

# Elektrodynamik

Tilman Plehn

Institut für Theoretische Physik  
Universität Heidelberg

May 29, 2018

## Abstract

Diese Vorlesungsnotizen sind original von Timo Weigand, entwickelt für die Lehramtsvorlesung zur Elektrodynamik in Heidelberg. Diese aktuelle Version ist für das Sommersemester 2017 entstanden.

<b>1</b>	<b>Physikalische &amp; mathematische Grundlagen</b>	<b>3</b>
1.1	Elektrische & magnetische Felder . . . . .	3
1.2	Vektorfelder . . . . .	6
1.3	Differentialoperatoren . . . . .	7
1.4	Integralsätze . . . . .	7
1.5	Skalares Potential . . . . .	11
1.6	Vektorpotential . . . . .	13
1.7	Satz von Helmholtz . . . . .	15
<b>2</b>	<b>Elektrostatik</b>	<b>16</b>
2.1	Kugelsymmetrische Ladungsverteilung . . . . .	17
2.2	Multipol-Entwicklung . . . . .	19
2.3	Elektrostatische Energie . . . . .	21
2.4	Elektrostatik von Leitern . . . . .	22
2.5	Elektrostatik von Dielektrika . . . . .	24
<b>3</b>	<b>Magnetostatik</b>	<b>27</b>
3.1	Vektorpotential . . . . .	29
3.2	Multipol-Entwicklung . . . . .	30
3.3	Magnetostatik in Materie . . . . .	32
<b>4</b>	<b>Elektromagnetismus</b>	<b>34</b>
4.1	Potentiale und Eichinvarianz . . . . .	34
4.2	Lösungen der Wellengleichung . . . . .	36

<b>5</b>	<b>Spezielle Relativitätstheorie</b>	<b>38</b>
5.1	Vom Relativitätsprinzip zu Lorentz-Transformationen . . . . .	38
5.2	Lichtkegel . . . . .	41
5.3	Raumzeit . . . . .	43
5.4	Relativistische Elektrodynamik . . . . .	47
5.5	Elektromagnetische Wellen . . . . .	50

# 1 Physikalische & mathematische Grundlagen

Die fundamentalen Gesetze der modernen Physik sind in der Sprache der Quantenfeldtheorie verfasst. In dieser Vorlesung betrachten wir die beiden zentralen Bestandteile dieser fundamentalen Theorie:

- (Klassische) Feldtheorie beschreibt das physikalische Feld als ein Objekt mit physikalischer “Realität”, das die Wechselwirkungen von Teilchen beschreibt. Im sogenannten Standardmodell der Elementarteilchenphysik ist die Struktur der Wechselwirkungs-Felder

elektrisches Feld    magnetisches Feld  
Elektromagnetismus    schwache Wechselwirkung    starke Wechselwirkung    Gravitation

Die Eichgruppe, die die Symmetrie des Standardmodells beschreibt ist  $U(1)_{e-m} \times SU(2) \times SU(3)$ . Die Gravitations-Wechselwirkung wird durch die Allgemeine Relativitätstheorie beschrieben und ist nicht Bestandteil der üblichen Quantenfeldtheorien.

Im ersten Teil dieser Vorlesung behandeln wir Elektrodynamik als einfachstes Beispiel einer klassischen Feldtheorie. Es wird sich herausstellen, dass wir sie als Eichtheorie mit der Eichgruppe  $U(1)_{e-m}$  betrachten können. Sie beschreibt dann eine Vereinheitlichung der (scheinbar) verschiedener elektrischen und magnetischen Wechselwirkungen.

- Anwendung auf Objekte (sub)atomarer Größe erfordert das Konzept der Quantisierung. Das Standardmodell wird dann zu einer renormierbare Quantenfeldtheorie, einer Theorie ohne eingebaute Cutoff-Skala. Eine solche Skala definiert eine Grenze der Anwendbarkeit der Theorie aus Konsistenzbedingungen, zum Beispiel bei hohen oder niedrigen Energien.

Die Allgemeine Relativitätstheorie kann mit Hilfe eines Austauschteilchens, also eines quantisierten Wechselwirkungsfeldes beschrieben werden, aber sie hat ein Cutoff-Skala. Alternative Ansätze sind zum Beispiel Stringtheorie, Loop Quantum Gravity, etc. Im zweiten Teil der Vorlesung behandeln wir die Quantisierung elementarer Systeme als Voraussetzung für das Verständnis der Struktur moderner Theorien.

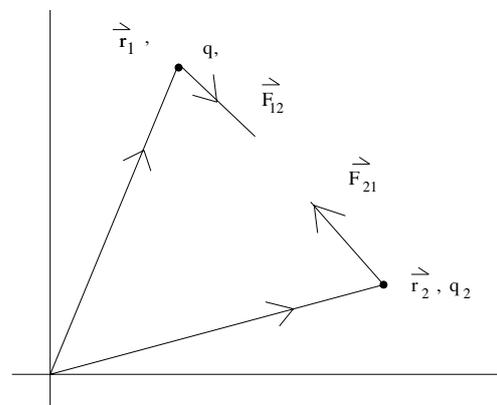
## 1.1 Elektrische & magnetische Felder

Elektrische Ladung ist die Eigenschaft zweier Körper, eine Kraft  $\vec{F}$  aufeinander auszuüben. Diese Kraft besitzt empirisch folgende Eigenschaften:

- $\vec{F}$  ist gerichtet entlang der Verbindungslinie
- $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$
- $|\vec{F}_{12}| \propto \frac{1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2}$  im Falle ruhender Ladungen
- $|\vec{F}_{12}| \propto |q_1 q_2|$ ; dabei existieren Abstoßung und Anziehung

⇒ die Coulomb-Kraft wird dann beschrieben durch

$$\boxed{\vec{F}_{12} = k q_1 q_2 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}} \quad \text{mit einer Proportionalitätskonstante } k > 0$$



(1.1)

Die Festlegung von  $k$  ist äquivalent zur Wahl eines Einheitssystems:

- Gauss-Einheiten  $\equiv$  cgs-Einheiten (cm, g, s): Ladung hat keine eigene Einheit  $\Rightarrow$  setze  $k \equiv 1$

$$[q] = ([F] [\text{Länge}]^2)^{1/2} = \frac{[\text{Masse}]^{1/2} [\text{Länge}]^{3/2}}{[\text{Zeit}]} \quad (1.2)$$

Wir definieren 1 ESE (elektrostatische Einheit) durch die Coulomb-Kraft

$$1 \text{ ESE} = \frac{\text{cm}^{3/2} \text{g}^{1/2}}{\text{s}} \quad q_j=1 \text{ ESE}, |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|=1 \text{ cm} \quad [F] = 1 \frac{\text{g cm}}{\text{s}^2} \quad (1.3)$$

Die Elementareinheit der Ladung ist  $e = 4.803 \cdot 10^{-10}$  ESE

- SI-Einheiten (m, kg, s, A): [Ladung] = 1 C  $\equiv$  1 As, offensichtlich definiert durch eine Kraft zwischen elektrischen Strömen. Damit benötigen wir in der Coulomb-Kraft eine Proportionalitätskonstante

$$\Rightarrow \quad k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \equiv 10^{-7} c^2 \cdot \frac{\text{N}}{\text{A}^2} \quad \text{mit Lichtgeschwindigkeit } c = 2.99 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ q_j=1 \text{ As}, |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|=1 \text{ m} \quad [F] = 10^{-7} \cdot c^2 \frac{\text{s}^2 \text{N}}{\text{m}^2} \quad (1.4)$$

Die Elementareinheit der Ladung ist  $e = 1.6 \cdot 10^{-19}$  C.

Wie Wikipedia korrekt sagt, werden überall außer in der Elektrodynamik und in der Teilchenphysik diese SI-Einheiten benutzt, verwaltet zum Beispiel von einer Anstalt in Braunschweig. Als anständige Theoretiker wählen wir das cgs-System.

Für das elektrische Feld betrachten wir eine Probeladung  $q_1$  am Ort  $\vec{r}_1$ . Sie befindet sich in der Umgebung einer Quellladung  $q_2 \gg q_1$  bei  $\vec{r}_2$ . Wir schreiben das Coulomb-Kraftgesetz mit  $k = 1$  als

$$\vec{F}_{12} = q_1 \vec{E}_{12} \quad \text{mit} \quad \vec{E}_{12} = q_2 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{E}_{12} = \frac{\vec{F}_{12}}{q_1} \equiv \lim_{q_1 \rightarrow 0} \frac{\vec{F}_{12}}{q_1} \quad (1.5)$$

In dieser Probeladungs-Approximation wird der Effekt der Probeladung  $q_1$  auf  $\vec{E}_2$  vernachlässigt. Allgemeiner ist jetzt das elektrische Feld  $\vec{E}_{12} \equiv \vec{E}_2$  die Eigenschaft der Raumzeit, dass auf eine kleine Punktladung  $q_1$  am Ort  $\vec{r}_1$  die Kraft

$$\vec{F}_{12}(\vec{r}_1) \equiv \vec{F}_2(\vec{r}_1) = q_1 \vec{E}_2(\vec{r}_1) \quad (1.6)$$

wirkt.

Empirisch gilt demnach erstens dass das von einer am Ort  $\vec{r}_2$  ruhenden Punktladung  $q_2$  erzeugte elektrische Feld am Ort  $\vec{r}_1$

$$\vec{E}_2(\vec{r}_1) = q_2 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} \quad (1.7)$$

ist. Eine weitere empirische Einsicht ist das Superpositionsprinzip: In Anwesenheit mehrerer Ladungen  $q_j$  bei  $\vec{r}_j$  wirkt auf die Probeladung  $q \equiv q_1$  am Ort  $\vec{r}$  die kombinierte Kraft

$$\vec{F}(\vec{r}) = \sum_{j=1}^N \vec{F}_j(\vec{r}) = q \sum_{j=1}^N q_j \frac{\vec{r} - \vec{r}_j}{|\vec{r} - \vec{r}_j|^3} = q \sum_{j=1}^N \vec{E}_j(\vec{r}) \stackrel{!}{=} q \vec{E}(\vec{r}) \quad \Leftrightarrow \quad \vec{E}(\vec{r}) = \sum_{j=1}^N \vec{E}_j(\vec{r}) \quad (1.8)$$

Hier ignorieren wir einfach den Probeladungs-Index 1 und summieren über den zweiten Index  $2 \rightarrow j = 1, \dots, N$ . Ebenso wie Kräfte addieren sich elektrische Felder (klassisch). Damit ist  $\vec{E}$  ein Vektor und  $\vec{E}(\vec{r})$  beschreibt ein Vektorfeld, genau genommen eine Komponente eines Tensorfeldes, wie wir noch sehen werden.

Das Magnetfeld ist dementsprechend die Eigenschaft der Raumzeit, dass auf eine bewegte Probeladung  $q$  mit Geschwindigkeit  $v$  (zusätzlich) die Lorentz-Kraft

$$\vec{F}_2(\vec{r}) = q \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}_2(\vec{r}) \quad (1.9)$$

wirkt. Die Lichtgeschwindigkeit  $c$  definiert die natürliche Einheit der Geschwindigkeit. Wie für die Coulombkraft legt diese Definition die Einheiten des Magnetfeldes  $\vec{B}$  fest:

- $\vec{v}$  wird in Einheiten von  $c$  gemessen oder  $[v/c] = 1$
- $[\vec{E}] = [\vec{B}]$

Auch  $\vec{B}(\vec{r})$  ist ein Vektorfeld beziehungsweise Komponente eines Tensorfeldes. Die kombinierte Coulomb-Kraft und Lorentz-Kraft auf eine Probeladung  $q$  am Ort  $\vec{r}$  ist

$$\boxed{\vec{F}(\vec{r}) = q \left( \vec{E}(\vec{r}) + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}(\vec{r}) \right)} \quad (1.10)$$

Die Quelle der Felder ist im Allgemeinen eine Ladungsverteilung oder Stromverteilung, so dass wir den entsprechenden Index unterdrücken. Wenn wir in dieser Gleichung die rechte Seite als Felder und damit als Eigenschaften von Raum und Zeit betrachten, dann ist klar, dass wir ohne Einschränkung auf bestimmte Bezugssysteme die Theorien elektrischer und magnetischer Felder nicht getrennt betrachten können.

Vier Maxwell-Gleichungen beschreiben die von einer Ladungsdichte  $q$  und einer Stromdichte  $\vec{j}$  erzeugten Felder  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$ . Die jeweils zwei homogene und nicht-homogene Gleichungen sind empirisch gewonnen:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= 4\pi\rho & \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \frac{4\pi}{c} \vec{j} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} & \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \end{aligned} \quad (1.11)$$

Sie garantieren auch die Ladungserhaltung. Zu ihrem Verständnis benötigen wir die Vektoranalyse, die wir aus dem ersten Jahr kennen und im folgenden kurz wiederholen werden. Im ungeliebten SI-System lauten die Maxwell-Gleichungen

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E}^* &= \frac{1}{\epsilon_0} \rho & \vec{\nabla} \times \vec{E}^* &= -\frac{\partial \vec{B}^*}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \times \vec{B}^* &= \mu_0 \vec{j}^* + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}^*}{\partial t} & \vec{\nabla} \cdot \vec{B}^* &= 0 \\ \vec{F} &= q^* \left( \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}^* \right) \end{aligned} \quad (1.12)$$

Die beiden Systeme von Einheiten lassen sich mit etwa Aufwand ineinander umrechnen:

SI-Größe	SI-Einheit	cgs-Größe
Ladung $q^*$	1 C = 1 As	$q = \frac{q^*}{\sqrt{4\pi\epsilon_0}}$
Strom $I^*$	1 A	$I = \frac{I^*}{\sqrt{4\pi\epsilon_0}}$
elektrisches Feld $\vec{E}^*$	$1 \frac{\text{N}}{\text{As}} \equiv 1 \frac{\text{V}}{\text{m}}$	$\vec{E} = \sqrt{4\pi\epsilon_0} \vec{E}^*$
magnetisches Feld $\vec{B}^*$	$1 \text{ T} \equiv 1 \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2}$	$\vec{B} = c\sqrt{4\pi\epsilon_0} \vec{B}^* \equiv \sqrt{\frac{4\pi}{\mu_0}} \vec{B}^*$

Umgekehrt sind die diversen Umrechnungsfaktoren

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 10^{-7} c^2 \frac{\text{N}}{\text{A}^2} \quad \epsilon_0 = 8.885 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}} \quad \mu_0 = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}} \quad (1.13)$$

## 1.2 Vektorfelder

Die Felder  $\vec{E}(\vec{x})$  und  $\vec{B}(\vec{x})$  sind Beispiele von Vektorfeldern, weshalb wir uns kurz an die Eigenschaften von Vektorräumen erinnern, die wir aus den Vorlesungen Theorie I und II schon kennen: Sei  $V$  ein  $d$ -dimensionaler Vektorraum über den reellen Zahlen  $\mathbb{R}$  und  $\vec{u}, \vec{v} \in V$

$$\text{i) } \exists '+': \quad \vec{u} + \vec{v} \in V \quad (\text{kommutative und assoziative Addition, } \vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0})$$

$$\text{ii) } \exists '\cdot': \quad \mathbb{R} \times V \rightarrow V: \quad \lambda \cdot \vec{u} \in V \quad (\text{skalare Multiplikation})$$

Gegeben eine Basis  $\{\vec{e}_i, i = 1, \dots, d\}$  lässt sich jeder Vektor darstellen als

$$\vec{v} = v_i \vec{e}_i \equiv \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_d \end{pmatrix} \quad v_i \in \mathbb{R} \quad (1.14)$$

Wir betrachten den normierte Vektorraum basierend auf dem Skalarprodukt

$$\cdot: \quad v \times v \rightarrow \mathbb{R}: \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \varphi \in \mathbb{R} \quad (1.15)$$

Eine Orthonormalbasis erfüllt dann die Bedingung

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = u_i v_j \vec{e}_i \vec{e}_j = u_i v_i \quad (1.16)$$

mit dem Kronecker-Delta-Symbol  $\delta_{ij}$  und der bekannten Summenkonvention. Unter einer Rotation  $\vec{v} \rightarrow R\vec{v}$  mit  $R \in SO(d)$  (oder  $R^T R = 1, R^T = R^{-1}$ ) ist das Skalarprodukt invariant

$$(R\vec{v}) \cdot (R\vec{u}) = \vec{v} \cdot \vec{u} \quad (1.17)$$

Im Spezialfall  $d = 3$  definieren wir auf dem Vektorraum das Kreuzprodukt

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{u} \times \vec{v} = \epsilon_{ijk} u_i v_j \vec{e}_k \quad (1.18)$$

mit  $\epsilon_{ijk}$  als total antisymmetrischem Tensor in den Indizes  $ijk$  und  $\epsilon_{123} \equiv 1$ .

Ein Vektorfeld in  $d = 3$  Dimensionen ist eine Abbildung, die jedem Punkt im Ortsraum  $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$  einen Vektor in  $\mathbb{R}^3$  zuordnet

$$\vec{v}: \quad \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \vec{x} \rightarrow \vec{v}(\vec{x}) = \sum_{i=1}^3 v_i(\vec{x}) \vec{e}_i \quad (1.19)$$

In der Physik treten auch andere Felder auf, wie zum Beispiel das skalare Temperaturfeld. Genau genommen werden Skalar- und Vektorfelder durch ihr Transformationsverhalten unter Rotationen, der Symmetriegruppe von  $\mathbb{R}^3$ , definiert:

$$\begin{aligned} x &\rightarrow \vec{x}' = R\vec{x} & R &\in SO(3) \\ f(\vec{x}) &\rightarrow f'(\vec{x}) = f(\vec{x}) = f(R^{-1}\vec{x}') \\ v(\vec{x}) &\rightarrow \vec{v}'(\vec{x}) = R \vec{v}(\vec{x}) = R \vec{v}(R^{-1}\vec{x}') \end{aligned} \quad (1.20)$$

Ebenso existieren Tensorfelder, Spinorfelder, etc

### 1.3 Differentialoperatoren

Betrachte ein glattes (stetig differenzierbares) Skalarfeld  $f(\vec{x})$ . Die infinitesimale Änderung am Punkt  $\vec{x} = \vec{a}$  ist

$$\begin{aligned} df &= f(a_1 + dx_1, a_2 + dx_2, a_3 + dx_3) - f(a_1, a_2, a_3) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_1} \Big|_{\vec{x}=\vec{a}} dx^1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \Big|_{\vec{x}=\vec{a}} dx^2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} \Big|_{\vec{x}=\vec{a}} dx^3 \end{aligned} \quad (1.21)$$

Wir definieren den Gradient des Skalarfeldes

$$\vec{\nabla} f = \sum_{i=1}^3 \underbrace{\vec{e}_i \frac{\partial f}{\partial x_i}}_{\equiv \partial_i f} \equiv \begin{pmatrix} \partial_1 f \\ \partial_2 f \\ \partial_3 f \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \boxed{df = \vec{\nabla} f \cdot d\vec{x}} \quad (1.22)$$

Dieser Differentialoperator heißt ‘Nabla’-Operator,

$$\vec{\nabla} := \sum_{i=1}^3 \underbrace{\vec{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i}}_{\equiv \partial_i} \quad (1.23)$$

Wenn  $f$  ein Skalarfeld ist, dann ist  $\vec{\nabla} f$  ein Vektorfeld. Derselbe Operator  $\vec{\nabla}$  kann auf zweierlei Weisen auf ein (glattes) Vektorfeld  $\vec{v}(\vec{x})$  wirken. Erstens kann er ein Skalarprodukt bilden,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \partial_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1(\vec{x}) \\ v_2(\vec{x}) \\ v_3(\vec{x}) \end{pmatrix} = \partial_1 v_1(\vec{x}) + \partial_2 v_2(\vec{x}) + \partial_3 v_3(\vec{x}) \equiv \partial_i v_i(\vec{x}) \quad (1.24)$$

Dieses Skalarfeld heißt Divergenz von  $\vec{v}(\vec{x})$ . Zweitens kann der Differentialoperator ein Vektorfeld bilden

$$\vec{\nabla} \times \vec{v}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \partial_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_1(\vec{x}) \\ v_2(\vec{x}) \\ v_3(\vec{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_2 v_3(\vec{x}) - \partial_3 v_2(\vec{x}) \\ \partial_3 v_1(\vec{x}) - \partial_1 v_3(\vec{x}) \\ \partial_1 v_2(\vec{x}) - \partial_2 v_1(\vec{x}) \end{pmatrix} = \epsilon_{ijk} (\partial_i v_j) \vec{e}_k \quad (1.25)$$

Dieses Vektorfeld heißt die Rotation von  $\vec{v}(\vec{x})$ . Offensichtlich können wir auch die zweite Ableitung mit Hilfe dieses Differentialoperators bilden. Der entsprechende Operator  $\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}$  heißt Laplace-Operator. Er wirkt auf ein Skalarfeld als

$$\Delta f(\vec{x}) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} f(\vec{x})) = \vec{\nabla} \cdot \begin{pmatrix} \partial_1 f(\vec{x}) \\ \partial_2 f(\vec{x}) \\ \partial_3 f(\vec{x}) \end{pmatrix} = \partial_1^2 f(\vec{x}) + \partial_2^2 f(\vec{x}) + \partial_3^2 f(\vec{x}) = (\partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2) f(\vec{x}) \quad (1.26)$$

Ebenso kann der (skalare) Laplace-Operator auf ein Vektorfeld wirken

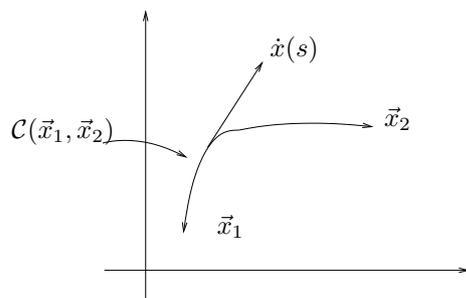
$$\Delta \vec{v}(\vec{x}) = (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}(\vec{x}) = (\partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2) \vec{v}(\vec{x}) \neq \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}(\vec{x})) \quad (1.27)$$

In den Übungen beweisen wir folgende Identitäten

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} f) = 0 \quad \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{v}) = 0 \quad \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) - \vec{\nabla}^2 \vec{v} \equiv \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) - \Delta \vec{v} \quad (1.28)$$

### 1.4 Integralsätze

Zur Vorbereitung auf die Integralsätze, die wir für die Elektrodynamik brauchen definieren wir zunächst das Linienintegral. Betrachte eine Kurve  $\mathcal{C}(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$



Mathematisch ist  $\mathcal{C}$  dann eine Abbildung

$$[0; 1] \ni s \rightarrow \vec{x}(s) \quad \text{mit} \quad \vec{x}(0) = \vec{x}_1 \quad \text{und} \quad \vec{x}(1) = \vec{x}_2 \quad (1.29)$$

Der Parameter  $s$  heißt Kurvenparameter. Der Tangentialvektor an die Kurve  $\mathcal{C}$  ist

$$\frac{d\vec{x}(s)}{ds} \equiv \dot{\vec{r}}(s) \quad (1.30)$$

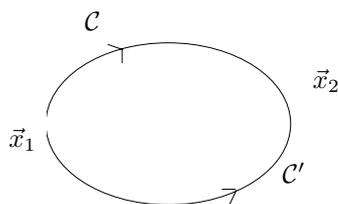
Das Linienintegral eines Vektorfeldes  $\vec{v}(\vec{x})$  entlang  $\mathcal{C}(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$  kann mit Hilfe des Kurvenparameters umschreiben

$$\int_{\mathcal{C}(\vec{x}_1, \vec{x}_2)} \vec{v}(\vec{x}) \cdot d\vec{x} = \int_0^1 \vec{v}(\vec{x}(s)) \cdot \frac{d\vec{x}(s)}{ds} ds = \int_0^1 [\vec{v}(\vec{x}(s)) \cdot \dot{\vec{r}}(s)] ds \quad (1.31)$$

Als erstes betrachten wir die Kombination von Gradient und Kurvenintegral und berechnen das Kurvenintegral des Gradientenfeldes  $\vec{\nabla}f(\vec{x})$  entlang der Kurve  $\mathcal{C}(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}(\vec{x}_1, \vec{x}_2)} \vec{\nabla}f(\vec{x}) \cdot d\vec{x} &= \int_0^1 (\vec{\nabla}f) \cdot \frac{d\vec{x}}{ds} ds = \int_0^1 \frac{\partial f(\vec{x}(s))}{\partial r_i} \frac{dr_i(s)}{ds} ds \\ &= \int_0^1 \frac{df(\vec{x}(s))}{ds} ds = \int_{f(\vec{x}_1)}^{f(\vec{x}_2)} df \quad \Rightarrow \quad \boxed{\int_{\mathcal{C}(\vec{x}_1, \vec{x}_2)} \vec{\nabla}f(\vec{x}) \cdot d\vec{x} = f(\vec{x}_2) - f(\vec{x}_1)} \end{aligned} \quad (1.32)$$

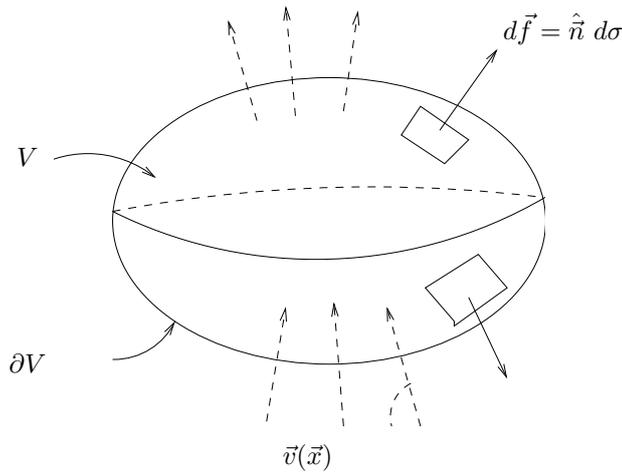
Dies gilt unabhängig vom gewählten Weg zwischen  $\vec{x}_1, \vec{x}_2$ , für andere Wege  $\mathcal{C}'(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$  erhalten wir dasselbe Ergebnis.



