

Theoretische Physik III (Lehramt)
Prof. Dr. J. Pawlowski, Dr. E. Thommes

Übungsblatt 6

Summe der Punkte: 24

Abgabe am Donnerstag, dem 26.05.2011 zu Beginn der Vorlesung.

Aufgabe 6.1 *Eichfreiheit*

(6 Punkte)

- a) Gegeben sei das Vektorpotential $\vec{A}(\vec{r}) = \frac{B}{2}(-y, x, z)$. Erfüllt \vec{A} die Coulomb-Eichbedingung? Wenn nicht, geben Sie eine einfache Umeichung an, so dass $\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\chi$ die Bedingung erfüllt. Geben Sie das Magnetfeld an. (4 Punkte)
- b) Zeigen Sie, dass die Nebenbedingung (Lorentz-Bedingung)

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$$

durch eine geeignete Eichtransformation stets erfüllbar ist. Zeigen Sie weiterhin (nochmals), dass sich die Felder \vec{E} und \vec{B} durch eine solche Eichtransformation nicht ändern. (2 Punkte)

Aufgabe 6.2 *Eichfreiheit*

(12 Punkte)

Gegeben seien die Potentiale für eine ebene Welle im Vakuum,

$$\varphi(\vec{r}, t) = \varphi_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad , \quad \vec{A}(\vec{r}, t) = \vec{A}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

Hierbei seien $\varphi_0, \vec{A}_0, \vec{k}, \omega$ konstant und die Dispersionsrelation zwischen \vec{k} und ω sei erfüllt.

- a) Welche Bedingung ergibt sich an die oben auftretenden Konstanten wenn \vec{A} und φ die Lorentzeichung

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$$

erfüllen. Diese Bedingung kann im folgenden benutzt werden. (2 Punkte)

- b) Berechnen Sie das elektrische Feld $\vec{E}(\vec{r}, t)$. (2 Punkte)
- c) Berechnen Sie das magnetische Feld $\vec{B}(\vec{r}, t)$. (2 Punkte)
- d) Zeigen Sie, dass $\vec{E}(\vec{r}, t)$ und $\vec{B}(\vec{r}, t)$ die Wellengleichungen

$$\Delta \vec{E}(\vec{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad , \quad \Delta \vec{B}(\vec{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0$$

erfüllen. (2 Punkte)

- e) Zeigen Sie, dass $\vec{E} \perp \vec{k}, \vec{B} \perp \vec{k}, \vec{E} \perp \vec{B}$. (2 Punkte)
- f) Zeigen Sie, dass $|\vec{E}| = |\vec{B}|$. (2 Punkte)

- a) Geben Sie die Ladungsdichte ρ und Stromdichte \vec{j} für eine konstante Linienladungsdichte λ an, die sich entlang der z -Achse von $-\infty$ bis $+\infty$ erstreckt und sich in positiver Richtung auf der z -Achse mit der Geschwindigkeit v bewegt. Berechnen Sie die resultierenden Felder \vec{E} und \vec{B} , und finden Sie den Zusammenhang $\vec{B} = \vec{B}(\vec{v}, \vec{E})$. (3 Punkte)

Anmerkung: Für einen mit \vec{v} mitbewegten Beobachter wäre $\rho' = \rho$, $\vec{j}' = \vec{0}$ und daher $\vec{E}' = \vec{E}$ sowie $\vec{B}' = 0$. Die Lösung dieser Aufgabe entspricht somit dem nichtrelativistischen Grenzfall ($v \ll c$) der Transformationsgleichung für \vec{E} und \vec{B} . Der (hoffentlich) gefundene Zusammenhang $\vec{B} = \vec{B}(\vec{v}, \vec{E})$ ist dagegen auch relativistisch exakt.

- b) Man denke sich die bewegte Linienladungsdichte aus a) als einen dünnen vom Strom I durchflossenen Draht. Parallel dazu befindet sich nun im Abstand R ein weiterer Draht, der vom Strom I_2 durchflossen werde. Berechnen Sie (möglichst einfach) die elektrische und die magnetische Kraft pro Länge, die die Drähte aufeinander ausüben. (2 Punkte)
- c) Vergleichen Sie die Ergebnisse für die elektrische und magnetische Kraft aus b). (1 Punkte)

James Clerk Maxwell



Maxwell wurde am 13. Juni 1831 in Edinburgh geboren und starb am 5. November 1879 in Cambridge.

Sein Vater war ein Gutsbesitzer und Sonderling, an dem Maxwell mit großer Liebe hing.; er ließ dem Knaben nach dem Tod der Mutter, deren Familie den Namen Maxwell trug, die beste Schulbildung zuteil werden. Maxwell studierte drei Jahre Mathematik und Physik in Edinburgh und schloß 1854 in Cambridge sein Studium ab. Ein Jahr später legte er hier seine erste Arbeit vor, die schon auf die späteren **Maxwellschen Gleichungen** zielte.

