t/T = 0,\ 1/8\ ,\ 1/4\ ,\ 3/8\ ,\ 1/2\ ,\ 5/8$ und $3/4$, wobei $T := h/(E_1 - E_0)$.
Für Computerbilder gibt es **3 Extrapunkte**.

b) Vergleichen Sie den zeitlichen Verlauf des Erwartungswertes $\langle\psi|\hat{Q}|\psi\rangle$ des Ortsoperators $\hat{Q}$ mit der klassischen Teilchenbahn (in einer Skizze).

Bitte wenden!

Aufgabe 12.4: *Potenzialbarriere, Tunneleffekt* **(10 Punkte)**

Ein Strom von Teilchen der Masse m und Energie E falle von links in positiver x-Richtung laufend auf die Potenzialbarriere

$$V(x) = V_0 \Theta(x) \Theta(L - x)$$

der Höhe $V_0 > 0$ und der Tiefe $L > 0$.

a) Wie in Aufgabe 10.2 kann man für die Lösung der zugehörigen zeitunabhängigen Schrödingergleichung zur Energie $E > V_0$ den Ansatz

$$\psi(x) = \begin{cases} e^{ikx} + Re^{-ikx} & \text{für} \quad x < 0 \quad \text{(Bereich I)} \\ Ae^{\kappa x} + Be^{-\kappa x} & \text{für} \quad 0 < x < L \quad \text{(Bereich II)} \\ Te^{ikx} & \text{für} \quad x > L \quad \text{(Bereich III)} \end{cases}$$

machen. Dabei kann man ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass die Amplitude der von links einfallenden Welle gleich 1 ist. Wie hängen k und κ von E und V_0 ab ?

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeitsstromdichten j_I und j_{III} in den Bereichen I und III als Funktion von R und T. Zeigen Sie, dass die Transmissionswahrscheinlichkeit $j_{\text{trans}}/j_{\text{ein}}$ gleich $|T|^2$ ist.
Anmerkung: Es ist $j_I = j_{\text{ein}} - j_{\text{refl}}$ mit j_{ein} = Wahrscheinlichkeitsstromdichte der einfallenden Teilchen, j_{refl} = Wahrscheinlichkeitsstromdichte der reflektierten Teilchen sowie $j_{III} = j_{\text{trans}}$ = Wahrscheinlichkeitsstromdichte der transmittierten Teilchen.

c) Berechnen Sie die Transmissionswahrscheinlichkeit $|T|^2$ als Funktion von $\hbar, E, V_0, L$ und m für den Fall $E > V_0$. Diskutieren Sie das Ergebnis:

$$|T|^2 = \frac{1}{1 + \frac{V_0^2}{4E(E-V_0)} \sin^2\left(\frac{L}{\hbar}\sqrt{2m(E - V_0)}\right)}$$

d) Bestimmen Sie $|T|^2$ für den Fall $E < V_0$ (möglichst ohne viel Rechnung) und diskutieren Sie das Ergebnis.

e) Berechnen Sie T für Elektronen mit $E = 1\text{eV}$ bei $V_0 = 2\text{eV}$ und $L = 10^{-10}\text{m}$ sowie für Protonen derselben kinetischen Energie an der gleichen Schwelle.