Dieser Rechenweg und damit die Wegunabhängigkeit gelten nur für die Gradientenfelder, nicht für ein allgemeines Vektorfeld  $\vec{v}(\vec{x})$ . Als Korollar können wir beweisen dass für konservative Felder oder Gradientenfelder das geschlossene Linienintegral verschwindet,

$$\underbrace{\int_{\mathcal{C}(\vec{x}_1, \vec{x}_1)}}_{\text{geschlossener Weg}} \vec{\nabla}f(\vec{x}) \cdot d\vec{x} = 0 \quad (1.33)$$

Als zweiten Schritt betrachten wir die Divergenz und den Satz von Gauss. Hierzu betrachten wir ein Vektorfeld  $\vec{v}(\vec{x})$  rund um ein Volumen  $V$  mit dem Rand oder der Oberfläche  $\partial V$ .



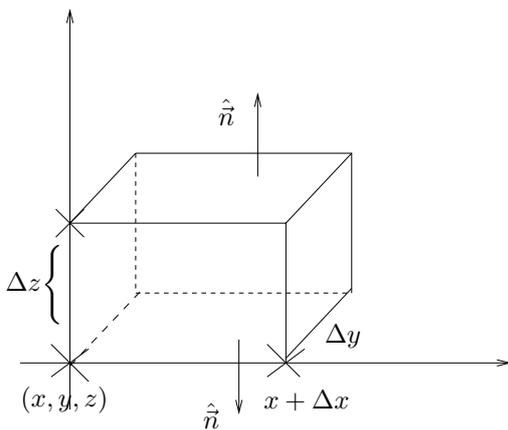
Auf der Oberfläche definieren wir  $d\vec{f}$  als ein infinitesimales Oberflächenelement, nach außen gerichtet. Sein Betrag ist die Fläche  $|d\vec{f}| = d\sigma$ , und  $\hat{n}$  ist der Einheitsvektor normal zu  $\partial V$ . Der Fluss des des Vektorfeldes  $\vec{v}(\vec{x})$  durch die Oberfläche  $\partial S$  ist definiert als

$$\Phi = \int_{\partial S} \vec{v}(\vec{x}) \cdot d\vec{f} \tag{1.34}$$

In diesem Fall gilt der Integralsatz von Gauss,

$$\int_{\partial V} \vec{v} \cdot d\vec{f} = \int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) dV \equiv \int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) d^3x \tag{1.35}$$

$\vec{\nabla} \cdot \vec{v}$  beschreibt die Quellstärke eines Vektorfeldes. Wir skizzieren kurz den Beweis: Zuerst teilen wir das Volumen  $V$  in infinitesimale Volumenelemente auf.



Dementsprechend teilen wir auch den infinitesimalen Beitrag zum Fluss  $\Delta\Phi = \vec{v} \cdot \Delta\vec{f}$  durch die Oberfläche in die verschiedenen Richtungen auf

$$\begin{aligned} \Phi_x(x) &= v_x(x) \Delta y \Delta z \\ \Phi_y(y) &= v_y(y) \Delta x \Delta z \\ \Phi_z(z) &= v_z(z) \Delta x \Delta y \end{aligned} \quad \text{mit} \quad v_x(x) \equiv v_x(x, \underbrace{\bar{y}, \bar{z}}_{\text{Mittelwert über } [y, y + \Delta y], [z, z + \Delta z]}) \tag{1.36}$$

Der infinitesimale Fluss durch die Oberfläche ist dann

$$\begin{aligned}
 \Delta\Phi &= \Phi_x(x + \Delta x) - \Phi_x(x) + \Phi_y(y + \Delta y) - \Phi_y(y) + \Phi_z(z + \Delta z) - \Phi_z(z) \\
 &= \partial_x \Phi_x(x) \Delta x + \partial_y \Phi_y(y) \Delta y + \partial_z \Phi_z(z) \Delta z \\
 &= (\partial_x v_x + \partial_y v_y + \partial_z v_z) \underbrace{\Delta x \Delta y \Delta z}_{\equiv \Delta V} \\
 &= (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) \Delta V
 \end{aligned} \tag{1.37}$$

Infinitesimal können wir das endliche Volumen und die endliche Oberfläche aufintegrieren und erhalten den Satz von Gauss. Der zentrale Punkt in diesem Beweis ist dass sich die internen Flüsse gegenseitig aufheben.

Als Anwendungen des Satzes von Gauss finden wir die beiden Sätze von Green. Seien  $\phi(\vec{x})$  und  $\psi(\vec{x})$  Skalarfelder, dann gelten

$$\begin{aligned}
 1. \text{ Satz von Green} \quad & \int_V dV (\phi \Delta \psi - \psi \Delta \phi) = \int_{\partial V} d\vec{f} \cdot (\phi \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \phi) \\
 2. \text{ Satz von Green} \quad & \int_V dV (\phi \Delta \psi) = - \int_V dV (\vec{\nabla} \phi) \cdot (\vec{\nabla} \psi) + \int_{\partial V} d\vec{f} \cdot (\phi \vec{\nabla} \psi)
 \end{aligned} \tag{1.38}$$

Zum Beweis des zweiten Satzes nutzen wir den Satz von Gauss für das Vektorfeld  $\vec{v} = \phi \vec{\nabla} \psi$  und finden die Divergenz

$$\begin{aligned}
 \vec{\nabla} \cdot (\phi \vec{\nabla} \psi) &= \partial_i (\phi \vec{\nabla} \psi)_i = \partial_i (\phi \partial_i \psi) \\
 &= (\partial_i \phi) (\partial_i \psi) + \phi \partial_i \partial_i \psi = (\vec{\nabla} \phi) \cdot (\vec{\nabla} \psi) + \phi \Delta \psi
 \end{aligned} \tag{1.39}$$

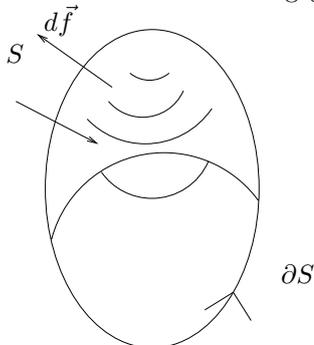
Der zweite Satz folgt wenn wir die Divergenz des Vektorfeldes  $\vec{v} = \phi \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \phi$  bilden

$$\begin{aligned}
 \vec{\nabla} \cdot (\phi \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \phi) &= \vec{\nabla} \cdot (\phi \vec{\nabla} \psi) - \vec{\nabla} \cdot (\psi \vec{\nabla} \phi) \\
 &= \partial_i (\phi \partial_i \psi) - \partial_i (\psi \partial_i \phi) \\
 &= (\partial_i \phi) (\partial_i \psi) + \phi \Delta \psi - (\partial_i \psi) (\partial_i \phi) - \psi \Delta \phi \\
 &= \phi \Delta \psi - \psi \Delta \phi
 \end{aligned} \tag{1.40}$$

Als dritten Schritt kommen wir zur Rotation und Satz von Stokes. Wir betrachten das geschlossene Linienintegral

$$\mathcal{C} = \oint_{\partial S} \vec{v}(\vec{x}) \cdot d\vec{x} \tag{1.41}$$

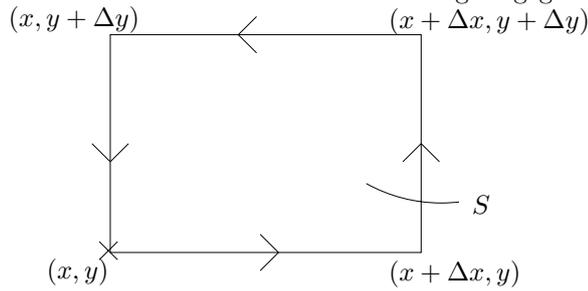
entlang einer geschlossenen Kurve, die durch den Rand der Fläche  $S$  gegeben ist.



Es gilt dann der Integralsatz von Stokes

$$\boxed{\oint_{\partial S} \vec{v} \cdot d\vec{x} = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \cdot d\vec{f}} \tag{1.42}$$

Hier gibt  $\vec{\nabla} \times \vec{v}$  die Wirbelstärke des Vektorfeldes  $\vec{v}(\vec{x})$  an. Wir skizzieren ebenfalls den Beweis: Betrachte eine infinitesimale Kurve  $\partial S$  mit Orientierung entgegen dem Uhrzeigersinn



Wenn wir die infinitesimalen Beiträge zum endlichen Linienintegral kombinieren, dann heben sich die internen Pfade benachbarter Zellen gegenseitig auf. Die umrandete Fläche ist

$$\Delta S = \Delta x \Delta y \quad \Rightarrow \quad d\vec{f} = \Delta S \vec{e}_z \tag{1.43}$$

Der infinitesimale Beitrag zum Linienintegral entlang der vier Seiten ist

$$\begin{aligned} \Delta \mathcal{C} &= v_x(\bar{x}, y) \Delta x + v_y(x + \Delta x, \bar{y}) \Delta y - v_x(\bar{x}, y + \Delta y) \Delta x - v_y(x, \bar{y}) \Delta y \\ &= [v_x(\bar{x}, y) - v_x(\bar{x}, y + \Delta y)] \Delta x + [v_y(x + \Delta x, \bar{y}) - v_y(x, \bar{y})] \Delta y \\ &= -\partial_y v_x(\bar{x}, y) \Delta x \Delta y + \partial_x v_y(x, \bar{y}) \Delta x \Delta y \\ &= (\partial_x v_y - \partial_y v_x) \Delta x \Delta y \\ &= (\vec{\nabla} \times \vec{v})_z \Delta S \\ &= (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \cdot d\vec{f} \end{aligned} \tag{1.44}$$

wo  $\bar{x}, \bar{y}$  den Mittelwert entlang Integrationsrichtung bedeutet. Wieder integrieren die endliche Fläche auf und erhalten den Satz von Stokes.

### 1.5 Skalares Potential

Wir erinnern uns an zwei der grundlegenden Eigenschaften des Gradienten, der Divergenz, und der Rotation: Gradientenfelder haben keine Rotation und Rotationsfelder haben keine Divergenz

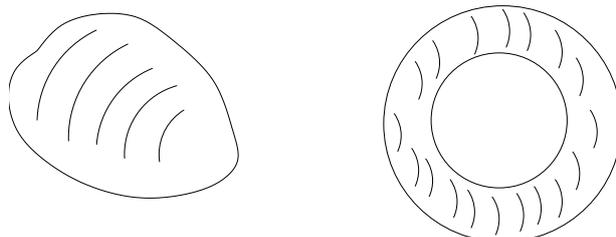
$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} f) = 0 \quad \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{v}) = 0 \tag{1.45}$$

Es stellt sich die Frage, ob auch die Umkehrung gilt

- gegeben ein Vektorfeld  $\vec{E}(\vec{x})$  mit  $\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{x}) = 0 \stackrel{?}{\Rightarrow} \vec{E}(\vec{x}) = -\vec{\nabla} \phi$  für Skalarfeld  $\phi(\vec{x})$
- gegeben ein Vektorfeld  $\vec{B}(\vec{x})$  mit  $\vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{x}) = 0 \stackrel{?}{\Rightarrow} \vec{B}(\vec{x}) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{x})$  für Vektorfeld  $\vec{A}(\vec{x})$

Die Bezeichnung der beiden Felder entspricht den Maxwell-Gleichungen. Die Antwort ist ja, wenn die Topologie des Raumes stimmt. In diesem Falle heißt  $\phi(\vec{x})$  das skalare Potential zum rotationsfreien Vektorfeld  $\vec{E}(\vec{x})$  und  $\vec{A}(\vec{x})$  das Vektorpotential zum divergenzfreien Vektorfeld  $\vec{B}(\vec{x})$ .

Betrachten wir zunächst das skalare Potential. Ein Gebiet  $U$  heißt einfach zusammenhängend wenn jede geschlossene Kurve stetig auf einen Punkt kontrahiert werden kann:



Nicht einfach zusammenhängende Gebiete sind topologisch nichttrivial und physikalisch ein Problem. Inspiriert von den Maxwell-Gleichungen sei  $\vec{E}(\vec{x})$  ein glattes Vektorfeld im einfach zusammenhängenden Gebiet  $U$  des drei-dimensionalen Raumes, und es gelten in  $U$

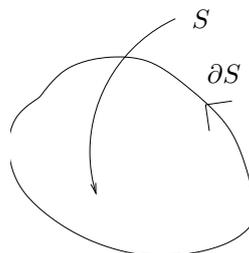
$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{x}) = 0 \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{x}) = \rho(\vec{x}) \neq 0 \quad (1.46)$$

Dann können wir zeigen dass es ein skalares Potential  $\phi(\vec{x})$  gibt, so dass

$$\vec{E}(\vec{x}) = -\vec{\nabla}\phi(\vec{x}) \quad (1.47)$$

Das Potential  $\phi$  ist eindeutig bis auf eine Konstante  $\phi \rightarrow \phi + C$ . Wir skizzieren wieder den Beweis. Betrachte eine geschlossene Kurve  $\partial S \subset U$ , dann gilt nach dem Satz von Stokes für das rotationsfreie Feld

$$\oint_{\partial S} \vec{E} \cdot d\vec{x} = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot d\vec{f} = 0 \quad (1.48)$$



Somit ist das nicht geschlossene Integral  $\int_{\vec{x}_0}^{\vec{x}_1} \vec{E} \cdot d\vec{x}'$  wegunabhängig. Wir setzen

$$\phi(\vec{x}) = - \int_{\vec{x}_0}^{\vec{x}} \vec{E}(\vec{x}') \cdot d\vec{x}' \quad (1.49)$$

und die Wahl von  $\vec{x}_0$  entspricht der Integrationskonstante  $C$ . Falls  $U$  zusammenhängend ist, dann gilt für eine infinitesimale Verschiebung des skalaren Feldes

$$d\phi(\vec{x}) \equiv \vec{\nabla}\phi(\vec{x}) \cdot d\vec{x} = -\vec{E}(\vec{x}) \cdot d\vec{x} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{E}(\vec{x}) = -\vec{\nabla}\phi(\vec{x}) \quad (1.50)$$

Wenn die Maxwell-Gleichungen gelten, dann ist das skalare Potential-Feld  $\phi(\vec{x})$  die Lösung der Poisson-Gleichung, einer partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$-\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{x}) = \vec{\nabla} \cdot (-\vec{\nabla}\phi(\vec{x})) = \Delta\phi(\vec{x}) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta\phi(\vec{x}) = -\rho(\vec{x})} \quad (1.51)$$

Ihre Lösung erfordert die Spezifizierung einer der folgenden Randbedingungen:

- Wenn  $U$  endlich ist, dann benötigen wir Randbedingungen auf dem Rand  $\partial U$ . Wir wählen typischerweise die Dirichlet-Randbedingung

$$\phi(\vec{x}) \Big|_{\partial U} = f(\vec{x}) \quad (1.52)$$

oder die Neumann-Randbedingung

$$\partial_n \phi(\vec{x}) \Big|_{\partial U} = g(\vec{x}) \quad \text{mit der Normalableitung} \quad \partial_n \phi(\vec{x}) = \hat{n} \cdot \vec{\nabla}\phi \quad (1.53)$$

- Wenn  $U$  unendlich ist, dann ist der Rand nicht für Bedingungen geeignet und wir benötigen den asymptotischen Abfall von  $\phi$  im Unendlichen. Er reicht aus zu fordern

$$\phi(\vec{x}) \sim \frac{1}{|\vec{x}|} \quad \text{für} \quad |\vec{x}| \rightarrow \infty \quad (1.54)$$

Um die Poisson-Gleichung in Gl.(1.51) zu lösen nutzen wir die Green-Funktion der entsprechenden Differentialgleichung. Sie ist definiert als Lösung derselben Gleichung mit einer delta-förmigen Inhomogenität und hilft uns bei der Lösung von linearen inhomogenen Differentialgleichungen

$$\boxed{\Delta' G(\vec{x}, \vec{x}') = -4\pi \delta^3(\vec{x} - \vec{x}')} \quad (1.55)$$

Hier ist  $\Delta'$  die Raumbewertung nach der zweiten Koordinate  $\vec{x}'$ . Die oben genannten Randbedingungen im Raum  $\vec{x}'$  sind dann

- Dirichlet:  $G(\vec{x}, \vec{x}') = 0$  auf dem Rand  $\vec{x}' \in \partial U$ ;
- Neumann:  $\partial'_n G(\vec{x}, \vec{x}') = 4\pi \text{Vol}(\partial U) = \text{const}$ ;
- unendliches Gebiet:  $G(\vec{x}, \vec{x}') \sim 1/|\vec{x}'|$  für  $|\vec{x}'| \rightarrow \infty$ .

Im Folgenden beschränken wir uns auf ein unendliches Gebiet. Diese typische Annahme in der Feldtheorie erleichtert uns viele Berechnungen erheblich. Wir verwenden nun den ersten Satz von Green

$$\int_U d^3 x' [\phi(\vec{x}') \Delta' G(\vec{x}, \vec{x}') - G(\vec{x}, \vec{x}') \Delta' \phi(\vec{x}')] = \int_{\partial U} d\vec{f}' \cdot [\phi(\vec{x}') \vec{\nabla}' G(\vec{x}, \vec{x}') - G(\vec{x}, \vec{x}') \vec{\nabla}' \phi(\vec{x}')] \quad (1.56)$$

Die beiden Terme auf der linken Seite können wir mit Hilfe der Poisson-Gleichung vereinfachen

$$\begin{aligned} \int_U d^3 x' \phi(\vec{x}') \Delta' G(\vec{x}, \vec{x}') &= -4\pi \int_U d^3 x' \phi(\vec{x}') \delta^3(\vec{x} - \vec{x}') = -4\pi \phi(\vec{x}) \\ \int_U d^3 x' G(\vec{x}, \vec{x}') \Delta' \phi(\vec{x}') &= - \int_U d^3 x' G(\vec{x}, \vec{x}') \rho(\vec{x}') \\ \Rightarrow \phi(\vec{x}) &= \frac{1}{4\pi} \int_U d^3 x' G(\vec{x}, \vec{x}') \rho(\vec{x}') + \int_{\partial U} d\vec{f}' \cdot [\phi(\vec{x}') \vec{\nabla}' G(\vec{x}, \vec{x}') - G(\vec{x}, \vec{x}') \vec{\nabla}' \phi(\vec{x}')] \end{aligned} \quad (1.57)$$

Um die Randterme oder Integrale über  $\partial U$  abzuschätzen nutzen wir die Randbedingung für unendliches Volumen

$$\int_{\partial U} \dots \sim \int_{\partial U} d\vec{f}' \frac{1}{|\vec{x}'|} \frac{1}{|\vec{x}'|^2} \xrightarrow{|\vec{x}'| \rightarrow \infty} 0 \quad (1.58)$$

Damit erhalten wir als Lösung der Poisson-Gleichung oder Maxwell-Gleichungen für das skalare Potential-Feld

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi} \int_U d^3 x' G(\vec{x}, \vec{x}') \rho(\vec{x}') \quad (1.59)$$

Wie wir in der Übung zeigen werden ist die Struktur der Green-Funktion für unendliches Volumen

$$G(\vec{x}, \vec{x}') = \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \quad (1.60)$$

und damit für eine gegebene Ladungsverteilung  $\rho(\vec{x})$

$$\boxed{\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi} \int_U d^3 x' \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}} \quad (1.61)$$

## 1.6 Vektorpotential

Als nächstes betrachten wir Vektorpotentiale. Es gilt im Fall dass  $U$  einfach zusammenhängend und  $\vec{B}(\vec{x})$  ein Maxwell-inspiriertes Vektorfeld mit

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{x}) = 0 \quad \vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{x}) = \vec{\omega}(\vec{x}) \quad (1.62)$$

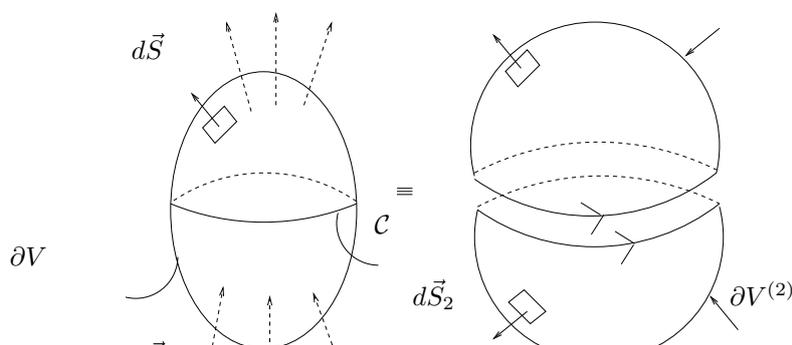
mit  $\vec{\nabla} \cdot \vec{\omega} = 0$  der Konsistenz halber. Dann gibt es ein Vektorfeld  $\vec{A}$  so dass

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (1.63)$$

Das Vektor-Potential kann nicht eindeutig sein, denn falls  $\vec{A}$  eine Lösung ist, so ist auch  $\vec{A} + \vec{\nabla}\chi$  mit einem beliebigen skalaren Feld  $\chi$  eine Lösung. Der Beitrag einer solchen Verschiebung von  $\vec{B}$  ist proportional zu  $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\chi = 0$ . Diese mögliche Verschiebung des Potentials bezeichnet man als Eichfreiheit. Eindeutigkeit erfordert eine sogenannte Eichfixierungsbedingung, zum Beispiel  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ .

Zuerst beweisen wir die Existenz von  $\vec{A}$ . Wegen  $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$  und dem Satz von Gauss gilt zunächst für jede geschlossene Oberfläche  $\partial V$

$$\int_{\partial V} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{B} dV = 0 \quad (1.64)$$



Um das Feld  $\vec{B}$  durch ein Vektorpotential zu ersetzen betrachten wir das Integral über den Rand der Volumens  $V$  als ein Integral über eine Fläche, das wir nach dem Satz von Stokes wiederum durch ein Linienintegral über den Rand der Fläche ersetzen können. Zum dem Zweck schneiden wir die geschlossene Oberfläche  $\partial V$  entlang einer Kurve  $\mathcal{C}$  in zwei Teile und erhalten ergibt für den jeweiligen Fluss

$$\Phi_{\mathcal{C}} \equiv \int_{\partial V^{(1)}} \vec{B} \cdot d\vec{S}_1 = \int_{\partial V^{(2)}} \vec{B} \cdot (-d\vec{S}_2) \quad (1.65)$$

Falls  $U$  einfach zusammenhängt, können  $S_1$  und  $S_2$  beliebig deformiert werden, wobei die Randkurve  $\mathcal{C}$  festgehalten wird. Der Fluss durch jede von  $\mathcal{C}$  berandete Fläche hängt lediglich von  $\mathcal{C}$  ab. Wir wählen nun ein geeignetes  $\vec{A}$  so dass

$$\Phi_{\mathcal{C}} = \oint_{\mathcal{C}} \vec{A} \cdot d\vec{x} \quad (1.66)$$

Wenn wir nun die Kurve  $\mathcal{C}$  als Rand einer Fläche  $\partial V$  betrachten, dann gilt nach dem Satz von Stokes

$$\Phi_{\mathcal{C}} = \int_{\partial V} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \oint_{\mathcal{C}} \vec{A} \cdot d\vec{x} = \int_{\partial V} (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot d\vec{S} \quad (1.67)$$

Da dies für alle Flächen  $\partial V$  gilt, kann man die beiden Integranden identifizieren.

In einem zweiten Schritt berechnen wir das Vektorpotential  $\vec{A}$  analog zum skalaren Potential. Wir beginnen mit

$$\vec{\omega} = \vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \Delta \vec{A} \quad (1.68)$$

Wir nutzen jetzt die Eichfreiheit, um zu fordern

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta \vec{A} = -\vec{\omega}} \quad (1.69)$$

Dies ist eine Poisson-Gleichung für das Vektorfeld  $\vec{A}$ . Wir lösen sie analog zum skalaren Potential für jede Komponente von  $\vec{A}$  und  $\vec{\omega}$  mit der Randbedingung  $\vec{\omega}(|\vec{x}| \rightarrow \infty) \rightarrow 0$  für ein unendliches Gebiet

$$\begin{aligned} \vec{A}(\vec{x}) &= \frac{1}{4\pi} \int d^3x' \frac{\vec{\omega}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \quad \Rightarrow \quad \vec{B}(\vec{x}) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{x}) \\ &= \frac{1}{4\pi} \int d^3x' \vec{\nabla} \times \frac{\vec{\omega}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \\ &= \frac{1}{4\pi} \int d^3x' \frac{\vec{\omega} \times (\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} \end{aligned} \quad (1.70)$$

wie wir in der Übung zeigen werden.

## 1.7 Satz von Helmholtz

Wir können unsere Argumente zur Existenz von Vektorpotentialen und skalaren Potentialen miteinander verknüpfen. Der Satz von Helmholtz oder Hauptsatz der Vektoranalyse gibt uns die Bedingungen wann ein Vektorfeld durch eine Kombination der beiden Potentiale beschrieben werden kann. Sei  $\vec{F}$  ein Vektorfeld in einem einfach zusammenhängenden Gebiet  $U$  mit

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \rho \quad \vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{\omega} \quad (1.71)$$

und es gelte für ein unendliches Gebiet

- $\rho(\vec{x})$  und  $\vec{\omega}(\vec{x})$  fallen für  $|\vec{x}| \rightarrow \infty$  mindestens wie  $1/|\vec{x}|^{(2+\epsilon)}$  ab;
- $\vec{F}(\vec{x})$  fällt für  $|\vec{x}| \rightarrow \infty$  mindestens wie  $1/|\vec{x}|^{3/2+\epsilon}$  ab

Dann ist  $\vec{F}(\vec{x})$  eindeutig durch eine Superposition zweier Felder und ihrer Potentiale

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \vec{F}_\phi + \vec{F}_A \quad \text{mit} \quad \vec{F}_\phi = -\vec{\nabla}\phi \\ & \quad \vec{F}_A = \vec{\nabla} \times \vec{A} \end{aligned} \quad (1.72)$$

berechenbar aus der Quellstärke  $\rho$  und Wirbelstärke  $\vec{\omega}$

$$\phi = \frac{1}{4\pi} \int d^3x' \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \quad \text{und} \quad \vec{A} = \frac{1}{4\pi} \int d^3x' \frac{\vec{\omega}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

bestimmt. Eine analoge Aussage kann man mit Hilfe von Dirichlet- oder Neumann-Randbedingungen auch für endliche Gebiete machen.

Hierbei stellen die Bedingungen, dass  $\rho(\vec{x})$  und  $\vec{\omega}(\vec{x})$  für  $|\vec{x}| \rightarrow \infty$  hinreichend stark abfallen sicher, dass die Ausdrücke für die Potentiale  $\phi(\vec{x})$  und  $\vec{A}(\vec{x})$  konvergieren. Die zweite Bedingung, dass  $\vec{F}(\vec{x})$  für  $|\vec{x}| \rightarrow \infty$  stark genug abfällt, stellt sicher, dass die Lösung eindeutig ist.

Die Existenz einer solchen Aufspaltung folgt sofort aus der Tatsache, dass Divergenz und Rotation lineare Abbildungen des Feldes  $\vec{F}$  sind und sich gegenseitig auf Null abbilden. Zum Beweis der Eindeutigkeit nehmen wir an es gebe zwei Felder  $\vec{F}_{1,2}(\vec{x})$  mit denselben Quellen/Wirbeln. Dann ist für ihre Differenz

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times (\vec{F}_1 - \vec{F}_2) &= 0 \quad \Rightarrow \quad (\vec{F}_1 - \vec{F}_2) = -\vec{\nabla}\psi \\ \vec{\nabla} \cdot (\vec{F}_1 - \vec{F}_2) &= 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta\psi = 0 \end{aligned} \quad (1.73)$$

und nach Annahme  $\psi \sim 1/|\vec{x}|^{1/2+\epsilon}$  für  $|\vec{x}| \rightarrow \infty$ . Wir betrachten nun ein großes Volumen  $V$

$$\begin{aligned} \int_V dV |\vec{F}_1 - \vec{F}_2|^2 &= \int_V dV \vec{\nabla}\psi \cdot \vec{\nabla}\psi = \int_V \left[ \vec{\nabla} \cdot (\psi \vec{\nabla}\psi) - \psi \Delta\psi \right] \quad (\text{Produktregel}) \\ &= \int_{\partial V} d\vec{f} \cdot (\psi \vec{\nabla}\psi) \quad (\text{Gauss}) \\ &\sim \frac{1}{|\vec{x}|^{2+\epsilon}} \cdot |\vec{x}|^2 \rightarrow 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{F}_1 - \vec{F}_2 = 0 \end{aligned} \quad (1.74)$$

## 2 Elektrostatik

Wie der Name sagt, ist das Ziel der Elektrostatik die Berechnung von elektrischen Feldern  $\vec{E}(\vec{x})$  oder ihren skalaren Potentialen  $\phi(\vec{x})$  für ruhende Ladungsverteilungen. Dies wird uns empirisch, ausgehend von der Coulombkraft zu den ersten Maxwell-Gleichungen und skalaren Potentialen führen.

Wir erinnern uns zuerst an das elektrische Feld, das eine Reihe ruhender Punktladungen  $\rho_i$  jeweils am Ort  $\vec{x}_i$  erzeugen

$$\vec{E}(\vec{x}) = \sum_{i=1}^N q_i \frac{\vec{x} - \vec{x}_i}{|\vec{x} - \vec{x}_i|^3}. \quad (2.1)$$

Die Ladungsdichte  $\rho(\vec{x})$  ist so definiert, dass die Ladung in einem infinitesimalen Volumen  $dV$  gegeben ist durch  $dQ = \rho(\vec{x})dV$ . In einem endlichen Volumen gilt dann

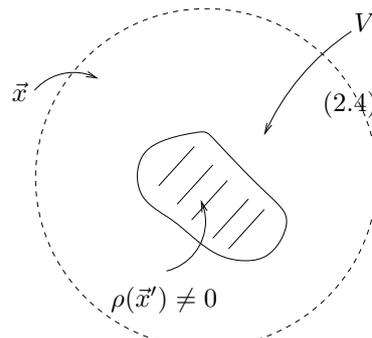
$$Q = \int_V d^3x \rho(\vec{x}) \quad (2.2)$$

Zum Beispiel entspricht einer Punktladung bei  $\vec{x} = \vec{x}_i$  die Ladungsdichte  $\rho(\vec{x}) = q\delta^3(\vec{x} - \vec{x}_i)$  mit der 3-dimensionalen Delta-Distribution. Für eine kontinuierliche Ladungsverteilung ersetzt man

$$\sum_{i=1}^N q_i f(\vec{x}_i) \longrightarrow \int_V d^3x \rho(\vec{x}') f(\vec{x}') \quad (2.3)$$

Das elektrische Feld einer allgemeinen Ladungsverteilung ist also

$$\vec{E}(\vec{x}) = \int_V d^3x' \rho(\vec{x}') \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}$$



Diese Form ist empirisch begründet, ausgehend vom empirischen Gesetz für die Coulombkraft einer ruhenden Punktladung und dem empirischen Superpositionsprinzip.

Mit Hilfe der Identität

$$\frac{\vec{x} - \vec{x}_i}{|\vec{x} - \vec{x}_i|^3} = -\vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}_i|} \quad (2.5)$$

oder allgemeiner

$$\int_V d^3x' \rho(\vec{x}') \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} = -\vec{\nabla} \int_V d^3x' \rho(\vec{x}') \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \quad (2.6)$$

kann man das Vektorfeld  $\vec{E}(\vec{x})$  mit Hilfe eines skalaren Potentials ausdrücken

$$\vec{E}(\vec{x}) = -\vec{\nabla}\phi(\vec{x}) \quad (2.7)$$

Das skalare Potential hat die Form

$$\phi(\vec{x}) = \sum_{i=1}^N \rho_i \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}_i|} \longrightarrow \boxed{\phi(\vec{x}) = \int_V d^3x' \rho(\vec{x}') \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|}} \quad (2.8)$$

Mit  $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\phi(\vec{x}) = 0$  gilt

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{x}) = 0} \quad (2.9)$$

Das  $\vec{E}$ -Feld ist also wirbelfrei. In der Übung werden wir weiterhin zeigen dass

$$\vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} = 4\pi\delta^3(\vec{x} - \vec{x}') \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{x}) = 4\pi\rho(\vec{x})} \quad (2.10)$$

Dies sind die beiden Maxwell-Gleichungen der Elektrostatik.

Für das skalare Potential ergibt sich aus den beiden Maxwell-Gleichungen wieder die Poisson-Gleichung

$$\boxed{\Delta\phi(\vec{x}) = -4\pi\rho(\vec{x})} \quad (2.11)$$

Die Tatsache, dass es ein skalares Potential gibt erfüllt schon die erste der beiden Maxwell-Gleichungen für  $\vec{E}$ . Die zweite Maxwell-Gleichung gibt uns diese Poisson-Gleichung für das skalare Potential.

Diese Form der Verknüpfung zwischen den skalaren Potential und der skalaren Ladungsdichte kann man auch raten: Der einfachste Differentialoperator, der invariant unter der Drehgruppe von  $\mathbb{R}^3$  ist, ist eben der Laplace-Operator  $\Delta$ . In dem Sinne beschreibt das einfachst mögliche physikalische Gesetz die strukturell unkomplizierte Elektrostatik. Das Gesetz von Gauss kann man alternativ auch als Integral schreiben

$$\int_{\partial V} \vec{E}(\vec{x}) \cdot d\vec{f} = \int_V d^3x \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{x}) = 4\pi \int_V d^3x \rho(\vec{x}) = 4\pi Q \quad (2.12)$$

Wir können in der Elektrostatik das skalare Feld  $\phi(\vec{x})$  physikalisch interpretieren. Dazu berechnen wir die Arbeit  $W(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$ , die nötig ist, um eine Testladung  $q$  von  $\vec{x}_1$  nach  $\vec{x}_2$  zu transportieren. Die an einem Teilchen in einem beliebigen Kraftfeld  $\vec{F}(\vec{x})$  entlang eines Weges  $\mathcal{C}(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$  verrichtete Arbeit

$$W(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = - \int_{\mathcal{C}(\vec{x}_1, \vec{x}_2)} \vec{F}(\vec{x}) \cdot d\vec{x} \quad (2.13)$$

ist im allgemeinen wegababhängig. In unserem Fall ist

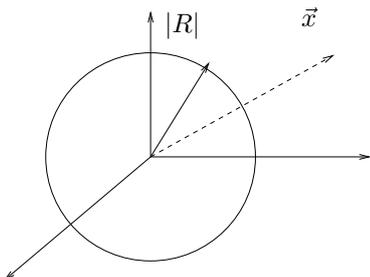
$$\begin{aligned} \vec{F}(\vec{x}) &= q \vec{E}(\vec{x}) = -q \vec{\nabla}\phi(\vec{x}) \\ \Rightarrow \quad W(\vec{x}_1, \vec{x}_2) &= q \int_{\mathcal{C}(\vec{x}_1, \vec{x}_2)} \vec{\nabla}\phi(\vec{x}) \cdot d\vec{x} = q[\phi(\vec{x}_2) - \phi(\vec{x}_1)] \end{aligned} \quad (2.14)$$

Dies ist unabhängig vom gewählten Weg, unser elektrisches Kraftfeld ist konservativ. Wir betrachten nun die nötige Arbeit, um ein Teilchen aus unendlicher Entfernung  $\vec{x}_1 \rightarrow \infty$  nach  $\vec{x}_2 \equiv \vec{x}$  zu bringen. Für eine endliche Ladungsverteilung wählt man dann

$$\phi(|\vec{x}| \rightarrow \infty) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{W(\vec{x}) = q \phi(\vec{x})} \quad (2.15)$$

## 2.1 Kugelsymmetrische Ladungsverteilung

Typische Landungsverteilungen kann man aufgrund ihrer Symmetrie-Struktur analysieren. Wir beginnen mit der sphärische Ladungsverteilung, also einer kugelförmigen, homogenen Ladungsverteilung in  $\mathbb{R}^3$



$$\begin{aligned} r &= |\vec{x}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \rho(\vec{x}) &= \rho_0 \theta(R - r) \\ \text{wo } \theta(x) &= \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (2.16)$$

Unser Ziel ist es, für diese Verteilungen das elektrische Feld  $\vec{E}(\vec{x})$  und das skalare Potential  $\phi(\vec{x})$  mit Hilfe des Gauss-Gesetzes zu berechnen. Aufgrund der Symmetrie ist

$$\vec{E}(\vec{x}) = E(r)\vec{e}_r \quad (2.17)$$

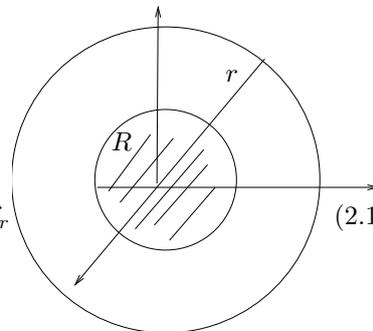
Hier ist  $\vec{e}_r$  der Einheitsvektor in die radiale Richtung. Wir lösen das Gauss-Gesetz in der Integral-Form und unterscheiden lediglich die relevanten Gebiete  $r \geq R$  und  $r < R$ :

- $r \geq R$ : Sei  $V$  eine Kugel um  $\vec{r} = 0$  mit Radius  $r$ .  
Dann gilt nach dem Gauss-Gesetz mit  $d\vec{f} \propto \vec{e}_r$

$$\int_{\partial V} \vec{E}(r) \cdot d\vec{f} = E(r) 4\pi r^2 = 4\pi Q$$

$$\Leftrightarrow E(r) = \frac{Q}{r^2} = \frac{4\pi\rho_0 R^3}{3r^2} \quad \text{und} \quad \vec{E}(\vec{r}) = E(r)\vec{e}_r \quad (2.18)$$

Dies ist dasselbe Feld wie für eine Punktladung  $Q$  bei  $\vec{r} = 0$ .



- $r < R$ : Hier integrieren wir die Ladungsverteilung innerhalb der massiven Kugel

$$\int_{\partial V} \vec{E}(r) \cdot d\vec{f} = E(r) 4\pi r^2$$

$$= 4\pi \int_V \rho(r') dV = 4\pi\rho_0 \frac{4\pi}{3} r^3 \quad \Rightarrow \quad E(r) = \rho_0 \frac{4\pi}{3} r \quad (2.19)$$

Für die Kombination der beiden Regionen können wir das skalare Potential berechnen

$$\phi(r) = - \int_{\vec{x}_0}^{\vec{r}} \vec{E}(r') \cdot d\vec{r}' \quad (2.20)$$

Es erfordert die Wahl eines Referenzpunktes  $\vec{r}_0$  mit  $\phi(\vec{r}_0) = 0$ . Für endlich begrenzte Ladungsverteilungen wählt man

$$\vec{r}_0 = \infty \quad \text{und} \quad \phi(|\vec{r}_0| = \infty) = 0 \quad (2.21)$$

Dies ist für unbegrenzte Ladungsverteilungen nicht möglich. Wir berechnen daher wieder in den beiden Regionen

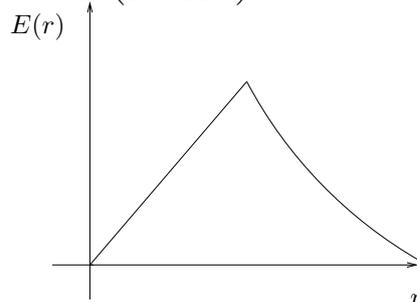
$$r \geq R : \quad \phi(r) = - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{E}(r') \cdot d\vec{r}' = - \int_{r_0}^r E(r') dr'$$

$$= - \int_{r_0}^r \frac{Q}{r'^2} dr' = Q \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right) = \frac{Q}{r}$$

$$r < R : \quad \phi(r) = - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{E}(r') \cdot d\vec{r}' = - \left( \int_{r_0}^R + \int_R^r \right) E(r') dr'$$

$$= \frac{Q}{R} - \rho_0 \frac{4\pi}{3} \int_R^r r' dr' = \frac{Q}{R} + \frac{2\pi}{3} \rho_0 (R^2 - r^2) = \frac{Q}{R} \left( \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \frac{r^2}{R^2} \right) \quad (2.22)$$

Am Punkt  $r = R$  ergeben beide Formeln  $\phi = Q/R$ .

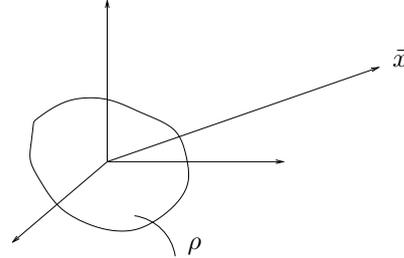


## 2.2 Multipol-Entwicklung

Wieder starten wir mit dem allgemeinen skalaren Potential einer Ladungsverteilung

$$\phi(\vec{x}) = \int d^3x' \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \quad (2.23)$$

Wir betrachten eine um Ursprung lokalisierte Ladungsverteilung  $\rho(\vec{x}')$  und berechnen  $\phi(\vec{x})$  weit entfernt vom Ursprung, also  $|\vec{x}| \gg |\vec{x}'|$ .



Die Idee ist, dass wir die Funktion  $1/(|\vec{x} - \vec{x}'|)$  als Taylorreihe in  $\vec{x}'$  entwickeln können. Eine Taylorreihe im drei-dimensionalen Raum ist allgemein

$$f(\vec{a} + \vec{x}') = f(\vec{a}) + x'_i \left. \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_i} \right|_{\vec{x}=\vec{a}} + \frac{1}{2} x'_i x'_j \left. \frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_i \partial x_j} \right|_{\vec{x}=\vec{a}} + \mathcal{O}(x'^3). \quad (2.24)$$

Wir können das auf unseren speziellen Fall anwenden, wobei wir wegen möglicher Vorzeichenfehler erst einmal  $1/(|\vec{x} + \vec{x}'|)$  entwickeln. Der erste Term ist offensichtlich

$$\frac{1}{|\vec{x} + \vec{x}'|} = \frac{1}{|\vec{x}|} + \mathcal{O}(x'). \quad (2.25)$$

Für den zweiten Term benötigen wir wieder die Ableitung von Gl.(2.5)

$$\partial_i \frac{1}{|\vec{x} + \vec{x}'|} = -\frac{x_i + x'_i}{|\vec{x} + \vec{x}'|^3} \Rightarrow \frac{1}{|\vec{x} + \vec{x}'|} = \frac{1}{|\vec{x}|} - x'_i \frac{x_i}{|\vec{x}|^3} + \mathcal{O}(x'^2). \quad (2.26)$$

Uns interessiert auch noch der dritte Term mit der zweiten Ableitung, nämlich

$$\partial_i \partial_j \frac{1}{|\vec{x} + \vec{x}'|} = -\partial_i \frac{x_j + x'_j}{|\vec{x} + \vec{x}'|^3} = -\frac{\delta_{ij}}{|\vec{x} + \vec{x}'|^3} + \frac{3x_i x_j}{|\vec{x} + \vec{x}'|^5}. \quad (2.27)$$

Damit ist unsere Taylor-Reihe mit dem korrekten Vorzeichen von  $\vec{x}'$

$$\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \frac{1}{|\vec{x}|} + x'_i \frac{x_i}{|\vec{x}|^3} + \frac{x'_i x'_j}{2} \left( -\frac{\delta_{ij}}{|\vec{x}|^3} + \frac{3x_i x_j}{|\vec{x}|^5} \right) + \mathcal{O}(x'^3). \quad (2.28)$$

Wir können sofort ablesen dass die Spur der Matrix der zweiten Ableitungen verschwindet

$$-\frac{\delta_{ii}}{|\vec{x}|^3} + \frac{3x_i x_i}{|\vec{x}|^5} = -\frac{3}{|\vec{x}|^3} + 3\frac{|\vec{x}|^2}{|\vec{x}|^5} = 0 \quad (2.29)$$

Diese Taylorreihe setzen wir nun in die Formel für das skalare Potential ein und finden

$$\begin{aligned} \phi(\vec{x}) &= \int d^3x' \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \\ &= \frac{1}{|\vec{x}|} \int d^3x' \rho(\vec{x}') + \frac{x_i}{|\vec{x}|^3} \int d^3x' x'_i \rho(\vec{x}') + \frac{1}{2} \left( -\frac{\delta_{ij}}{|\vec{x}|^3} + \frac{3x_i x_j}{|\vec{x}|^5} \right) \int d^3x' x'_i x'_j \rho(\vec{x}') + \mathcal{O}(x'^3) \\ &= \frac{1}{|\vec{x}|} \int d^3x' \rho(\vec{x}') + \frac{x_i}{|\vec{x}|^3} \int d^3x' x'_i \rho(\vec{x}') + \frac{x_i x_j}{2|\vec{x}|^5} \int d^3x' \left( -\delta_{ij} x_i'^2 + 3x'_i x'_j \right) \rho(\vec{x}') + \dots \end{aligned} \quad (2.30)$$

Der Rest-Term ist durch höhere Terme im Integranden mehr oder weniger allgemein und gut definiert.