1856 erhielt Maxwell eine Professur in Aberdeen; von 1860 an wirkte er für fünf Jahre am King's College in London. Ähnlich wie Hermann von Helmholtz beschäftigte Maxwell sich mit der **Physiologie des Farbensehens** und baute die Dreifarben-theorie von Thomas Young weiter aus. Epochenmachend waren Maxwells Arbeiten zur **Elektrodynamik**, wo er die intuitiven Vorstellungen Michael Faradays in eine mathematisch strenge Form brachte und die **Feldphysik** begründete.

Vollendet wurden die **Maxwellschen Gleichungen** 1862 im Philosophical Magazine unter dem Titel **'On Physical Lines of Force'** veröffentlicht. In der Einführung des Verschiebungsstromes ging Maxwell über **Faraday** hinaus; nach Maxwell muß ein sich änderndes elektrisches Feld in einem Kondensator wie ein elektrischer Strom magnetische Wirkungen zeigen. Gerade diese Annahme führte zur Möglichkeit transversaler elektromagnetischer Wellen. Über die mathematisch errechnete Fortpflanzungsgeschwindigkeit schrieb Maxwell 1864:

"This velocity is so nearly that of light, that it seems we have strong reason to conclude that light itself

Quelle: <http://www.chemie.uni-bremen.de/stohrer/biograph/maxwell.htm>

(including radiant heat, and other radiation if any) is an electromagnetic disturbance in the form of wave propagated through the electromagnetic field according to electromagnetic laws."

1873 legte Maxwell in dem zweibändigen **'Treatise'** eine Zusammenfassung aller bisherigen Arbeiten vor; die **Maxwellschen Gleichungen** erschienen dabei in einer komplizierteren Form; erst Heinrich Hertz und **Oliver Heaviside** griffen auf die ursprüngliche Fassung zurück. Es dauerte Jahrzehnte bis die **Maxwellschen Gleichungen** voll verstanden und anerkannt wurden. Dann aber bildete **'Maxwellsche Elektrodynamik'** zusammen mit der **'Newtonschen Mechanik'** das stolze Gebäude der klassischen Physik. Ludwig Boltzmann, der selbst viel zur Einführung der **Maxwellschen Gleichungen** beitrug, stellte in hoher Anerkennung der Leistung Maxwells seiner **'Vorlesungen über Maxwells Theorie'** als Motto das **Goethe-Wort** voran:

"War es ein Gott, der diese Zeichen schrieb?"

Auch auf dem **Gebiete der kinetischen Gastheorie** leistete Maxwell Bahnbrechendes. Er griff die Ansätze von **August Karl König** und Rudolf Clausius auf; während diese nur die mittlere Geschwindigkeit der Moleküle betrachtet hatten, stellte Maxwell die Frage nach der individuellen Geschwindigkeit des einzelnen Teilchens. Er fand die heute sogenannte **Maxwellsche Geschwindigkeitsverteilung** und begründete damit zugleich die **statistische Physik**. Auf Ludwig Boltzmann wirkten diese Abhandlungen wie eine Offenbarung, und in der Folge haben beide Forscher durch Parallelarbeit, einander anregend und kritisierend das neue Gebiet aufgebaut. Als Wegbereiter der **kinetischen Gastheorie** war Maxwell auch ein überzeugter Anhänger der Atomistik. In einer programmatischen Rede vor der British Association for the Advancement of Science äußerte er 1871 seine Überzeugung, daß die Atome absolut unveränderliche Gegebenheiten darstellen, und leitete daraus die Forderung nach atomaren Standards für die Grundeinheit der Masse, der Länge und der Zeit ab.

1865 legte Maxwell aus gesundheitlichen Gründen sein Lehramt am King's College nieder. Sein Gutsbesitz in Schottland sicherte ihm finanzielle Unabhängigkeit. Frei von den akademischen Verpflichtungen setzte er seine Forschungen als Privatgelehrter fort und verfaßte die umfangreichen Manuskripte seiner Anfang der siebziger Jahre erschienenen Werke. Eine Berufung nach St. Andrews, an die älteste schottische Universität, lehnte er ab. Als aber die Universität Cambridge einen Lehrstuhl für Experimentalphysik neu gründete und, erstmalig für England, mit einem großen Unterrichtslaboratorium ausstattete, nahm Maxwell diese auch für die britische Wissenschaft insgesamt wichtige Aufgabe an. In Großbritannien hatte es bis da nur ein physikalisches Unterrichtslaboratorium gegeben, das von William Thomson (Lord Kelvin) im schottischen Glasgow. Der Bau und die Einrichtung des nach dem Hauptgeldgeber benannten Cavendish Laboratory nahm viel Zeit in Anspruch; mit ihm begründete aber Maxwell eine moderne Ausbildung und die berühmte Experimentalphysik in Cambridge.

Quelle: Armin Hermann 'Lexikon - Geschichte der Physik A-Z', Aulis-Verlag Deubner & Co KG 1978