Wir geben nun den Terme in der Taylor-Entwicklung des skalaren Potentials

$$\boxed{\phi(\vec{x}) = \phi_0(\vec{x}) + \phi_1(\vec{x}) + \phi_2(\vec{x}) + \dots} \quad (2.31)$$

jeweils eine physikalische Interpretation und bezeichnen sie als

$$\begin{array}{llll}
 \text{Monopol} & \phi_0(\vec{x}) = \frac{Q}{|\vec{x}|} & \text{mit Gesamtladung} & Q = \int d^3x' \rho(\vec{x}') \\
 \text{Dipol} & \phi_1(\vec{x}) = \frac{\vec{p} \cdot \vec{x}}{|\vec{x}|^3} & \text{mit Dipolmoment} & \vec{p} = \int d^3x' \vec{x}' \rho(\vec{x}') \\
 \text{Quadrupol} & \phi_2(\vec{x}) = Q_{ij} \frac{x_i x_j}{2|\vec{x}|^5} & \text{mit Quadrupol-Tensor} & Q_{ij} = \int d^3x' (-\delta_{ij} x'^2 + 3x'_i x'_j) \rho(\vec{x}')
 \end{array} \quad (2.32)$$

Hier hängt das Dipolmoment  $\vec{p}$  von der Lage des Koordinatensprungs ab. Da wir unser Argument mit einer Taylorreihe für große Abstände begonnen haben sehen wir uns für die Multipole die Abstandsabhängigkeit an

$$\phi_0 \sim \frac{1}{|\vec{x}|} \quad \phi_1 \sim \frac{1}{|\vec{x}|^2} \quad \phi_2 \sim \frac{1}{|\vec{x}|^3} \quad \dots \quad \boxed{\phi_n \sim \frac{1}{|\vec{x}|^{n+1}}} \quad (2.33)$$

Als einfaches Beispiel betrachten wir einen elektrischer Dipol aus zwei Punktladungen  $q_{1,2}$  an den Orten  $\vec{x}_{1,2}$  mit verschwindender Gesamtladung  $q_1 + q_2 = 0$ . Die Ladungsdichte ist also

$$\rho(\vec{x}) = q_1 \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_1) + q_2 \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_2) \quad (2.34)$$

Wir definieren als Konvention  $q_1 > 0$  und  $q_2 < 0$  und

$$\vec{d} = \vec{x}_1 - \vec{x}_2 \quad (2.35)$$

gerichtet von der negativen zu positiven Ladung. Das Potential am Ort  $\vec{x}$  ist dann

$$\phi(\vec{x}) = \frac{q_1}{|\vec{x} - \vec{x}_1|} + \frac{q_2}{|\vec{x} - \vec{x}_2|} \quad (2.36)$$

Die Multipol-Entwicklung ergibt

$$\begin{aligned}
 \phi_0(\vec{x}) &= \frac{Q}{|\vec{x}|} = \frac{q_1 + q_2}{|\vec{x}|} = 0 \\
 \phi_1(\vec{x}) &= \frac{\vec{p} \cdot \vec{x}}{|\vec{x}|^3} = \frac{(q_1 \vec{x}_1 + q_2 \vec{x}_2) \cdot \vec{x}}{|\vec{x}|^3} = \frac{q_1 \vec{d} \cdot \vec{x}}{|\vec{x}|^3} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{p} = q_1 \vec{d}
 \end{aligned} \quad (2.37)$$

Die Dipolordnung ist hier führend, aber höhere Multipole verschwinden nicht,  $\phi_n \neq 0$ .

Als nächstes berechnen wir die potentielle Energie des Dipols im äußeren elektrischen Feld. Hierzu betrachten wir sowohl  $q_1$  als auch  $q_2$  als Testaufladungen in einem äußeren Feld  $\vec{E}(\vec{x})$  mit den entsprechenden Potential  $\phi(\vec{x})$ . Die potentielle Energie des Dipols ist dann die Summe der potentiellen Energien der beiden Probeladungen

$$\begin{aligned}
 U &= q_1 \phi(\vec{x}_1) + q_2 \phi(\vec{x}_2) = q_1 [\phi(\vec{x}_1) - \phi(\vec{x}_2)] \\
 &= q_1 \vec{d} \cdot \vec{\nabla} \phi(\vec{x}) + \mathcal{O}(d^2) \\
 &= \vec{p} \cdot \vec{\nabla} \phi(\vec{x}) + \mathcal{O}(d^2)
 \end{aligned} \quad (2.38)$$

wobei weitere Terme dann existieren, wenn  $\vec{E}(\vec{x})$  nicht homogen ist. In einem homogenen äußeren Feld gilt hingegen die linearisierte Form exakt

$$U = -\vec{p} \cdot \vec{E} \quad (2.39)$$

Die verbundene Kraft auf den Dipol im äußeren Feld ist ebenfalls die Summe der Kräfte auf die beiden Probeladungen

$$\begin{aligned}
 \vec{F} &= q_1 \vec{E}(\vec{x}_1) + q_2 \vec{E}(\vec{x}_2) = q_1 [\vec{E}(\vec{x}_1) - \vec{E}(\vec{x}_2)] \\
 &= q_1 \vec{d} \cdot \vec{\nabla} \vec{E} + \mathcal{O}(d^2) \\
 &= \vec{p} \cdot \vec{\nabla} \vec{E} + \mathcal{O}(d^2)
 \end{aligned} \quad (2.40)$$

Für den linearen Term finden wir eine Verknüpfung von potentieller Energie und Kraft aus

$$\vec{p} \times \underbrace{(\vec{\nabla} \times \vec{E})}_{=0} = \vec{\nabla}(\vec{p} \cdot \vec{E}) - \underbrace{\vec{p} \cdot \vec{\nabla} \vec{E}}_{=\vec{F}} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{F} = \vec{\nabla}(\vec{p} \cdot \vec{E}) = -\vec{\nabla}U \quad (2.41)$$

Wegen seiner äußeren Ausdehnung erfährt der Dipol in einem äußeren Feld auch ein Drehmoment

$$\begin{aligned} \vec{D} &= \vec{x}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{x}_2 \times \vec{F}_2 = q_1 \vec{x}_1 \times \vec{E}(\vec{x}_1) + q_2 \vec{x}_2 \times \vec{E}(\vec{x}_2) = q_1 \left[ \vec{x}_1 \times \vec{E}(\vec{x}_1) - \vec{x}_2 \times \vec{E}(\vec{x}_2) \right] \\ &\approx q_1 \vec{d} \times \vec{E} = \vec{p} \times \vec{E} \end{aligned}$$

Der elektrische Dipol erfährt im homogenen Feld also keine Kraft, aber ein Drehmoment.

## 2.3 Elektrostatistische Energie

Wir berechnen als nächstes die notwendige Energie zum Aufbau einer allgemeinen Ladungskonfiguration. Als Beschreibung der Ladungsverteilung nutzen wir zunächst ein System von  $N$  Punktladungen  $q_i$  bei  $\vec{x}_i$ , die zu Beginn unendlich weit voneinander entfernt sind. Für diesen Zustand definieren die den Nullpunkt der potentielle Energie. Die Punktladungen werden nun eine nach der anderen herangeschafft und tragen zur potentiellen Energie bei

$$\begin{aligned} q_1 : \quad & \delta U = 0 \\ q_2 : \quad & \delta U = q_2 \frac{q_1}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|} \\ q_3 : \quad & \delta U = q_3 \frac{q_2}{|\vec{x}_2 - \vec{x}_3|} + q_3 \frac{q_1}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_3|} \dots \end{aligned} \quad (2.42)$$

Insgesamt ist die gespeicherte potentielle Energie nach Heranschaffen der  $N$  Ladungen

$$\begin{aligned} U &= \sum_i q_i \sum_{j>i} \frac{q_j}{|\vec{x}_i - \vec{x}_j|} \\ &= \sum_{j>i} q_i \frac{q_j}{|\vec{x}_i - \vec{x}_j|} = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \frac{q_i q_j}{|\vec{x}_i - \vec{x}_j|} \end{aligned} \quad (2.43)$$

Für eine kontinuierliche Ladungsverteilung  $\rho(\vec{x})$  im Volumen  $V$  ersetzen wir diese zweifache Summe durch ein zweifaches Integral

$$U = \frac{1}{2} \int_V d^3x d^3x' \frac{\rho(\vec{x})\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \quad (2.44)$$

Hier ist

- $V$  ist ein beliebiges Volumen, welches die Ladung voll einschließt. Wir definieren also  $V = \mathbb{R}^3$ .
- Im kontinuierlichen Fall trägt die ‘Selbstenergie’ oder Punktmenge  $\vec{x} = \vec{x}'$  im Integral nicht bei, denn mit  $R = \vec{x} - \vec{x}'$  ist

$$U = \frac{1}{2} \int_V d^3x d^3R \frac{\rho(\vec{x})\rho(\vec{x} + \vec{R})}{R} U = \frac{1}{2} \int_V d^3x dR d\Omega R \rho(\vec{x})\rho(\vec{x} + \vec{R}) \xrightarrow{R \rightarrow 0} 0 \quad (2.45)$$

Wir können die potentielle Energie durch das skalare Potential der Ladungsverteilung ausdrücken und erhalten sofort

$$U = \frac{1}{2} \int_V d^3x \rho(\vec{x}) \phi(\vec{x}) \quad (2.46)$$

Die Ladungsverteilung ist wiederum durch die Maxwell-Gleichungen mit dem elektrischen Feld verknüpft

$$\begin{aligned} \rho(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi} \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{x}) \quad \Rightarrow \quad U &= \frac{1}{8\pi} \int_V d^3x \left( \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{x}) \right) \phi(\vec{x}) \\ &= \frac{1}{8\pi} \int_V d^3x \left[ \vec{\nabla} \cdot \left[ \vec{E}(\vec{x}) \phi(\vec{x}) \right] - \underbrace{\vec{E}(\vec{x}) \cdot \vec{\nabla} \phi(\vec{x})}_{-\vec{E}(\vec{x})} \right] \\ &= \frac{1}{8\pi} \int_{\partial V} \vec{E}(\vec{x}) \phi(\vec{x}) \cdot d\vec{f} + \frac{1}{8\pi} \int_V d^3x \vec{E}^2(\vec{x}). \end{aligned} \quad (2.47)$$

Für endliche Ladungsverteilungen verschwindet der Oberflächenterm, denn für große Abstände skaliert der Integrand wie

$$|\vec{E}(\vec{x})| \phi(\vec{x}) |d\vec{f}| \sim \frac{1}{|\vec{x}|^2} \frac{1}{|\vec{x}|} |\vec{x}|^2 \xrightarrow{|\vec{x}| \rightarrow 0} 0 \quad (2.48)$$

Wir erhalten damit für die im Feld gespeicherte Energie  $U$  und Energiedichte  $u$

$$\boxed{U = \frac{1}{8\pi} \int_V d^3x \vec{E}^2(\vec{x})} \quad \text{oder} \quad u(\vec{x}) = \frac{1}{8\pi \vec{E}^2(\vec{x})} \quad (2.49)$$

Da die Energie  $U$  quadratisch von  $\vec{E}$  abhängt, genügt dies nicht dem Superpositionsprinzip.

Als wichtige Anmerkung sehen wir, dass die naive Anwendung dieses Ergebnisses auf die Energie des Feldes einer Punktladung zu keinem sinnvollen Ergebnis führt. Wir würden in diesem Fall erhalten

$$U \propto \int d^3x \frac{q^2}{|\vec{x}|^4} = \infty \quad (2.50)$$

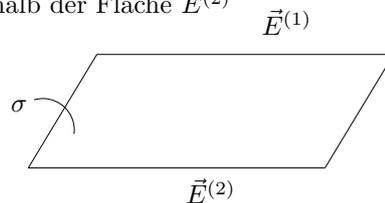
denn das Integral divergiert bei kleinen Abständen  $|\vec{x}| \rightarrow 0$ . Der tieferer Grund für dieses Problem bei kleinen Abständen liegt an der Verknüpfung kleiner Abstände mit hohen Energien in der Quantentheorie. In der moderner Quanten-Elektrodynamik gibt es Methoden, durch Renormierung mit diesen Divergenzen konsistent umzugehen.

## 2.4 Elektrostatik von Leitern

In der Elektrostatik können wir (leider) Randbedingungen nicht komplett ignorieren. Betrachten wir also zunächst eine geladene Fläche  $A$  mit der Flächenladungsdichte

$$\sigma = \frac{dQ}{dA} \quad (2.51)$$

Das Feld oberhalb der geladenen Fläche  $A$  sei  $E^{(1)}$ , das Feld unterhalb der Fläche  $E^{(2)}$



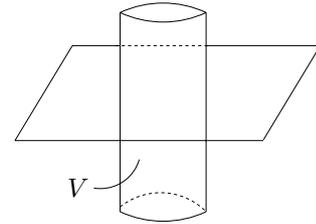
Wir können nun das Verhalten des Vektorfeldes  $\vec{E}$  an der Grenzfläche betrachten. Zunächst erfüllen die Tangentialkomponenten  $\vec{E}_{\parallel}^{(i)}$  direkt oberhalb und unterhalb der Grenzfläche wegen  $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{E}_{\parallel}^{(1)} = \vec{E}_{\parallel}^{(2)} \quad (2.52)$$

Physikalisch bedeutet dies, dass das elektrische Feld eine Einschiebung eines Leiters parallel zur Feldrichtung nicht bemerkt. Die Normalkomponenten  $\vec{E}_{\perp}^{(i)}$  direkt oberhalb und unterhalb der

Grenzfläche analysieren wir mit Hilfe des Satzes von Gauss, wobei lediglich die Endflächen des Zylinders  $\partial V$  zum Oberflächenintegral beitragen

$$\int_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{f} = 4\pi Q \quad \Rightarrow \quad E_{\perp}^{(1)} - E_{\perp}^{(2)} = 4\pi\sigma \quad (2.53)$$



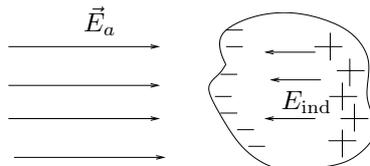
Das Tangentialfeld ist stetig, das Normalfeld springt um  $4\pi\sigma$ .

Für das skalare Potential  $\phi$  bedeutet das im Grenzfall  $\vec{x}_1 - \vec{x}_2 \rightarrow 0$  mit  $\vec{x}^{(1)}$  oberhalb und  $\vec{x}^{(2)}$  unterhalb der Platte, dass die verschwindende Differenz in der orthogonalen Koordinate nicht durch das Verhalten des ebenfalls orthogonalen Feldes  $\vec{E}_{\perp}$  kompensiert wird,

$$\phi^{(1)} - \phi^{(2)} = - \int_{\vec{x}_1}^{\vec{x}_2} \vec{E}(\vec{x}') \cdot d\vec{x}' = 0 \quad (2.54)$$

Das Potential ist entlang einer Grenzfläche also stetig.

Wir können diese Betrachtungen von Randbedingungen nun auf elektrische Leiter anwenden. Ein Leiter ist definiert also ein Material mit frei beweglichen Ladungsträgern, zum Beispiel Elektronen in Metallen oder Ionen in leitenden Flüssigkeiten. Als Gedankenexperiment bringen wir einen Leiter in ein äußeres Feld  $\vec{E}_a$



Wenn das äußere Feld in den Leiter eindringt, dann induziert es Ladungen auf der Oberfläche. Deren induziertes Feld  $\vec{E}_{\text{ind}}$  wirkt dem äußeren Feld  $\vec{E}_a$  entgegen. Sobald sich ein Gleichgewicht einstellt und die Ladungen sich (im Mittel) nicht mehr bewegen, muss im Inneren des Leiters gelten

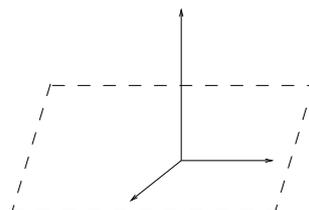
$$\vec{E}_{\text{ges}} = \vec{E}_a + \vec{E}_{\text{ind}} = 0 \quad (2.55)$$

Daraus folgt sofort:

- Wegen  $0 = \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho$  gibt es im Inneren des Leiters keine Nettoladungsdichte  $\rho = 0$ .
- Die gesamte Ladung des Leiters liegt auf der Oberfläche mit der Flächenladungsdichte  $\sigma = dQ/dA$ .
- Wegen  $0 = \vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$  ist der Leiter eine Äquipotentialregion mit konstantem  $\phi|_{\text{Leiter}}$ . Bei einem geerdeten Leiter ist  $\phi|_{\text{Leiter}} = 0$ .

Auf der Oberfläche des Leiters verschwindet wie vorher besprochen wegen  $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$  die Tangentialkomponente des elektrischen Feldes,  $\vec{E}_{\parallel} = 0$ . Die Normalkomponenten  $\vec{E}_{\perp}$  springen wegen der Flächenladung auf der Oberfläche des Leiters um  $4\pi\sigma$ . Dies sind die Randbedingungen, wenn wir die Grundgleichungen der Elektrostatik in Gegenwart eines Leiters lösen wollen.

Zur Berechnung von  $\vec{E}$  und  $\phi$  in Gegenwart eines Leiters können wir die Methode der Spiegelbildungen nutzen. Hierzu betrachten wir eine Punktladung  $q$  im Abstand  $d$  von einer leitenden, geerdeten, unendlich ausgedehnten Platte.



Ausgehend von der Randbedingung  $\phi = 0$  bei  $z = 0$  lösen wir für  $z > 0$  die Poisson-Gleichung

$$\Delta\phi = -4\pi\rho(\vec{x}) = -4\pi q \delta(x=0)\delta(y=0)\delta(z=d) \quad (2.56)$$

Nach dem allgemeinem Satz ist die Lösung dieser Gleichung eindeutig, so dass es genügt eine Lösung zu finden.

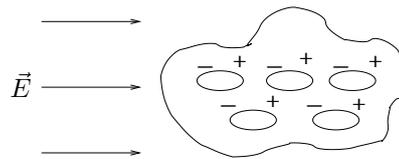
Statt die induzierte Ladung auf der Platte explizit zu berücksichtigen, ersetzen wir die Platte durch eine fiktive Ladung  $-q$  an der Stelle  $z = -d$ . Das System aus der Punktladung  $q$  und der Spiegelladung  $-q$  erfüllt offensichtlich

$$\phi(z=0) = 0 \quad \text{und} \quad \Delta\phi \Big|_{z>0} = 4\pi\rho \quad (2.57)$$

Details zu dieser Methode diskutieren wir in der Übung. Wichtig ist, dass die Ladung und die Spiegelladung zusammen die Äquipotentialfläche des Leiters definieren müssen.

## 2.5 Elektrostatik von Dielektrika

Neben Leitern gibt es noch eine zweite Art von Materialien, sogenannte Nichtleiter, Isolatoren, oder Dielektrika. In ihnen sind Ladungsträger so gebunden, dass sie sich nicht frei bewegen können. Wieder starten wir mit einem Gedankenexperiment eines Dielektrikums im äußeren Feld  $\vec{E}$ .



In diesem Fall treten induzierte Polarisationsladungen auf.

- Zur elektronische Polarisation betrachten wir ein neutrales, nicht polarisiertes Atom. Das Feld  $\vec{E}$  induziert eine Verschiebung der positiven und negativen Ladungsschwerpunkte, und das Atom wird zum Dipol mit dem Dipolmoment

$$\vec{p} = \vec{p}(\vec{E}) \quad (2.58)$$

In einem Atom richtet sich  $\vec{p}$  parallel zu  $\vec{E}$  in dieselbe Richtung aus. Wir machen in Abwesenheit besserer Ideen natürlich ein Taylorentwicklung

$$\vec{p} = \alpha\vec{E} + \mathcal{O}(\vec{E}^2) \quad (2.59)$$

die die atomare Polarisierbarkeit  $\alpha$  definiert. Für Moleküle ist die entsprechende anisotrope Polarisierbarkeit ein Tensor

$$p_i = \alpha_{ij}E_j + \mathcal{O}(E^2) \quad (2.60)$$

- Eine Orientierungspolarisation entsteht für polare Moleküle, die auch ohne äußeres Feld ein Dipol-Moment und im allgemeinen auch höheres Multipol-Momente besitzen. Aufgrund des Drehmomentes  $\vec{D} = \vec{p} \times \vec{E}$  richtet sich das Dipol-Moment tendentiell entlang von  $\vec{E}$  aus.

Die Polarisation  $\vec{E}_{\text{pol}}$  hat die folgenden Konsequenzen

- Das äußere Feld wird abgeschwächt.
- Auf sehr kleinen Abständen variiert das mikroskopische Feld sehr stark.

- Auf großen Abständen stellt sich im Mittel ein makroskopisches Feld ein.

Wir können die Polarisation  $\vec{E}_{\text{pol}}$  beziehungsweise das entsprechende skalar Potential  $\phi_{\text{pol}}$  in der Multipol-Entwicklung berechnen. Die erste nichtverschwindende Ordnung ist der Dipol. Das gesamte Dipol-Moment des eines Volumens  $V$  ist

$$\vec{p} = \int_V d^3x' \vec{P}(\vec{x}') \quad (2.61)$$

mit der Polarisierung  $\vec{P}(\vec{x})$  als dem Dipol-Moment pro Einheitsvolumen. Wenn wir nur den Dipol berücksichtigen, dann gilt für das Potential aufgrund der induziertes Polarisierung mit Hilfe einer partiellen Integration

$$\begin{aligned} \phi_{\text{pol}}(\vec{x}) &= \int_V d^3x' \frac{\vec{P}(\vec{x}') \cdot (\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} \\ &= \int_V d^3x' \vec{P}(\vec{x}') \cdot \vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \\ &= - \int_V d^3x' \vec{\nabla}' \cdot \vec{P}(\vec{x}') \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} + \int_{\partial V} \frac{\vec{P}(\vec{x}') \cdot d\vec{f}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \end{aligned} \quad (2.62)$$

Physikalisch beschreibt im ersten Term  $\rho_b(\vec{x}') \equiv -\vec{\nabla}' \cdot \vec{P}(\vec{x}')$  die gebundene Volumenladungsdichte aufgrund der Polarisierung. Im zweiten Term ist  $\sigma_b(\vec{x}') \equiv \vec{P}(\vec{x}') \cdot \hat{n}$  die induzierte Oberflächenladungsdichte. Wenn möglich, dann stellen wir uns Oberflächen endlicher Dichte von großen Körpern vor, so dass wir  $\sigma_b$  vernachlässigen können und nur  $\rho_b$  berücksichtigen müssen.

Das gesamte elektrische Feld oder Potential innerhalb eines Körpers wird durch die gesamte Ladungsdichte  $\rho_b + \rho_f$  beschrieben. Hier bezeichnet  $\rho_f$  allgemein freie Ladungen, die nicht aus Polarisierung entstehen. In der Abwesenheit von Oberflächen-Effekten erfüllt das makroskopische Gesamtfeld im Gleichgewicht in der Dipol-Näherung die Bedingung

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{x}) &= 4\pi (\rho_b(\vec{x}) + \rho_f(\vec{x})) = -4\pi \vec{\nabla} \cdot \vec{P}(\vec{x}) + 4\pi \rho_f(\vec{x}) \\ \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot (\vec{E}(\vec{x}) + 4\pi \vec{P}(\vec{x})) &= 4\pi \rho_f(\vec{x}) \end{aligned} \quad (2.63)$$

Die elektrische Verschiebung  $\vec{D}(\vec{x})$  ist definiert über

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{D}(\vec{x}) = 4\pi \rho_f(\vec{x})} \quad \text{oder} \quad \int_{\partial V} \vec{D}(\vec{x}) \cdot d\vec{f} = 4\pi Q_f \quad (2.64)$$

und hat nach unserer Abschätzung in der führenden Dipolordnung die Form

$$\vec{D}(\vec{x}) = \vec{E}(\vec{x}) + 4\pi \vec{P}(\vec{x}) \quad (2.65)$$

Diese Gleichungen entspricht nicht vollständig der ähnlichen Maxwell-Gleichung, denn im allgemeinen gilt zwar  $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$ , aber  $\vec{\nabla} \times \vec{P} \neq 0$ . Es ist also  $\vec{\nabla} \times \vec{D} \neq 0$  und damit  $\vec{D}$  kein Gradientenfeld.

Wir können versuchen die Gleichung für die elektrische Verschiebung zu vereinfachen, indem wir wie vorher für das Dipol-Moment einen möglichen Zusammenhang zwischen  $\vec{E}$  und  $\vec{P}$  berücksichtigen.

- Im allgemeinen ist  $\vec{P}(\vec{x}) = \vec{P}(\vec{x}, \vec{E})$ .
- Für kleine Feldstärken können wir die Polarisierung Taylor-entwickeln

$$\vec{P}(\vec{x}) = \chi(\vec{x}) \cdot \vec{E}(\vec{x}) + \mathcal{O}(\vec{E}^2) \quad (2.66)$$

mit dem Suzeptibilitätstensor  $\chi(\vec{x})$ .

- In linearer Näherung ist  $P_i = \chi_{ij} E_j$ , aber in nichtlinearen Medien muss man bei hohen Feldstärken wie zum Beispiel in der Quantenoptik starker Laser auch höhere Terme berücksichtigen.

- Für isotropen Medien ist  $\vec{P} \parallel \vec{E}$  und in linearer Ordnung  $\vec{P}(\vec{x}) = \chi(\vec{x})\vec{E}(\vec{x})$ . Für homogene, isotrope Medien ist in linearer Ordnung  $\vec{P}(\vec{x}) = \chi\vec{E}(\vec{x})$ , mit der elektrischen Suszeptibilität  $\chi$ . In dieser Näherung ist also

$$\vec{D}(\vec{x}) = \vec{E}(\vec{x}) + 4\pi\vec{P}(\vec{x}) = (1 + 4\pi\chi) \vec{E}(\vec{x}) \equiv \epsilon\vec{E}(\vec{x})$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{x}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{x}) = \frac{4\pi\rho_f(\vec{x})}{\epsilon}} \quad (2.67)$$

mit dem Dielektrizitätskoeffizient  $\epsilon$  als Materialkonstante. Die relevante Ladungsdichte wird also durch die Abschirmung durch die Polarisation auf das  $1/\epsilon$ -fache reduziert. In diesem Bild ist das Vakuum ein homogener Spezialfall  $\epsilon = 1$  in linearer Ordnung.

### 3 Magnetostatik

Ganz analog zu unserer Betrachtung des zeitunabhängigen elektrischen Feldes betrachten wir nun zeitunabhängige Magnetfelder. Wie wir aus der vorhergenommenen Struktur der Maxwell-Gleichungen wissen, sind Elektrostatik und Magnetostatik trennbar. Die vereinheitlichte Theorie entsteht erst, wenn wir Dynamik oder Zeitabhängigkeit berücksichtigen. Wir beginnen wieder mit der Struktur des Magnetfeldes und den entsprechenden Grundgleichungen der Magnetostatik.

Das Magnetfeld  $\vec{B}(\vec{x})$  ist die Eigenschaft der Raumzeit, dass auf eine mit Geschwindigkeit  $\vec{v}$  bewegte Testladung  $q$  die (empirisch begründete) Lorentz-Kraft

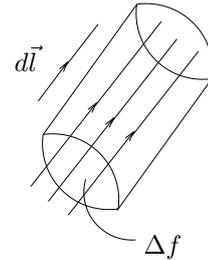
$$\vec{F} = q \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B} \quad (3.1)$$

wirkt. Da für die Lorentz-Kraft  $\vec{F} \perp \vec{v}$  gilt, bleibt  $|\vec{v}|$  unter dieser Krafteinwirkung konstant, und es wird keine Arbeit verrichtet.

Wir untersuchen die Eigenschaften des Magnetfeldes im Hinblick darauf, dass Magnetfelder  $\vec{B}$  durch bewegte Ladungen oder Ströme erzeugt werden

$$I = \frac{dQ}{dt} \quad (3.2)$$

Die Flussrichtung der Ladung definiert die Richtung des Stromes, die technische Stromrichtung ist die Richtung der positiven Ladung.



Wir betrachten einen Strom  $I$  durch das Volumen  $\Delta V$  mit der skalaren Querschnittsfläche  $\Delta f$  und der Länge  $\Delta l$ . Die Volumenstromdichte  $\vec{j}$  ist dann definiert als

$$\vec{j} = \frac{I}{\Delta f \Delta l} d\vec{l} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{j}(\vec{x}, t) dV = I d\vec{l} \quad (3.3)$$

Wir erinnern uns, dass für eine orthogonale Zerlegung in Fläche und Länge die Richtung des Flächenvektors und des Längensvektors identisch sind. Der Vektoranteil dieser Relation ist dann trivial. In der integrierten Form ersetzen wir das Volumenintegral  $dV$  durch ein infinitesimales Längenelement und ein infinitesimales Flächenelement. Allgemein ist der Strom  $I$  durch eine endliche Fläche  $\partial V$  also

$$I = \int_{\partial V} \vec{j}(\vec{x}, t) \cdot d\vec{f} \quad (3.4)$$

Die Zunahme oder Abnahme der Ladung in  $V$  pro Zeiteinheit aufgrund dieses Stroms haben wir als Teil der Elektrostatik nicht behandelt, weil wir keine beweglichen Ladungen behandelt haben. Da wir an dieser Stelle den Strom einführen folgt für die Ladungserhaltung

$$\begin{aligned} I &= \int_{\partial V} \vec{j}(\vec{x}, t) \cdot d\vec{f} \\ &= -\frac{dQ}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_V \rho(\vec{x}, t) dV = -\int \frac{\partial \rho(\vec{x}, t)}{\partial t} dV \end{aligned} \quad (3.5)$$

Im letzten Schritt nehmen wir ein unbewegliches Volumen  $V$  an. Der Nettostrom durch die Oberfläche  $\partial V$  ist wegen des Satzes von Gauss aber auch durch

$$I = \int_{\partial V} \vec{j}(\vec{x}, t) \cdot d\vec{f} = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{x}, t) dV \quad (3.6)$$

gegeben. Aus der Kombination dieser beiden Ausdrücke ergibt sich die Kontinuitätsgleichung

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{x}, t) = -\frac{\partial \rho(\vec{x}, t)}{\partial t}} \quad (3.7)$$

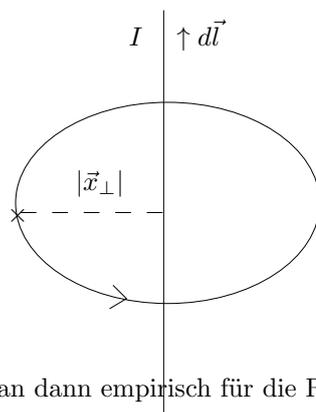
Sie garantiert die Erhaltung der elektrischen Ladung.

Nachdem wir Strom als Quelle von Magnetfeldern beschreiben können, leiten wir nun die Grundgleichungen der Magnetostatik her. Wir beschränken uns auf stationäre Ströme, also zeitlich unveränderlichen Ladungsfluss ohne Anhäufung von Ladungsdichten, Dann gilt

$$\vec{j}(\vec{x}, t) \equiv \vec{j}(\vec{x}) \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial t} \rho(\vec{x}, t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{x}) = 0 \quad (3.8)$$

Betrachten wir einen stationären Strom  $I$  durch einen idealerweise unendlich langen, geraden Leiter. Das induzierte  $\vec{B}$ -Feld bestimmt man durch die Messung der Kraft auf einen Testleiter. Hierzu kennen wir das Kraftgesetz für die infinitesimale Lorentz-Kraft, das wir mit  $\vec{j}(\vec{x}, t) = \rho(\vec{x}) \vec{v}(\vec{x}, t)$  schreiben können als

$$d\vec{F} = dq \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B} = \rho dV \frac{\vec{j}}{c\rho} \times \vec{B} = \frac{I}{c} d\vec{l} \times \vec{B} \quad (3.9)$$



Für unserer vorgegebene Geometrie findet man dann empirisch für die Richtung des Magnetfeldes

$$\vec{B}(\vec{x}) \sim \hat{l} \times \vec{x}_\perp \equiv \vec{e}_\varphi \quad (3.10)$$

die Rechte-Hand-Regel. Ausserdem findet man das Abstandsabhängigkeit

$$B(\vec{x}) \propto \frac{I}{|\vec{x}_\perp|} \quad \Rightarrow \quad B(\vec{x}) \propto \frac{I}{|\vec{x}_\perp|} \vec{e}_\varphi \quad (3.11)$$

Die Messung der Lorentz-Kraft auf den Probeleiter legt die verbleibende Proportionalitätskonstante fest

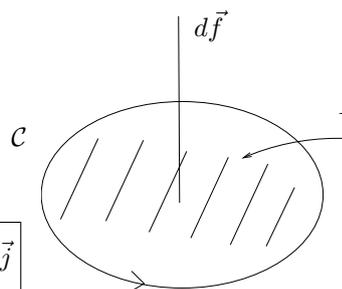
$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{2}{c} \frac{I}{|\vec{x}_\perp|} \vec{e}_\varphi \quad (3.12)$$

Die Richtung des Magnetfeldes legt es nahe, das Magnetfeld entlang eines Kreises  $\partial F$  in einem kleinen Abstand  $|\vec{x}_\perp|$  aufzuintegrieren. Wir finden für das geschlossene Integral

$$\begin{aligned} \oint_{\partial F} \vec{B}(\vec{x}) \cdot d\vec{x} &= \oint_{\partial F} |\vec{B}(\vec{x})| |d\vec{x}| \\ &= 2\pi |\vec{x}_\perp| \frac{2}{c} \frac{I}{|\vec{x}_\perp|} = 2\pi \frac{2}{c} I = \frac{4\pi}{c} \int_F \vec{j} \cdot d\vec{f} \end{aligned} \quad (3.13)$$

Nach dem Satz von Stokes gilt

$$\int_{\partial F} \vec{B}(\vec{x}) \cdot d\vec{x} = \int_F (\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{x})) \cdot d\vec{f} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{x}) = \frac{4\pi}{c} \vec{j}} \quad (3.14)$$



Diese Maxwell-Gleichung ist das Gesetz von Ampère in differentieller Form. Wir schreiben das Argument des Magnetfeldes explizit, um klarzustellen dass es keine Zeitabhängigkeit gibt.

Empirisch ist es weiterhin so, dass in der Natur keine magnetischen Monopole gefunden. Magnetfeldlinien haben keinen also kein Anfang oder Ende, oder

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{x}) = 0} \quad (3.15)$$

Dies ist die zweite Maxwell-Gleichung der Magnetostatik.

### 3.1 Vektorpotential

Entsprechend unserer Diskussion der mathematischen Grundlagen wissen wir, dass für ein divergenzfreies Vektorfeld  $\vec{B}(\vec{x})$  ein Vektorpotential  $\vec{A}(\vec{x})$  existiert, so dass

$$\vec{B}(\vec{x}) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{x}) \quad (3.16)$$

Hier ist  $\vec{A}(\vec{x})$  nicht eindeutig, denn  $\vec{A}'(\vec{x}) = \vec{A}(\vec{x}) + \vec{\nabla}\chi(\vec{x})$  mit einem beliebigen Skalarfeld  $\chi(\vec{x})$  ist immer auch ein Vektorpotential für  $\vec{B}(\vec{x})$ . Diese Transformation

$$\boxed{\vec{A}(\vec{x}) \rightarrow \vec{A}'(\vec{x}) = \vec{A}(\vec{x}) + \vec{\nabla}\chi(\vec{x})} \quad (3.17)$$

ist eine Eichtransformation und lässt die Physik invariant. Wir können diese Freiheit nutzen und ohne Beschränkung der Allgemeinheit für das Vektorpotential fordern dass

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}'(\vec{x}) = 0. \quad (3.18)$$

Diese Bedingung heißt Coulomb-Eichung.

Zum Beweis dieser Eigenschaft nehmen wir stattdesse an dass

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}'(\vec{x}) = f(\vec{x}) \neq 0 \quad (3.19)$$

Wir transformieren dann

$$\vec{A}'(\vec{x}) = \vec{A}(\vec{x}) + \vec{\nabla}\chi(\vec{x}) \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{A}'(\vec{x}) = f(\vec{x}) + \Delta\chi(\vec{x}) \quad (3.20)$$

Nehmen wir nun an dass für das alternative Potential  $\vec{A}'$  die Eichbedingung erfüllt sei. Dann gibt es ein  $\chi(\vec{x})$ , mit

$$\Delta\chi(\vec{x}) = -f(\vec{x}) \quad (3.21)$$

Diese Poisson-Gleichung erlaubt immer eine Lösung. Diese ist eindeutig sofern  $\chi(\vec{x}) \sim 1/|\vec{x}|^{1/2+\epsilon}$  für  $|\vec{x}| \rightarrow \infty$ . Das heißt  $\chi(\vec{x})$  ist bis auf weniger stark abfallende Lösungen eindeutig bestimmt. Anders ausgedrückt legt die Eichbedingung die Funktion  $\chi$  fest, bis auf Lösungen von  $\Delta\chi = 0$ , die weniger stark als  $1/|\vec{x}|^{1/2+\epsilon}$  abfallen.

Mit Hilfe des Vektorpotentials, das garantiert dass eine der beiden Maxwell-Gleichungen erfüllt ist, können wir nun die zweite Maxwell-Gleichung lösen.

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{x}) &= \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{x})) = \underbrace{\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{x}))}_{=0} - \Delta\vec{A}(\vec{x}) \\ &= \frac{4\pi}{c} \vec{j}(\vec{x}) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta\vec{A}(\vec{x}) = -\frac{4\pi}{c} \vec{j}(\vec{x})} \end{aligned} \quad (3.22)$$

Dies ist wieder eine Poisson-Gleichung. Für unendliches Volumen mit  $\vec{j}(\vec{x}) \sim |\vec{x}|^{-(2+\epsilon)}$  für  $|\vec{x}| \rightarrow \infty$  können wir die Poisson-Gleichung wieder mit Hilfe der Green-Funktion lösen und erhalten

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{1}{c} \int_V d^3x' \frac{\vec{j}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \quad \Rightarrow \quad \vec{B}(\vec{x}) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{x}) = \frac{1}{c} \int_V d^3x' \vec{\nabla} \times \frac{\vec{j}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \quad (3.23)$$

In endlichen Volumina kommen zu der Lösung noch Randterme hinzu, aber wir haben uns ja vorgenommen, wenn möglich Systeme unendlicher Ausdehnung zu betrachten. Im Integranden können wir die Rotation mit Hilfe der Produktregel und  $\vec{\nabla} \times \vec{j}(\vec{x}) = 0$  vereinfachen und erhalten das Gesetz von Biot-Savart

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times (\vec{v}(\vec{x}) f(\vec{x})) &= (\vec{\nabla} \times \vec{v}(\vec{x})) f(\vec{x}) + (\vec{\nabla} f(\vec{x})) \times \vec{v}(\vec{x}) \\ \Rightarrow \quad \vec{\nabla} \times \frac{\vec{j}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} &= (\vec{\nabla} \times \vec{j}(\vec{x}')) \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} - \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} \times \vec{j}(\vec{x}') \\ &= \vec{j}(\vec{x}') \times \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} \\ \Rightarrow \quad \vec{B}(\vec{x}) &= \frac{1}{c} \int_V d^3x' \frac{\vec{j}(\vec{x}') \times (\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} \end{aligned} \quad (3.24)$$

## 3.2 Multipol-Entwicklung

Wieder analog zur Elektrostatik entwickeln wir unser Magnetfeld in einer Multipol-Entwicklung. Eine lokalisierte Stromverteilung  $\vec{j}(\vec{x}')$  entwickeln wir dazu um den Ursprung

$$\begin{aligned} \vec{A}(\vec{x}) &= \frac{1}{c} \int d^3x' \vec{j}(\vec{x}') \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \\ &= \frac{1}{c} \int d^3x' \vec{j}(\vec{x}') \left( \frac{1}{|\vec{x}|} + \frac{\vec{x} \cdot \vec{x}'}{|\vec{x}|^3} + \dots \right) \\ &= \frac{1}{c} \frac{1}{|\vec{x}|} \int d^3x' \vec{j}(\vec{x}') + \frac{1}{c} \frac{1}{|\vec{x}|^3} \int d^3x' \vec{j}(\vec{x}') (\vec{x} \cdot \vec{x}') + \dots \\ &\equiv \vec{A}^{(0)} + \vec{A}^{(1)} + \dots \end{aligned} \quad (3.25)$$

Diese Terme haben wieder eine physikalische Interpretation

- $\vec{A}^{(0)}$ : Für eine lokalisierte Stromverteilung ist

$$\int d^3x' \vec{j}(\vec{x}') = 0 \quad (3.26)$$

Ansonsten würde Strom aus dem oder in das Gebiet fließen. Diese Bedingung ist äquivalent zur Abwesenheit magnetischer Monopole.

- $\vec{A}^{(1)}$ : Wir definieren das magnetische Dipol-Moment als

$$\begin{aligned} \vec{\mu} &= \frac{1}{2c} \int d^3x' \vec{x}' \times \vec{j}(\vec{x}') \quad \Rightarrow \quad \vec{A}^{(1)}(\vec{x}) = \frac{\vec{\mu} \times \vec{x}}{|\vec{x}|^3} \\ &\Rightarrow \quad \vec{B}^{(1)}(\vec{x}') = \vec{\nabla} \times \vec{A}^{(1)}(\vec{x}) = \frac{3\vec{x}(\vec{x} \cdot \vec{\mu}) - \vec{\mu}|\vec{x}|^2}{|\vec{x}|^5} \end{aligned} \quad (3.27)$$

Wir beweisen diese Form des Vektorpotentials, indem wir die Gleichung in Komponenten ausschreiben. Wir beginnen mit der Divergenzfreiheit der Stromdichte in der Abwesenheit von Ladungen, also  $\vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{x}) = 0$ . Wir erhalten damit zuerst

$$\vec{\nabla}' \cdot (x'_i \vec{j}(\vec{x}')) = \vec{j}_i(\vec{x}') + x'_i \vec{\nabla}' \cdot \vec{j}(\vec{x}') = \vec{j}_i(\vec{x}') \quad (3.28)$$

Diese Relation nutzen wir aus und erhalten mit einer partiellen Integration

$$\begin{aligned} \int d^3x' j_i(\vec{x}') x_k x'_k &= \int d^3x' (\partial'_m x'_i j_m(\vec{x}')) x_k x'_k \\ &= \text{Randterme} - x_k \int d^3x' x'_i j_m(\vec{x}') \underbrace{\partial'_m x'_k}_{\delta_{mk}} = - \int d^3x' x'_i \vec{x} \cdot \vec{j}(\vec{x}') \\ \Rightarrow \int d^3x' \vec{j}(\vec{x}') \vec{x} \cdot \vec{x}' &= \frac{1}{2} \int d^3x' [\vec{x} \cdot \vec{x}' \vec{j}(\vec{x}') - \vec{x}' \vec{x} \cdot \vec{j}(\vec{x}')] \\ &= -\frac{1}{2} \int d^3x' [\vec{x} \times (\vec{x}' \times \vec{j}(\vec{x}'))] = -\frac{1}{2} \vec{x} \times \int d^3x' \vec{x}' \times \vec{j}(\vec{x}') \end{aligned}$$

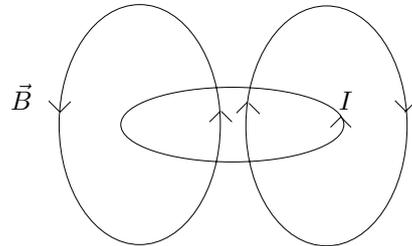
Wieder berechnen wir eine einfache Anwendung der Multipol-Entwicklung, diesmal in der Magnetostatik. Wir betrachten das Dipolmoment eines geladenen Rotators, also eines starren Körper der Masse  $m$  mit der Ladung  $q$  und mit einem Drehimpuls  $\vec{L}$ . Das magnetische Dipolmoment und das gyromagnetische Verhältnis sind dann (wie wir in der Übung besprechen)

$$\vec{\mu} = \frac{q}{2mc} \vec{L} \quad \Rightarrow \quad \frac{|\vec{\mu}|}{|\vec{L}|} = \frac{q}{2mc} \quad (3.29)$$

Nur als Randbemerkung: Auch der quantenmechanische Eigendrehimpuls oder Spin  $\vec{S}$  eines Elementarteilchens führt zu einem Dipolmoment

$$\vec{\mu} = g \cdot \frac{q}{2mc} \vec{S} \quad (3.30)$$

mit  $g \approx 2$ . Dieser Wert wird durch Quantenkorrekturen modifiziert und gehört zu den am besten gemessenen Observablen in der Physik.



Ein weiterer Dipol, nämlich eine Ampère-Leiterschleife besteht aus einem Leiter um die Fläche  $A$  und mit dem Strom  $I$ . Ebenfalls in der Übung 4 zeigen wir dass ihr Dipolmoment nach der Rechten-Hand-Regel

$$\vec{\mu} = \frac{1}{c} I \vec{A} \quad (3.31)$$

beträgt. Hier existieren höhere Multipol-Momente, aber für kleine  $|\vec{A}|$  ist das Dipolfeld eine gute Näherung. Beide Systeme sind Beispiele für experimentell realisierte magnetische Dipole.

Im äußeren  $\vec{B}$ -Feld erfährt ein magnetischer Dipol ein Drehmoment. Für ein homogenes  $\vec{B}$ -Feld kann man seine Form mit dem Drehmoment auf einen elektrischen oder physikalischen Dipol vergleichen

$$\vec{D} = \vec{\mu} \times \vec{B} \quad \text{oder analog elektrostatisch} \quad \vec{D} = \vec{p} \times \vec{E} \quad (3.32)$$

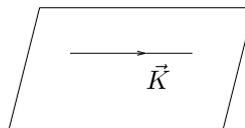
Ebenfalls erfährt im homogenen  $\vec{B}$ -Feld der magnetische Dipol die Kraft, die man wieder mit der Kraft auf einen elektrischen Dipol vergleichen kann

$$\vec{F} = \vec{\nabla}(\vec{\mu} \cdot \vec{B}) \quad \text{oder analog elektrostatisch} \quad \vec{F} = \vec{\nabla}(\vec{p} \cdot \vec{E}) \quad (3.33)$$

Wie für elektrostatische Randbedingungen können wir auch magnetostatische Randbedingungen an einer Grenzfläche mit Oberflächenstromdichte  $\vec{K}$  betrachten

$$\vec{K} = \frac{I}{\Delta d} \frac{d\vec{l}}{dl} \quad (3.34)$$

mit der Querschnittsdichte  $\Delta d$ .



Wieder teilen wir das Feld in eine Tangentialkomponente und eine Orthogonal Komponente auf und finden

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 & \Rightarrow \vec{B}_{\perp}^{(1)} = \vec{B}_{\perp}^{(2)} \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} & \Rightarrow \vec{B}_{\parallel}^{(1)} - \vec{B}_{\parallel}^{(2)} = \frac{4\pi}{c} \vec{K} \end{aligned} \quad (3.35)$$

### 3.3 Magnetostatik in Materie

Die Diskussion von Materie-Effekten im Zusammenhang mit Magnetfeldern folgt ebenfalls der entsprechenden Diskussion von elektrischen Feldern: Im äußeren Magnetfeld  $\vec{B}_a$  entwickelt sich eine Magnetisierung der Materie durch zwei entgegengesetzte Effekte, von denen einer je nach Medium dominiert:

- Beim Paramagnetismus führen Spin und Bahndrehimpuls der Elektronen in den Atomen/Molekülen zu magnetischen Dipol-Momenten  $\vec{\mu}$ . Ohne äußeres Feld mittelt sich das gesamte Dipol-Moment aus. Mit äußerem Feld  $\vec{B}_a \neq 0$  führt das Drehmoment  $\vec{D} = \vec{\mu} \times \vec{B}_a$  zur kollektiven Ausrichtung der elementaren Dipole  $\vec{\mu}_p \parallel \vec{B}_a$ . Das führt zu einer Magnetisierung

$$\vec{M} = \frac{\text{magn. Dipolmoment}}{\text{Volumen}} \quad (3.36)$$

Wenn man die Ausrichtung der Felder genau ansieht, dann stellt sich heraus, dass das induzierte Feld  $\vec{B}_M$  das äußere Feld verstärkt.

Wegen des Pauli-Prinzips hebt sich der Drehimpuls von je zwei Elektronen in einem Atom auf. Ein Netto-Effekt bleibt nur bei Medien mit ungerader Elektronenzahl. Dies definiert paramagnetische Substanzen.

- Ein stark vereinfachtes klassisches Modell des Diamagnetismus beruht darauf, dass ein äußeres Magnetfeld  $\vec{B}_a$  zu Präzessionen der Elektronenbewegung um Atomkerne mit der Larmofrequenz

$$\vec{\omega} = \frac{e}{2mc} \vec{B} \quad (3.37)$$

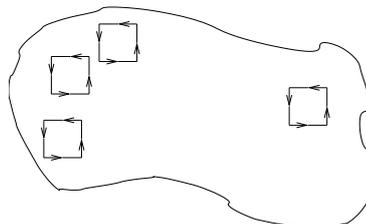
führt. Der induzierte Strom führt zu einem magnetischen Dipol-Feld  $\vec{\mu}_d$  (und höheren Multipolen) mit  $\vec{\mu} \parallel -\vec{B}_a$ , also zu einer Schwächung des Feldes.

Wie für die Elektrostatik im Medium berechnet man das makroskopische induzierte Feld aufgrund der Magnetisierung  $\vec{M}$  in Dipol-Näherung. Die Volumenstromdichte durch Magnetisierung ist

$$\vec{j}_b = \vec{\nabla} \times \vec{M} \quad (3.38)$$

Die Oberflächenstromdichte ist

$$\vec{K}_b = \vec{M} \times \hat{n} \quad (3.39)$$



Das Gesamt-Feld im Inneren des Mediums hat die induzierte und die freie Stromdichte als Quellen und ergibt in der Dipol-Näherung

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{B} &= \frac{4\pi}{c}(\vec{j}_b + \vec{j}_{\text{frei}}) \\ \vec{\nabla} \times \left(\vec{B} - \frac{4\pi}{c}\vec{M}\right) &= \frac{4\pi}{c}\vec{j}_{\text{frei}}\end{aligned}\quad (3.40)$$

Wir definieren also ein magnetisches Hilfsfeld durch

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}_{\text{frei}}} \quad \Rightarrow \quad \vec{H} = \vec{B} - \frac{4\pi}{c}\vec{M}\quad (3.41)$$

Konventionellerweise entwickelt man wieder die Magnetisierung entlang des Feldes  $\vec{H}$ ,

$$\vec{M}(\vec{H}) = \chi_m \vec{H} + \mathcal{O}(H^2) \quad \Rightarrow \quad \vec{B} \approx \left(1 + \frac{4\pi}{c}\chi_m\right) \vec{H} \equiv \mu \vec{H}\quad (3.42)$$

mit der magnetischen Suszeptibilität  $\chi_m$  und der Permeabilitätszahl  $\mu$ . Entsprechend der Definition von Paramagnetismus und Diamagnetismus kann die magnetische Suszeptibilität beide Vorzeichen annehmen.

Die modifizierte Form der Maxwell-Gleichungen ist

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c}\mu \vec{j}_f \quad \text{und} \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = 0\quad (3.43)$$

Für paramagnetische Substanzen ist  $\chi_m > 0$  und  $\mu > 1$ , für diamagnetische Substanzen  $\chi_m < 0$  und  $\mu < 1$ .

## 4 Elektromagnetismus

Basierend auf den diversen Gesetzen der Elektrostatik und Magnetostatik können wir nun die beiden Theorien dynamisch, also zeitabhängig auffassen und miteinander kombinieren. Wir beginnen mit den vier bekannten Gleichungen für die elektrischen und magnetischen Felder

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= 4\pi\rho & \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 & \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \frac{4\pi}{c} \vec{j}\end{aligned}\quad (4.1)$$

Hier besteht die einzige Zeitabhängigkeit darin, dass wir zeitabhängige Magnetfelder mit der Rotation des elektrischen Feldes verknüpft haben. Ein allgemeiner Übergang zu zeitlich veränderlichen Feldern erfordert auch zeitlich veränderliche Quellen  $\rho(\vec{x}, t)$  und  $\vec{j}(\vec{x}, t)$ . Diese müssen wegen der Ladungserhaltung die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{j}\quad (4.2)$$

erfüllen. Allerdings wissen wir aus den bekannten Gleichungen der Elektrostatik und Magnetostatik dass

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} \rho(\vec{x}, t) &= \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{4\pi} \vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{x}, t) &= \frac{c}{4\pi} \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{x}, t)) = 0\end{aligned}\quad (4.3)$$

Ladung ist also hier nicht erhalten. Maxwells Idee war es, die Gleichung für die Rotation des Magnetfeldes zu ersetzen

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{x}, t) = \frac{4\pi}{c} \vec{j}(\vec{x}, t) + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}(\vec{x}, t)}{\partial t}}\quad (4.4)$$

Damit reproduzieren wir die Kontinuitätsgleichung

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{x}, t) = \frac{c}{4\pi} \left[ \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \right] = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -\frac{\partial \rho(\vec{x}, t)}{\partial t}\quad (4.5)$$

An dieser Stelle sehen wir, dass in den Maxwell-Gleichungen eine Zeitableitung immer mit einem Vorfaktor  $1/c$  verknüpft ist. Alternativ können wir in Integralform schreiben

$$\int_C \vec{B} \cdot d\vec{s} = \frac{4\pi}{c} I + \frac{1}{c} \underbrace{\int_A \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{f}}_{\text{Verschiebestrom}} \quad \begin{array}{c} \vec{E} \\ \uparrow \uparrow \uparrow \\ \bullet \quad \bullet \quad \bullet \\ \downarrow \downarrow \downarrow \\ C \end{array}\quad (4.6)$$

Die einigermaßen offensichtliche Frage ob es auch einen Verschiebestrom bei einer zeitlichen Änderung der Fläche  $A$  gibt, ähnlich wie bei Induktion, beantwortet die spezielle Relativitätstheorie.

### 4.1 Potentiale und Eichinvarianz

Wie schon in der Elektrostatik und Magnetostatik können wir die homogene Maxwell-Gleichung für das Magnetfeld allgemein durch den Ansatz eines Vektorpotentials lösen

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{x}, t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}\quad (4.7)$$

Hieraus folgt dann

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{x}, t) + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}(\vec{x}, t)}{\partial t} &= \vec{\nabla} \times \left[ \vec{E}(\vec{x}, t) + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}(\vec{x}, t)}{\partial t} \right] = 0 \\ \Rightarrow \quad \vec{E}(\vec{x}, t) + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}(\vec{x}, t)}{\partial t} &= -\vec{\nabla} \phi(\vec{x}, t)\end{aligned}\quad (4.8)$$

Eine Eichabhängigkeit rührt daher, dass die Beschreibung mittels  $\phi, \vec{A}$  redundant ist, weil die Felder  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  und damit die physikalischen Vorhersagen invariant sind unter den Eichtransformationen

$$\begin{aligned}\vec{A}(\vec{x}, t) &\rightarrow \vec{A}'(\vec{x}, t) = \vec{A}(\vec{x}, t) + \vec{\nabla}\chi(\vec{x}, t) \\ \phi(\vec{x}, t) &\rightarrow \phi'(\vec{x}, t) = \phi(\vec{x}, t) - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \chi(\vec{x}, t)\end{aligned}\quad (4.9)$$

In der Elektrostatik haben wir die Coulomb-Eichung  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$  genutzt, aber im folgenden werden wir sehen dass es für Elektromagnetismus eine besser geeignete Eichung gibt.

Wie immer folgen die die Gleichungen für  $\phi$  und  $\vec{A}$  nun aus den verbleibenden, inhomogenen Maxwellgleichungen

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho \quad \text{und} \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (4.10)$$

Wir erhalten also für das skalare Potential

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot \left( -\vec{\nabla}\phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = -\Delta\phi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \cdot \vec{A}. \quad (4.11)$$

Diese Form ist nicht einfach zu lösen. Allerdings können wir eine Eichbedingung fordern, die diese Gleichung vereinfacht. Diese sogenannte Lorenz-Eichung fordert

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t}} \quad (4.12)$$

und liefert uns für das skalare Potential

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -\Delta\phi + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi \quad \Rightarrow \quad \boxed{\square\phi(\vec{x}, t) = 4\pi\rho(\vec{x}, t)}, \quad (4.13)$$

mit Hilfe des D'Alembert-Operator  $\square = -\Delta + 1/c^2 \partial_t^2$ .

Wie immer müssen wir zeigen, dass diese Eichbedingung immer erreicht werden kann. Dazu nehmen wir an dass

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} = f(\vec{x}, t) \neq 0 \quad (4.14)$$

Nach einer Eichtransformation wird

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}' + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi'}{\partial t} = f(\vec{x}, t) + \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}\chi - \frac{1}{c} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \chi \quad (4.15)$$

Hier wählen wir die Eichverschiebung  $\chi$  so dass  $(\Delta - 1/c^2 \partial_t^2)\chi = -f(\vec{x}, t)$ . An dieser Stelle ersparen wir uns zu zeigen, dass dies bei der Struktur der Differentialgleichung auch immer möglich ist.

In kompletter Analogie zum skalaren Potential bekommen wir für das Vektorpotential

$$\begin{aligned}\frac{4\pi}{c} \vec{j} &= \vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ &= \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) + \frac{1}{c} \vec{\nabla} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} \\ &= -\Delta + \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) + \frac{1}{c} \vec{\nabla} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} \\ &= \left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) \vec{A} + \underbrace{\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t}}_{=0} \Leftrightarrow \boxed{\square \vec{A}(\vec{x}, t) = \frac{4\pi}{c} \vec{j}(\vec{x}, t)}\end{aligned}\quad (4.16)$$

## 4.2 Lösungen der Wellengleichung

Die beiden Gleichungen für die Potentiale

$$\square\phi(\vec{x}, t) = 4\pi\rho(\vec{x}, t) \quad \text{und} \quad \square\vec{A}(\vec{x}, t) = 4\pi\vec{j}(\vec{x}, t) \quad (4.17)$$

mit dem D'Alembert-Operator  $\square = 1/c^2\partial_t^2 - \Delta$  sind vier unabhängige lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Dank der Lorenz-Eichung sind sie alle von derselben Form. Es sind Wellengleichungen mit Quell-Termen, also Inhomogenitäten. Wir lösen exemplarisch die Gleichung für das skalare Potential  $\phi(\vec{x}, t)$ .

- Die allgemeine Lösung einer inhomogenen linearen Differentialgleichung ist ein (beliebige) Summe einer Lösung der homogenen Differentialgleichung und einer speziellen Lösung der inhomogenen Differentialgleichung, also

$$\phi(\vec{x}, t) = \phi_{\text{hom}} + \phi_{\text{spez}} \quad \text{mit} \quad \begin{aligned} \square\phi_{\text{hom}} &= 0 \\ \square\phi_{\text{spez}} &= 4\pi\rho \end{aligned} \quad (4.18)$$

- Die konkrete Lösung wird durch die Randbedingungen des Problems festgelegt. Da  $\square$  ein Differentialoperator zweiter Ordnung ist, erfordert Eindeutigkeit der Lösung die zwei Randbedingungen

$$\phi(\vec{x}, t = t_0) \quad \text{und} \quad \dot{\phi}(\vec{x}, t = t_0) \quad (4.19)$$

Im ersten Schritt lösen wir die homogenen Wellengleichung

$$\square\phi_{\text{hom}} = \left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) \phi_{\text{hom}} = 0 \quad (4.20)$$

Eine Basis im Vektorraum der zeitabhängigen Skalarfelder über  $\mathbb{R}^3$ , also der Felder  $f(\vec{x}, t)$ , ist gegeben durch die Exponentialfunktion

$$\left\{ e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}, k_i \in \mathbb{R}, \omega \in \mathbb{R} \right\} \quad (4.21)$$

Die Einschränkung auf reelle  $\vec{k}, \omega$  garantiert Normierbarkeit, also

$$\left| e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)} \right| < \infty \quad \text{für} \quad |\vec{x}|, |t| \rightarrow \infty \quad (4.22)$$

Man kann sich die Existenz dieser Basis anhand von Fourier-Transformationen plausibel machen. Jede Funktion  $f(\vec{x}, t)$  ist schreibbar als

$$f(\vec{x}, t) = \int \frac{d\omega d^3k}{(2\pi)^2} \underbrace{\tilde{f}(\vec{k}, \omega)}_{\text{Komponente}} \underbrace{e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}}_{\text{Basiselement}} \quad (4.23)$$

Wenn man den D'Alembert-Operator auf die Basiselemente anwendet findet man, dass es sich um eine Eigenbasis handelt

$$\begin{aligned} \square e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)} &= \left( -\frac{\omega^2}{c^2} + \vec{k}^2 \right) e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)} \\ \square f(\vec{x}, t) &= \int \frac{d\omega d^3k}{(2\pi)^2} \left( -\frac{\omega^2}{c^2} + \vec{k}^2 \right) \tilde{f}(\vec{k}, \omega) e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \end{aligned} \quad (4.24)$$

Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung  $\square\phi_{\text{hom}} = 0$  ist also

$$\boxed{\phi_{\text{hom}}(\vec{x}, t) = \text{Re} \left[ \int d^3k b(\vec{k}) e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)} \right]} \quad \text{mit} \quad \omega^2 = c^2\vec{k}^2$$

$$b(\vec{k}) = b_1(\vec{k}) + ib_2(\vec{k}) \quad (4.25)$$

Die Verknüpfung  $\omega = c|\vec{k}|$  heißt Dispersionsrelation. Die Randbedingungen  $\phi(\vec{x}, t_0)$  und  $\dot{\phi}(\vec{x}, t_0)$  legen  $b_1(\vec{k})$  und  $b_2(\vec{k})$  fest. Die physikalische Interpretation dieser Lösung ist eine Überlagerung von ebenen Wellen.

Im zweiten Schritt bestimmen wir spezielle Lösungen der inhomogenen Gleichung

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \phi_{\text{spez}}(\vec{x}, t) = -4\pi\rho(\vec{x}, t). \quad (4.26)$$

Wir betrachten die Fouriertransformation bezüglich der Zeit  $t$  in den Frequenz-Raum

$$\phi(\vec{x}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{\sqrt{2\pi}} \phi_{\omega}(\vec{x}) e^{-i\omega t} \quad \text{und} \quad \rho(\vec{x}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{\sqrt{2\pi}} \rho_{\omega}(\vec{x}) e^{-i\omega t}. \quad (4.27)$$

Im Fourier-Raum wird die inhomogene Wellengleichung zu

$$\left(\Delta + \frac{\omega^2}{c^2}\right) \phi_{\omega}(\vec{x}) = -4\pi\rho_{\omega}(\vec{x}). \quad (4.28)$$

Für diese Form ist nicht wichtig, welches Vorzeichen  $\omega$  wir für die Fourier-Transformation wählen. Jetzt erinnern wir uns daran, dass die Poisson-Gleichung  $\Delta\phi(\vec{x}) = -4\pi\rho(\vec{x})$  mit Hilfe der Green-Funktion gelöst wird

$$\Delta G(\vec{x}, \vec{x}') = -4\pi\rho(\vec{x} - \vec{x}') \quad \Rightarrow \quad G(\vec{x}, \vec{x}') = \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \quad \Rightarrow \quad \phi(\vec{x}) = \int d^3x' \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}. \quad (4.29)$$

Denselben Zugang wählen wir für die Wellengleichung. In diesem Fall wird die Green-Funktion

$$\left(\Delta + \frac{\omega^2}{c^2}\right) G_{\omega}(\vec{x}, \vec{x}') = -4\pi\delta^3(\vec{x} - \vec{x}') \quad \Rightarrow \quad G_{\omega}^{\text{ret,av}}(\vec{x}, \vec{x}') = \frac{e^{\pm i\omega|\vec{x} - \vec{x}'|/c}}{|\vec{x} - \vec{x}'|}, \quad (4.30)$$

was wir an dieser Stelle nicht herleiten. Hier heißt  $G_{\omega}^{\text{ret}}(\vec{x}, \vec{x}')$  die retardierte Green-Funktion und  $G_{\omega}^{\text{av}}(\vec{x}, \vec{x}')$  die avanziert Green-Funktion. Wir betrachten zunächst  $G_{\omega}^{-}(\vec{x}, \vec{x}')$

$$\phi_{\omega}^{\text{ret}}(\vec{x}) = \int d^3x' \rho_{\omega}(\vec{x}') \frac{e^{-i\omega|\vec{x} - \vec{x}'|/c}}{|\vec{x} - \vec{x}'|}. \quad (4.31)$$

Wir transformieren diese Lösung zurück in die Zeit und erhalten

$$\begin{aligned} \phi^{\text{ret}}(\vec{x}, t) &= \int d^3x' \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{\sqrt{2\pi}} \rho_{\omega}(\vec{x}') \frac{e^{-i\omega|\vec{x} - \vec{x}'|/c}}{|\vec{x} - \vec{x}'|} e^{i\omega t} \\ &= \int d^3x' \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{\sqrt{2\pi}} \rho_{\omega}(\vec{x}') e^{i\omega(t - |\vec{x} - \vec{x}'|/c)}. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Das Fourier-Integral transformiert  $\rho_{\omega}(\vec{x}') \rightarrow \rho(\vec{x}', t)$ , allerdings mit dem verschobenen Zeitpunkt  $t - |\vec{x} - \vec{x}'|/c$ . Damit wird

$$\phi_{\text{spez}}(\vec{x}, t) = \phi^{\text{ret}}(\vec{x}, t) = \int d^3x' \frac{\rho(\vec{x}', t - |\vec{x} - \vec{x}'|/c)}{|\vec{x} - \vec{x}'|}. \quad (4.33)$$

Die Interpretation dieser Verschiebung im Argument ist, dass  $\phi^{\text{ret}}(\vec{x}, t)$  von der Ladungsverteilung am Ort  $\vec{x}'$  und zur Zeit  $t - |\vec{x} - \vec{x}'|/c$  abhängt. Das bedeutet dass  $c$  ist eine (endliche) Ausbreitungsgeschwindigkeit der Information ist. Im Gegensatz zu dieser Lösung hängt  $\phi^{\text{av}}(\vec{x}, t)$  von der Ladung zur Zeit  $t + |\vec{x} - \vec{x}'|/c$  ab. Es ist also eine unphysikalische Lösung, weil sie die Kausalität verletzt.

Auf dieselbe Weise bestimmen wir auch das Vektorpotential

$$\square \vec{A}(\vec{x}, t) = \frac{4\pi}{c} \vec{j}(\vec{x}, t) \quad \Rightarrow \quad \vec{A} = \vec{A}_{\text{hom}} + \vec{A}_{\text{spez}} = \vec{A}_{\text{hom}} + \frac{1}{c} \int d^3x' \frac{\vec{j}(\vec{x}', t - |\vec{x} - \vec{x}'|/c)}{|\vec{x} - \vec{x}'|}. \quad (4.34)$$

## 5 Spezielle Relativitätstheorie

Die spezielle Relativitätstheorie ist der heimliche Grund, warum wir Elektrodynamik immer noch als Teil der physikalischen Grundvorlesungen lehren. Sie hängt mit der Vereinheitlichung der magnetischen und elektrischen Wechselwirkung unter Transformationen des Bezugssystems zusammen.

### 5.1 Vom Relativitätsprinzip zu Lorentz-Transformationen

Gegenstand der speziellen Relativitätstheorie ist das Transformationsverhalten aller physikalischer Gesetze zwischen nicht-beschleunigten bewegten Systemen. Aus der Mechanik wissen wir, dass diese Einschränkung zumindest die typischen Scheinkräfte verhindert. Wir definieren wie schon in der Mechanik ein Inertialsystem als ein Bezugssystem  $\Sigma$ , in dem die ersten beiden Newton-Axiome gelten:

- Es gilt die Bewegungsgleichung

$$\vec{F} = m\ddot{\vec{x}} \quad (5.1)$$

- Ein kräftefreier Körper bewegt sich geradlinig gleichförmig

$$\vec{F} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{x}(t) = \vec{x}_0 + \vec{v}t \quad (5.2)$$

Das zugrundeliegende Axiom der speziellen Relativitätstheorie ist das spezielle Relativitätsprinzip, bestehend aus 3 Aussagen:

A1 Gegeben ein Inertialsystem  $\Sigma$ . Dann ist jedes weitere System  $\Sigma'$  genau dann ein Inertialsystem, wenn es durch eine oder mehrere Transformationen folgender Art aus dem Inertialsystem  $\Sigma$  hervorgeht:  $\Sigma'$  ist gegenüber  $\Sigma$

- (i) um  $\Delta\vec{x}$  verschoben, entsprechend der Homogenität des Raumes;
- (ii) um einen Winkel  $\vec{\alpha}_0$  verdreht, entsprechend der Isotropie des Raumes;
- (iii) um Zeit  $\Delta t$  verspätet, entsprechend der Homogenität der Zeit;
- (iv) mit konstanter Geschwindigkeit  $\vec{v}$  bewegt.

Solche Transformationen  $\Lambda : \Sigma \rightarrow \Sigma'$  hängen von 10 kontinuierlichen Parametern ab:

$$\Lambda \equiv \Lambda(\Delta\vec{x}, \vec{\alpha}_0, \Delta t, \vec{v}) \quad (5.3)$$

Da die reinen Orts- oder Zeit-Transformationen (i)-(iii) bekannt sind, betrachten wir vorwiegend die letzte Transformation  $\Lambda(\vec{v})$ .

A2 Die Transformationen  $\Lambda$  sollen eine Gruppe bilden. Es gibt also eine Multiplikation

$$\Sigma \xrightarrow{\Lambda(\vec{v})} \Sigma' \xrightarrow{\Lambda(\vec{v}')} \Sigma'' \quad \text{mit} \quad \Sigma \xrightarrow{\Lambda(\vec{v}') \cdot \Lambda(\vec{v})} \Sigma'' \quad (5.4)$$

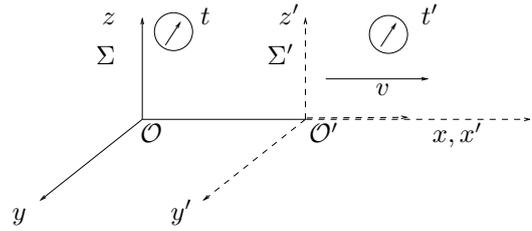
und ein inverses Element

$$\Lambda(-\vec{v}) = \Lambda^{-1}(\vec{v}) \quad (5.5)$$

A3 Alle Naturgesetze gelten in jedem Inertialsystem, oder anders gesagt alle Gleichungen sind forminvariant oder kontravariant unter  $\Lambda$ .

Man kann zeigen dass die Form von  $\Lambda$  durch A1 and A2 eindeutig bis auf eine Konstante bestimmt wird. Empirische Information ist dann allein zur Bestimmung der Konstante erforderlich, im Einklang mit A3. Zum Beweis betrachten wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit die sogenannte Standardkonfiguration

- $\Sigma'$  bewege sich mit  $v$  bzgl.  $\Sigma$  in  $x$ -Richtung
- $t = 0$  in  $\Sigma$  entspreche  $t' = 0$  in  $\Sigma'$
- Bei  $t = 0 = t'$  fallen der Ursprung  $\mathcal{O}$  und  $\mathcal{O}'$  zusammen



Zunächst muss die Transformation

$$\Lambda : (t, x_i) \longrightarrow (t', x'_i) \tag{5.6}$$

linear in  $(t, x_i)$  sein, damit geradlinig Trajektionen in  $\Sigma$  auf ebensolche in  $\Sigma'$  abgebildet werden, ansonsten gäbe es eine Scheinkraft. Der allgemeinste Ansatz kann also wie folgt parametrisiert werden

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(v^2)(x - v t) && \text{(das Inertialsystem } \Sigma' \text{ bewegt sich mit } v \text{ in } x\text{-Richtung)} \\ y' &= \beta(v^2)y \\ z' &= \beta(v^2)z && \text{(die Isotropie/Homogenität erzwingt gleiche Vorfaktoren)} \\ t' &= \alpha(v^2) [t - \eta(v^2)v x] && \text{(allgemeine lineare Abhängigkeit von } t, x) \end{aligned} \tag{5.7}$$

Die drei Parameter  $\alpha, \beta, \gamma$  sind dimensionslos, die einzige Einheit ist

$$[\eta] = \frac{1}{[\text{Geschwindigkeit}]^2} \tag{5.8}$$

Weiterhin hängen  $\alpha, \beta, \gamma, \eta$  von der Geschwindigkeit zwischen den Inertialsystemen  $v$  ab, wegen der Isotropie nur von  $v^2$  und nicht vom Vorzeichen. Das gewählte Vorzeichen im Term  $\eta v$  ist Konvention, und das Vorzeichen von  $\eta$  kann frei gewählt werden. Man kann diese lineare Transformation zwischen zwei Inertialsystemen auch als Matrix schreiben, nämlich

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -v\gamma \\ 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 0 \\ -\alpha\eta v & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}. \tag{5.9}$$

Der wichtige Schritt gegenüber der klassischen Mechanik ist, dass wir die Zeit als vierte Koordinate betrachten und daher im 4-dimensionalen Raum transformieren. Die spezielle block-diagonale Form kommt daher, dass wir uns auf die Standardkonfiguration als Transformation mit Hilfe der Geschwindigkeit konzentrieren.

Wir bestimmen jetzt diese Parameter im Einklang mit der Gruppen-Bedingung A2. Das inverse Element ist  $\Lambda(-v) = \Lambda^{-1}(v)$  oder äquivalent  $\Lambda(-v)\Lambda(v) = \mathbb{1}$ . Wenn sich  $\Sigma$  mit  $-v$  relativ zu  $\Sigma'$  bewegt, dann ist die inverse Transformation nach der obigen Definition einfach

$$\begin{aligned} x &= \gamma(v^2)(x' + vt') & y &= \beta(v^2)y' & z &= \beta(v^2)z' \\ t &= \alpha(v^2)[t' + \eta(v^2)v x'] \end{aligned} \tag{5.10}$$

Kombiniert man die Transformation und ihre Inverse, dann gilt zunächst für den Parameter  $\beta$

$$\begin{aligned} y &= \beta(v^2)y' = \beta(v^2)\beta(v^2)y & \Rightarrow & \beta^2 = 1 & \Rightarrow & \beta = \pm 1 \\ & & & \beta(v^2 = 0) = 1 & \Rightarrow & \boxed{\beta = 1} \end{aligned} \tag{5.11}$$

Für dieselbe kombinierte Transformation in  $x$ -Richtung erhalten wir ebenfalls

$$\begin{aligned} x &= \gamma(x' + vt') \\ &= \gamma[\gamma(x - vt) + \alpha v(t - \eta vx)] \\ &= \gamma(\gamma - \alpha\eta v^2) x + \gamma(\alpha - \gamma) vt \end{aligned} \tag{5.12}$$

Aus den beiden Koeffizienten erhalten wir die beiden Bedingungen

$$\boxed{\alpha = \gamma} \quad \text{und} \quad \boxed{\gamma^2 = \frac{1}{1 - \eta v^2}} \quad (5.13)$$

Dieselben drei Bedingungen garantieren ebenfalls die korrekte inverse Transformation auf  $z$  und  $t$ . Was uns noch fehlt ist eine Bedingung für die einzige dimensionsbehaftete Größe  $\eta$ .

Die Verknüpfung oder Komposition der beiden Transformationen

$$\begin{aligned} \Lambda(v) : \quad x' &= \gamma(x - vt) & \Lambda(v') : \quad x'' &= \gamma'(x' - v't) \\ t' &= \gamma(t - \eta vx) & t'' &= \gamma'(t' - \eta' v'x') \end{aligned} \quad (5.14)$$

zu einer Verschiebung um  $v''$  ergibt weiterhin

$$x'' = \gamma\gamma' [x - vt - v'(t - \eta vx)] = \gamma''(x - v''t) \quad (5.15)$$

$$t'' = \gamma\gamma' [t - \eta vx - v'\eta'(x - vt)] = \gamma''(t - \eta''v''x) \quad (5.16)$$

Der Koeffizientenvergleich für  $x$  in der ersten der beiden Gleichungen (5.15) ergibt sofort

$$\gamma'' = \gamma\gamma'(1 + \eta v v') \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\gamma\gamma'}{\gamma''} = \frac{1}{1 + \eta v v'} \quad (5.17)$$

Dieselbe Bedingung erhalten wir für den  $t$ -Koeffizienten in Gl.(5.16). Für den  $x$ -Koeffizienten in Gl.(5.16) und den  $t$ -Koeffizienten in Gl.(5.15) erhalten wir

$$\begin{aligned} \gamma''v'' &= \gamma\gamma' \left[ \frac{\eta}{\eta''}v + \frac{\eta'}{\eta''}v' \right] \\ \gamma''v'' &= \gamma\gamma' [v' + v] \quad \Rightarrow \quad \frac{\eta'}{\eta''} = 1 = \frac{\eta}{\eta} \end{aligned} \quad (5.18)$$

Das heisst dass unabhängig von  $v$  gelten muss  $\eta(v^2) = \eta(v'^2) = \eta(v''^2)$ . Da  $\eta$  aber eine Einheit hat heisst das

$$\boxed{\eta = \frac{1}{c^2}} \quad (5.19)$$

mit einer dimensionsbehaftete Konstanten oder konstanten universellen Geschwindigkeit  $c$ . An dieser Stelle wissen wir allerdings noch nicht, dass es sich hier um die Lichtgeschwindigkeit im Vacuum handelt, auch wenn wir das Symbol  $c$  benutzen. Damit sind unsere vier Parameter  $\alpha, \beta, \gamma, \eta$  bestimmt.

Um die Transformationen besser zu verstehen schreiben wir mit Hilfe der obigen beiden Bedingungen

$$\frac{\gamma\gamma'}{\gamma''} = \frac{1}{1 + \eta v v'} = \frac{1}{1 + \frac{v v'}{c^2}} \quad \Rightarrow \quad v'' = \frac{\gamma\gamma'}{\gamma''} [v' + v] = \frac{v + v'}{1 + \frac{v v'}{c^2}} \quad (5.20)$$

Im Spezialfall  $v = -v'$  heisst das

$$\gamma^2 = \frac{1}{1 - \eta v^2} = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad \Rightarrow \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (5.21)$$

Hier benutzen wir dass das Vorzeichen durch den Grenzfall  $\gamma(v = 0) = 1$  gegeben ist. Hieraus folgt eine Interpretation von  $c$ , nämlich dass

- $c$  die Dimension einer Geschwindigkeit hat, es sich also um eine universelle, konstante Geschwindigkeit handelt;

- in einer Dimension ein Massenpunkt mit der Geschwindigkeit  $v' \equiv c$  in  $\Sigma'$  in einem um  $v$  verschobenen System  $\Sigma$  die Geschwindigkeit

$$v'' = \frac{c+v}{1 + \frac{vc}{c^2}} = c^2 \frac{c+v}{c^2+vc} = c \quad (5.22)$$

hat;

- $c$  also in jedem System  $\Sigma$  die maximal mögliche Grenzgeschwindigkeit ist;
- der Wert von  $c$  nicht festgelegt ist. Wir haben zum Beispiel folgende Möglichkeiten:

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad c = \infty &\Rightarrow \gamma = 1 \\ &t' = t \quad \text{Galilei-Transformationen der Mechanik mit } v'' = v + v' \\ &x' = x - vt \\ \text{(ii)} \quad c = 0 &\Rightarrow \gamma \text{ imaginär, unphysikalisch} \\ \text{(iii)} \quad c^2 < 0 &\Rightarrow v'' = \frac{v+v'}{1 - \frac{vc}{c^2}} \text{ negativ mit } v, v' > 0, \text{ unphysikalisch} \\ \text{(iv)} \quad 0 < c < \infty &\text{ endliche, invariante Geschwindigkeit} \end{aligned} \quad (5.23)$$

Die Unterscheidung zwischen (i) und (iv) erfordert Experimente. Wir finden dann in der Tat dass  $0 < c < \infty$  die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum mit dem numerischen Wert  $c \approx 3 \cdot 10^8$  m/s ist. Zum Beispiel zeigt das Michelson-Morley-Experiment, dass sich das Licht in jedem Inertialsystem gleich schnell ausbreitet. Das entspricht genau dem Axiom A3.

Zusammenfassend finden wir für Lorentz-Transformationen  $\Lambda : \Sigma \rightarrow \Sigma'$ , in denen wir typischerweise noch (anders als das vorige  $\beta$ )  $\beta := v/c$  definieren

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= \gamma(x - \beta ct) & y' &= y & z' &= z \\ ct' &= \gamma(ct - \beta x) \end{aligned}} \quad (5.24)$$

Die (normierte) Geschwindigkeit ist entsprechend

$$\beta'' = \frac{v''}{c} = \frac{\frac{v}{c} + \frac{v'}{c}}{1 + \frac{vc}{c^2}} = \frac{\beta + \beta'}{1 + \beta\beta'} < 1 \quad \text{falls } \beta, \beta' < 1. \quad (5.25)$$

Analog zu Gl.(5.26) finden wir in Matrix-Form

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ ct' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ ct \end{pmatrix}. \quad (5.26)$$

Die symmetrische Form der Matrix zeigt dass in der Tat  $ct$  nichts als eine weitere Koordinate analog zu  $x$ ,  $y$  und  $z$  ist.

## 5.2 Lichtkegel

Als nächstes sehen wir uns an, wie zwei Ereignisse durch eine Lorentz-Transformation physikalisch miteinander verbunden sein können. Auch in diesem Kapitel beziehen wir uns ohne Einschränkung der Allgemeinheit auf die Standardkonfiguration. Gegeben seien zwei Ereignisse  $E_1 = (ct_1, x_1)$  und  $E_2 = (ct_2, x_2)$ , dann definieren wir das invariante Abstandsquadrat in Raum und Zeit als

$$s_{12}^2 = c^2|t_1 - t_2|^2 - |x_1 - x_2|^2 \quad \Leftrightarrow \quad \Delta s^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 \quad (5.27)$$

Damit haben wir, wie wir sehen werden, implizit eine Metrik auf der Raumzeit eingeführt. Lorentz-Transformationen zwischen Inertialsystemen  $\Sigma \rightarrow \Sigma'$  lassen  $s_{12}^2$  invariant. Um das zu zeigen betrachten wir in beiden Systemen die Punktpaare

$$\begin{array}{cc} (ct_1, x_1) & (ct_2, x_2) \\ (ct'_1, x'_1) & (ct'_2, x'_2) \end{array} \quad (5.28)$$

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an dass die jeweils ein Punkt im Ursprung liegt, also  $t_1 = 0$ ,  $x_1 = 0$  und  $t'_1 = 0$ ,  $x'_1 = 0$ . Dann gilt im transformierten System für den zweiten Punkt

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad ct'_2 &= \gamma(ct_2 - \beta x_2) & x'_2 &= \gamma(x_2 - \beta ct_2) \\ s_{12}'^2 &= c^2 t_2'^2 - x_2'^2 \\ &= \gamma^2 (ct_2 - \beta x_2)^2 - \gamma^2 (x_2 - \beta ct_2)^2 \\ &= \gamma^2 [c^2 t_2^2 (1 - \beta^2) - x_2^2 (1 - \beta^2)] = s_{12}^2 \quad \text{mit } \gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2} \end{aligned} \quad (5.29)$$

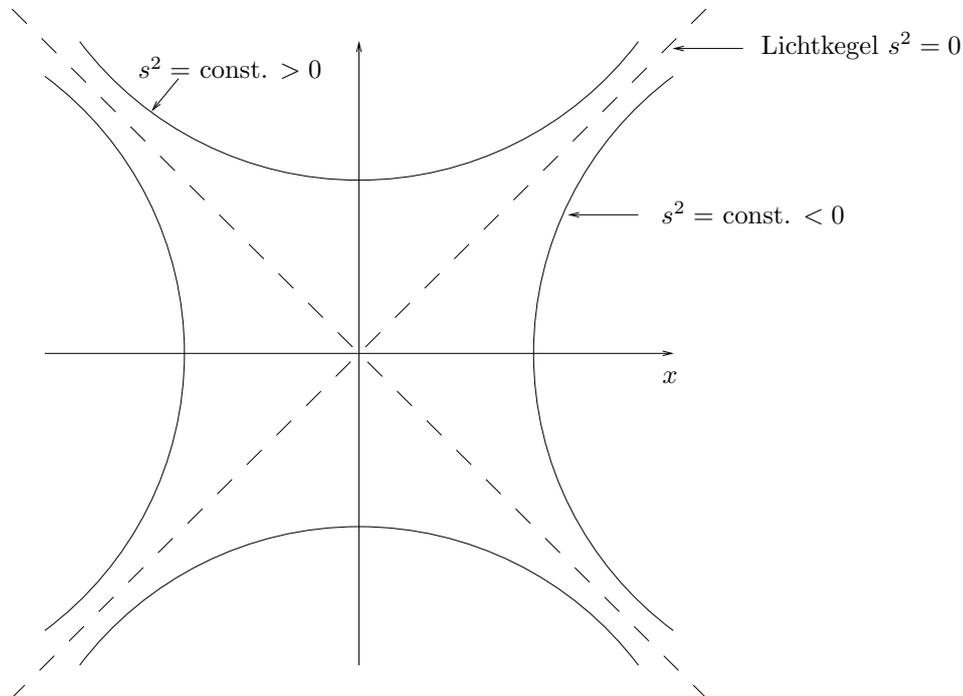
Gegeben sei also jetzt ein Ereignis  $(ct, x)$  mit dem Abstand zum Ursprung in  $\Sigma$

$$s^2 = c^2 t^2 - x^2 \quad (5.30)$$

Je nach Vorzeichen unterscheiden wir grundlegend drei Arten von Ereignissen, nämlich

$$\begin{array}{ccc} s^2 > 0 & s^2 = 0 & s^2 < 0 \\ \text{zeitartig} & \text{lichtartig} & \text{raumartig} \end{array} \quad (5.31)$$

Graphisch sind Kurven konstanten invarianten Abstands in der Raum-Zeit-Ebene



Diese drei Bedingungen bedeuten physikalisch

- $s^2 = 0$  (lichtartig)  $\leftrightarrow$  mit  $v = c$  von  $(0, 0)$  erreichbar
- $s^2 > 0$  (raumartig)  $\leftrightarrow$  mit  $v < c$  von  $(0, 0)$  erreichbar, in kausalem Zusammenhang mit  $(0, 0)$   
Vorwärtslichtkegel: absolute Zukunft  
Rückwärtslichtkegel: absolute Vergangenheit

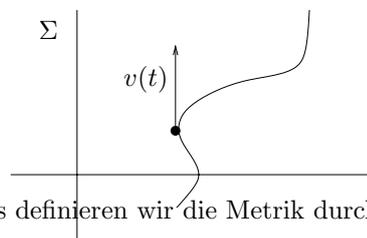
- $s^2 < 0$  (zeitartig)  $\leftrightarrow$  nicht mit  $v < c$  von  $(0, 0)$  erreichbar, nicht in kausalem Zusammenhang mit  $(0, 0)$

Da Lorentz-Transformationen den Abstand  $s^2$  erhalten, können sie ein Ereignis nur entlang der Bahn  $s^2 = \text{const}$  verschieben. Im Fall einer zeitartigen Transformation

$$s^2 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad |x| > c|t| \quad (5.32)$$

kann die Lorentz-Transformation  $ct' = \gamma(ct - \beta x)$  für hinreichend großes  $\beta$  einen Vorzeichenwechsel zwischen  $t'$  und  $t$  bewirken. Das bedeutet eine Relativität der Gleichzeitigkeit. Da die Transformation zeitartig ist, sind diese Ereignisse mit verschobener Vergangenheit und Zukunft aber nicht kausal mit  $(0, 0)$  verbunden, Kausalität ist also insgesamt gewahrt.

Wir definieren zum Schluss noch die Eigenzeit  $\tau$  für einen Körper, der sich mit  $v(t)$  im Inertialsystem  $\Sigma$  bewege, als die Zeit im momentanen Ruhsystem  $\Sigma'$  des Körpers.



Für die Beschreibung des momentanen Ruhsystems definieren wir die Metrik durch das infinitesimale Abstandselement

$$\boxed{ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2} \quad (5.33)$$

Da im System  $\Sigma'$  der Körper ruht, ist im System des Körpers mit der Eigenzeit

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 - \underbrace{dx'^2}_{=0} = c^2 d\tau^2 \quad (5.34)$$

Transformiert in das äußere Bezugssystem  $\Sigma$  ergibt dies für die Zeit-Koordinate

$$ct = \gamma \underbrace{(c\tau - \beta x')}_{=0} = \gamma c\tau \quad \Rightarrow \quad \boxed{d\tau = dt \sqrt{1 - \beta^2}} \quad (5.35)$$

Diese Verknüpfung bedeutet, dass während im äußeren System  $\Sigma$  die Zeit  $\Delta t = t_2 - t_1$  vergeht, eine Uhr in  $\Sigma'$  im Ruhsystem die Zeitdifferenz

$$\Delta\tau = \int_{t_1}^{t_2} d\tau(t) = \int_{t_1}^{t_2} dt \sqrt{1 - \frac{v(t)^2}{c^2}} < \Delta t \quad (5.36)$$

misst. Ein experimenteller Beweis ist zum Beispiel die Lebensdauer schneller Myonen aus der kosmischen Strahlung, die man klassisch auf der Erde nicht finden dürfte. Wir behandeln diese Zeitdilatation und die Längenkontraktion in der Übung.

### 5.3 Raumzeit

Eine zentrale Eigenschaft der Lorentz-Transformationen haben wir bislang noch nicht physikalisch besprochen: Raum-Koordinaten und Zeit-Koordinaten transformieren ineinander, haben somit dieselbe Funktion, und sind eigentlich nicht trennbar. Kombiniert sollten wir also eine Raumzeit betrachten und entsprechende Koordinaten definieren. Unsere bisherigen Ergebnisse lassen sich mit Hilfe dieses Konzeptes etwas formalisieren:

- Die Koordinaten im Inertialsystem  $\Sigma$  sind

$$\begin{aligned} (ct, x, y, z) &\equiv (x^0, x^1, x^2, x^3) \equiv x^\alpha \quad \text{mit oberem Index } \alpha = 0, 1, 2, 3 \\ x^\alpha &= (x^0, x^i) = (x^0, \vec{x}) \quad \text{mit } i = 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (5.37)$$

- Eine Lorentz-Transformation  $\Sigma \rightarrow \Sigma'$  wirkt auf diese Koordinaten als

$$x^\alpha \rightarrow x^{\alpha'} = \Lambda^{\alpha'}_{\beta} x^\beta \quad \text{mit} \quad \Lambda^{\alpha'}_{\beta} = \begin{pmatrix} \Lambda^{0'}_0 & \cdots & \Lambda^{0'}_3 \\ \vdots & & \vdots \\ \Lambda^{3'}_0 & \cdots & \Lambda^{3'}_3 \end{pmatrix} \quad (5.38)$$

Wir separieren bei diese Matrix-Schreibweise die oberen und unteren Indizes, auch wenn das an diese Stelle noch nicht notwendig erscheint und sich auf die Multiplikation der Matrix mit dem Vektor  $x$  nicht auswirkt. Wichtig ist, dass in  $\Lambda$  der erste (obere) Index die Zeile und der zweite (untere) Index die Spalte bezeichnet.

- Unsere Standardkonfiguration ist dann genau wie in Gl (5.26), aber mit der Zeit als erstem Eintrag

$$\Lambda^{\alpha'}_{\beta} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.39)$$

Den Faktor  $c$  absorbieren wir in die Definition der Zeit-Koordinate. In dieser Schreibweise bilden die Raumzeit-Koordinaten sogenannte 4-Vektoren, geometrisch definiert als Vektoren  $\underline{A}$  mit Komponenten  $A^\alpha = (A^0, A^i)$ , deren Komponenten unter Lorentz-Transformationen genau wie oben beschrieben  $x^\alpha$  transformieren,

$$\boxed{A^{\alpha'} = \Lambda^{\alpha'}_{\beta} A^\beta} \quad (5.40)$$

Der gestrichene erste Index von  $\Lambda$  erinnert uns daran, dass es sich um eine Lorentz-Transformation zwischen Inertialsystemen  $\Sigma \rightarrow \Sigma'$  handelt. Wenn man  $\Lambda$  als Matrix auffasst, dann ist die Transformation des 4-Vektors  $A^{\alpha'}$  einfach die übliche Multiplikation der Matrix  $\Lambda$  mit dem Vektor  $A$ . Sie bilden einen Vektorraum  $\mathbb{V}$ , es gilt also

- $A^\alpha$  sind Komponenten bezüglich einer Basis  $\underline{e}_\alpha$ , also

$$\underline{A} = A^\alpha \underline{e}_\alpha \quad \begin{aligned} \underline{e}_0 &= (1, 0, 0, 0) \\ \underline{e}_1 &= (0, 1, 0, 0) \\ \underline{e}_2 &= (0, 0, 1, 0) \\ \underline{e}_3 &= (0, 0, 0, 1) \end{aligned} \quad (5.41)$$

Die Transformation  $\Sigma \rightarrow \Sigma'$  entspricht dann einem Basiswechsel  $\underline{e}_\alpha \rightarrow \underline{e}_{\alpha'}$ , unter dem das geometrische Objekt  $\underline{A}$  invariant bleibt

$$\underline{A} = A^{\alpha'} \underline{e}_{\alpha'} = \Lambda^{\alpha'}_{\beta} A^\beta \underline{e}_{\alpha'} \equiv A^\beta \underline{e}_\beta \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\underline{e}_\beta = \underline{e}_{\alpha'} \Lambda^{\alpha'}_{\beta}} \quad (5.42)$$

Diese Transformation der Basis-Vektoren in Index-Schreibweise lässt sich einfacher als Matrix-Multiplikation schreiben, wenn wir ausnutzen dass  $\Lambda^{\alpha'}_{\beta} = \Lambda_{\beta}^{\alpha'}$  symmetrisch ist.

- Es gibt eine Rücktransformation  $A^\alpha = \Lambda^{\alpha}_{\beta'} A^{\beta'}$  mit

$$\boxed{\Lambda^{\alpha}_{\beta'} \Lambda^{\beta'}_{\gamma} = \delta^{\alpha}_{\gamma}} \quad \text{oder in Matrixschreibweise} \quad \Lambda^{-1} \Lambda = \mathbb{1} \quad (5.43)$$

- Auf den Raum der 4-Vektoren ist ein Skalarprodukt definiert

$$\begin{aligned} \underline{A} \cdot \underline{B} &= A^0 B^0 - A^1 B^1 - A^2 B^2 - A^3 B^3 = A^0 B^0 - \vec{A} \cdot \vec{B} \\ &= A^\alpha B^\beta \underline{e}_\alpha \cdot \underline{e}_\beta \\ &\equiv A^\alpha B^\beta \eta_{\alpha\beta} \quad \text{mit der Minkowski-Metrik} \quad \eta_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.44)$$

Die Struktur dieser Metrik ist durch den unter Lorentz-Transformationen invarianten Abstand  $ds^2$  motiviert. Wir definieren den Minkowski-Raum als den Raum  $\mathbb{R}^{1,3}$  der 4-Vektoren mit der Metrik  $\eta_{\alpha\beta} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ . Die Indizes der Metrik sind untere Indizes. Die von uns gefundenen Lorentz-Transformationen haben also die Eigenschaft, dass sie das Skalarprodukt invariant lassen

$$\begin{aligned} \underline{A} \cdot \underline{B} &= A^\alpha B^\beta \eta_{\alpha\beta} \\ &= A^{\alpha'} B^{\beta'} \eta_{\alpha'\beta'} = \Lambda^{\alpha'}_{\gamma} A^\gamma \Lambda^{\beta'}_{\delta} B^\delta \eta_{\alpha'\beta'} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\eta_{\gamma\delta} = \Lambda^{\alpha'}_{\gamma} \Lambda^{\beta'}_{\delta} \eta_{\alpha'\beta'}} \end{aligned} \quad (5.45)$$

Umgekehrt gilt auch dass die Gruppe der linearen Transformationen mit dieser Transformations-Eigenschaft von der Form der Lorentz-Transformationen sein muss. Dies ist die Lorentz-Gruppe  $SO(1, 3)$ .

Um nicht nur obere, sondern auch untere Indizes zu definieren betrachten wir das Inverse der Metrik, also  $\eta^{\alpha\beta}$  mit oberen Indizes und definiert durch

$$\eta^{\alpha\beta} \eta_{\beta\gamma} = \delta^\alpha_\gamma \quad (5.46)$$

In Matrix-Schreibweise sind die Metrik und ihr Inverses identisch, allerdings haben wir sie verschieden auf 4-Vektoren. Dies bringt uns so sogenannten 1-Formen, also linearen Abbildungen

$$\begin{aligned} \tilde{\omega} : \mathbb{V} &\rightarrow \mathbb{R} \\ \underline{A} &\rightarrow \tilde{\omega}[\underline{A}] \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (5.47)$$

Der Raum der  $\tilde{\omega}$  ist wiederum ein Vektorraum, der zu  $\mathbb{V}$  duale Raum  $\mathbb{V}^*$ . Wir definieren entsprechend eine Basis  $\tilde{e}^\alpha$  von  $\mathbb{V}^*$  mit

$$\begin{aligned} \tilde{e}^\alpha[\underline{e}_\beta] &\equiv \delta^\alpha_\beta \\ \Rightarrow \quad \tilde{\omega}(\underline{A}) &= (\omega_\alpha \tilde{e}^\alpha)[A^\beta \underline{e}_\beta] \stackrel{\text{linear}}{=} \omega_\alpha A^\beta \tilde{e}^\alpha[\underline{e}_\beta] = \omega_\alpha A^\beta \delta^\alpha_\beta = \omega_\alpha A^\alpha \end{aligned} \quad (5.48)$$

A priori sind  $\mathbb{V}$  und  $\mathbb{V}^*$  unabhängige Objekte. In Anwesenheit einer Metrik  $\eta_{\alpha\beta} = \eta_{\beta\alpha}$  können wir die 1-Form  $\tilde{\omega}$  und den Vektor  $\underline{\omega}$  aber offenbar wie folgt identifizieren

$$\tilde{\omega}[\underline{A}] = \omega_\alpha A^\alpha \equiv \underline{\omega} \cdot \underline{A} = \omega^\beta A^\alpha \eta_{\alpha\beta} \quad \Leftrightarrow \quad \omega_\alpha = \omega^\beta \eta_{\beta\alpha} \quad \omega^\alpha = \eta^{\alpha\beta} \omega_\beta \quad (5.49)$$

Die Position des Index unterscheidet also streng genommen zwischen Vektoren (Index oben) und Formen (Index unten). Die Metrik  $\eta_{\alpha\beta}$  und  $\eta^{\alpha\beta}$  erhöht und erniedrigt Indizes. Streng genommen werden 4-Vektoren von links und 1-Formen von recht multipliziert, wobei in unserem Fall die Metrik symmetrisch ist.

Als Beispiel schreiben wir die Lorentz-Transformation der Form  $A_{\alpha'}$  mit Hilfe der Transformation des 4-Vektors als

$$\begin{aligned} A_{\alpha'} &= \eta_{\alpha'\beta'} A^{\beta'} = \eta_{\alpha'\beta'} \Lambda^{\beta'}_{\gamma} A^\gamma \\ &= \eta_{\alpha'\beta'} \Lambda^{\beta'}_{\gamma} \eta^{\gamma\delta} A_\delta = \Lambda^{\delta}_{\alpha'\gamma} \eta^{\gamma\delta} A_\delta \quad \Rightarrow \quad A_{\alpha'} = \Lambda^{\delta}_{\alpha'} A_\delta \end{aligned} \quad (5.50)$$

In dieser Matrix  $\Lambda$  bezeichnet streng genommen der erste Index die Zeile und der zweite Index die Spalte. Weil die Matrix  $\Lambda$  symmetrisch ist, ist unser Resultat äquivalent zur erwarteten Transformation

$$\Lambda^{\alpha'}_{\beta} = \Lambda_{\beta}^{\alpha'} \quad \Rightarrow \quad \boxed{A_{\alpha'} = \Lambda^{\delta}_{\alpha'} A_\delta} \quad (5.51)$$

Wie müssen also die Vorzeichen beachten, wenn wir die 4-Vektoren und 1-Formen in Komponenten schreiben

$$A^0 = A_0 \quad \text{aber} \quad A^i = -A_i \quad \text{mit } i = 1, 2, 3 \quad (5.52)$$

Man nennt einen unteren Index kovarianten Index und einen oberen Index kontravarianten Index, also entsprechen

$$\text{4-Vektor } A^\alpha \quad \text{oberer Index} \quad (\text{kontravariant}) \quad (5.53)$$

$$\text{1-Form } A_\alpha \quad \text{unterer Index} \quad (\text{kovariant}) \quad (5.54)$$

Genauso wie die 1-Form kann man auch einen Vektor  $\underline{A}$  als lineare Abbildung interpretieren

$$\begin{aligned} \underline{A} : \mathbb{V}^* &\rightarrow \mathbb{R} \\ \tilde{\omega} &\rightarrow \underline{A}[\tilde{\omega}] = \omega_\alpha A^\alpha \equiv \tilde{\omega}[\underline{A}] \end{aligned} \quad (5.55)$$

Definieren wir nun einen kontravarianten 2-Tensor als bi-lineare Abbildung

$$\begin{aligned} T : \mathbb{V}^* \times \mathbb{V}^* &\rightarrow \mathbb{R} \\ (\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2) &\rightarrow T[\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2] := T^{\alpha\beta}(\omega_1)_\alpha(\omega_2)_\beta \end{aligned} \quad (5.56)$$

Die kann man offensichtlich auf kovariante und kontravariante n-Tensoren verallgemeinern. Wie erwartet transformieren diese Tensoren unter der Lorentz-Gruppe als

$$\begin{aligned} T^{\alpha'_1 \dots \alpha'_n} &= \Lambda^{\alpha'_1}_{\beta_1} \dots \Lambda^{\alpha'_n}_{\beta_n} T^{\beta_1 \dots \beta_n} \\ T_{\alpha_1 \dots \alpha_n} &= \eta_{\alpha_1 \beta_1} \dots \eta_{\alpha_n \beta_n} T^{\beta_1 \dots \beta_n} \end{aligned} \quad (5.57)$$

wie wir in der Übung zeigen werden. Mit anderen Worten, das Konzept von Vektoren und Formen lässt sich problemlos auf Objekte höheren Grades verallgemeinern.

Um wieder zur Elektrodynamik zurückkehren zu können müssen wir nun noch Differentialoperatoren und Felder mit oberen und unteren Indizes versehen. Wir beginnen mit dem Skalarfeld  $f(x^\alpha)$ , das wie immer invariant transformiert

$$f(\underline{x}') = f(\underline{x}(x')) \quad (5.58)$$

Weniger offensichtlich ist die Transformation der partiellen Ableitung des Skalarfeldes  $\partial f / \partial x^\alpha$ . Hierzu nutzen wir die Kettenregel

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(\underline{x}')}{\partial x^{\alpha'}} &= \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial f(\underline{x}(x'))}{\partial x^\beta} \\ &= \left[ \frac{\partial}{\partial x^{\alpha'}} \Lambda^{\beta}_{\gamma'} x^{\gamma'} \right] \frac{\partial f(\underline{x}(x'))}{\partial x^\beta} = \Lambda^{\beta}_{\gamma'} \frac{\partial x^{\gamma'}}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial f(\underline{x}(x'))}{\partial x^\beta} = \Lambda^{\beta}_{\alpha'} \frac{\partial f(\underline{x})}{\partial x^\beta} \end{aligned} \quad (5.59)$$

Wir schreiben dann die partielle Ableitung als Komponente eines Vektor-Operators und finden in dieser Schreibweise

$$\boxed{\partial_{\alpha'} f = \Lambda^{\beta}_{\alpha'} \partial_\beta f} \quad (5.60)$$

Es transformiert also  $\partial_{\alpha'} f$  wie eine 1-Form, es ist also ein 1-Form-Feld. Suggestiv geben wir dem entsprechenden Differentialoperator einen entsprechend unteren oder kovarianten Index. Allgemein definieren wir kovariante und kontravariante Ableitungsoperatoren als

$$\begin{aligned} \partial_\alpha &= \frac{\partial}{\partial x^\alpha} = \left( \frac{\partial}{\partial x^0}, \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3} \right) = (\partial_0, \partial_1, \partial_2, \partial_3) \\ \partial^\alpha &= \frac{\partial}{\partial x_\alpha} = (\partial^0, \partial^1, \partial^2, \partial^3) = (\partial_0, -\partial_1, -\partial_2, -\partial_3) \end{aligned} \quad (5.61)$$

Für die Formulierung invarianter Objekte stellt sich nun noch die Frage, welches der einfachste unter Lorentz-Transformationen invariante Differentialoperator ist. Wir finden

$$\square = \partial^\alpha \partial^\beta \eta_{\alpha\beta} = \partial^\alpha \partial_\alpha = \partial_\alpha \partial_\beta \eta^{\alpha\beta} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$$

$$\text{mit } \square' = \square \quad (5.62)$$

In dieser Gleichung sehen wir dass das bekannte und für die Lösung der Gleichung zentrale Vorzeichen zwischen der Zeitableitung und dem Laplace-Operator aus der Lorentz-invarianten Minkowski-Metrik kommt.

## 5.4 Relativistische Elektrodynamik

An dieser Stelle haben wir alle Objekte, die wir für eine relativistische Beschreibung der Elektrodynamik brauchen, definiert und möglicherweise ein wenig verstanden. Die Konstruktion der relativistischen Formulierung der Grundgleichungen der Elektrodynamik beginnt wir mit dem dritten Axiom A3 des speziellen Relativitätsprinzips. Es besagt dass alle physikalischen Gesetze in in jedem Inertialsystem gültig sind. Anders gesagt, physikalische Gesetze sind forminvariant oder kovariant unter Lorentz-Transformationen. Die Strategie zur Formulierung solcher kovarianter Gesetze ist

1. Bestimme das korrekte Transformation-Verhalten der physikalischen Größen.
2. Ausgehend von der Formulierung des Gesetzes in bestimmten Inertialsystemen finde die Formulierung in jedem Inertialsystem.

Diese Strategie wenden zuerst auf die Ladungserhaltung und der Definition des Stromes an. Die Kontinuitätsgleichung hat die bekannte Form

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(\vec{x}, t) + \vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{x}, t) = 0 \quad (5.63)$$

Wir definieren einen 4-Vektor-Kandidaten aus Ladung und Strom

$$j^\alpha = (c\rho, \vec{j}) \equiv (j^0, j^1, j^2, j^3) \quad (5.64)$$

und schreiben die Kontinuitätsgleichung dann in der vermuteten invarianten Form

$$\boxed{\partial_\alpha j^\alpha \equiv \eta_{\alpha\beta} \partial^\alpha j^\beta = 0} \quad (5.65)$$

Der entscheidender Schritt ist nun die Betrachtung der Symmetrie-Eigenschaften. Die rechte Seite der Gleichung, "0", ist offensichtlich ein Lorentz-Skalar, das heißt  $\partial_\alpha j^\alpha = 0$  gilt in jedem Inertialsystem. Da  $\partial^\alpha$  Lorentz-Vektor ist, muss auch  $j^\beta$  Lorentz-Vektor sein, damit  $\eta_{\alpha\beta} \partial^\alpha j^\beta$  als Skalarprodukt invariant sein kann. Der 4-Vektor-Strom transformiert also als

$$j^{\alpha'} = \Lambda^{\alpha'}_{\beta} j^\beta \quad (5.66)$$

Wieder nutzen wir unsere Standardkonfiguration und betrachten  $\rho'$  und  $\vec{j}'$  im bewegten Inertialsystem  $\Sigma'$ . Dann gilt analog zur Transformation des Raum-Zeit-Vektors

$$\begin{aligned} c\rho &= \gamma (c\rho' + \beta j'^1) \\ j^1 &= \gamma (j'^1 + \beta c\rho') & j^2 &= j'^2 & j^3 &= j'^3 \end{aligned} \quad (5.67)$$

Falls im Inertialsystem  $\vec{j}' = 0$  gilt, dann ist dort  $\rho = \gamma \rho'$ . Wir können die Ladungsdichte mit der totalen Ladung verknüpfen,

$$Q' = \int \rho' dV' = \int \rho' dx'^1 dx'^2 dx'^3 = \int \frac{\rho}{\gamma} dx^1 dx^2 dx^3 = Q \quad (5.68)$$

Ladung ist also ein Lorentz-Skalar. Ein Strom  $\vec{j}'$  in  $\Sigma'$  kann als relativistischer Effekt der bewegten Ladung interpretiert werden.

Als zweiten Schritt verallgemeinern wir die Potentiale zu einem relativistischen Objekt. Wir beginnen wieder mit der bekannten Form  $\phi(\vec{x}, t)$  und  $\vec{A}(\vec{x}, t)$  und definieren

$$A^\alpha = (\phi, \vec{A}) \equiv (A^0, A^1, A^2, A^3) \quad (5.69)$$

Die beiden Maxwell-Gleichungen für die Potentiale sind

$$\square \phi = \frac{4\pi}{c} c\rho \quad \text{und} \quad \square \vec{A} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\square A^\alpha = \frac{4\pi}{c} j^\alpha} \quad (5.70)$$

Der entscheidende Schritt ist wieder die Symmetrie-Betrachtung: Wir wissen dass der Differentialoperator  $\square$  ein Lorentz-Skalar ist. Da  $j^\alpha$  ein 4-Vektor ist, muss also auch  $A^\alpha$  ein 4-Vektor sein. Er transformiert als

$$A^{\alpha'} = \Lambda^{\alpha'}_{\beta} A^{\beta} \quad (5.71)$$

Diese Relation lässt sich in die Transformationen für  $\phi$  und  $\vec{A}$  aufspalten. Eine Komplikation der Potentiale ist die Eichfreiheit. Die Eichsymmetrie wird durch die Transformation

$$\phi \rightarrow \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \chi \quad \vec{A} \rightarrow \vec{A} + \vec{\nabla} \chi \quad \Rightarrow \quad \boxed{A^\alpha \rightarrow A^\alpha - \partial^\alpha \chi} \quad \text{mit} \quad \partial^\alpha = (\partial^0, -\vec{\nabla}) \quad (5.72)$$

beschrieben. In der relativistischen Schreibweise liest sich die Bedingung für die Lorentz-Eichung als

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \phi + \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\partial_\alpha A^\alpha = 0} \quad \text{mit} \quad \partial_\alpha = (\partial_0, \vec{\nabla}) \quad (5.73)$$

Als letztes Objekt bleibt noch der Feldstärketensor. Hier folgen wir nicht unserem Rezept, sondern konstruieren aus dem 4-Potential eine geeignete eichinvariante Größe. Wir finden dass

$$\boxed{F^{\alpha\beta} = \partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha} \quad (5.74)$$

diese Bedingung erfüllt,

$$\begin{aligned} F^{\alpha\beta} &\rightarrow \partial^\alpha (A^\beta - \partial^\beta \chi) - \partial^\beta (A^\alpha - \partial^\alpha \chi) \\ &= F^{\alpha\beta} - \partial^\alpha \partial^\beta \chi - \partial^\beta \partial^\alpha \chi = F^{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (5.75)$$

$F^{\alpha\beta}$  ist ein Tensor zweiter Stufe, denn  $\partial^\alpha$  und  $A^\beta$  sind 4-Vektoren. Er transformiert von einem Inertialsystem  $\Sigma$  nach  $\Sigma'$  als

$$\begin{aligned} F^{\alpha'\beta'} &= \partial^{\alpha'} A^{\beta'} - \partial^{\beta'} A^{\alpha'} \\ &= (\Lambda^{\alpha'}_{\gamma} \partial^\gamma) (\Lambda^{\beta'}_{\delta} A^\delta) - (\Lambda^{\beta'}_{\gamma} \partial^\gamma) (\Lambda^{\alpha'}_{\delta} A^\delta) = \Lambda^{\alpha'}_{\gamma} \Lambda^{\beta'}_{\delta} (\partial^\gamma A^\delta - \partial^\delta A^\gamma) = \Lambda^{\alpha'}_{\gamma} \Lambda^{\beta'}_{\delta} F^{\gamma\delta} \end{aligned} \quad (5.76)$$

Wenn wir wirklich in relativistischer Elektrodynamik rechnen, dann ist der Feldstärketensor das zentrale Objekt und wir schreiben ihn typischerweise nicht in Komponenten aus. Trotzdem können wir einige Eigenschaften seiner Komponenten ablesen

$$\begin{aligned} F^{\alpha\alpha} &= \partial^\alpha A^\alpha - \partial^\alpha A^\alpha = 0 \\ F^{0i} &= \partial^0 A^i - \partial^i A^0 = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} A^i - \partial^i \phi \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} F^{01} &= \partial_x \phi + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} A_x = -E_x \\ F^{02} &= -E_y \\ F^{03} &= -E_z \end{aligned} \end{aligned} \quad (5.77)$$

Die Definition des Feldstärketensors  $F^{ij} = \partial^i A^j - \partial^j A^i$  ist in der Tat ähnlich der Definition von  $\vec{\nabla} \times \vec{A}$  in Komponentenschreibweise. Insgesamt erhalten wir

$$F^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (5.78)$$

Wir können uns also wieder die Frage stellen, was  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  bedeuten. Bislang haben wir sie als Vektorfelder in  $\mathbb{R}^3$  betrachtet. Aus Sicht der relativistischen Beschreibung sind sie bestimmte Komponenten des fundamentalen Lorentz-Tensors  $F^{\alpha\beta}$ . Ihr Transformationsverhalten ist durch dass

$$F^{\alpha'\beta'} = \Lambda^{\alpha'}_{\gamma} \Lambda^{\beta'}_{\delta} F^{\gamma\delta} \quad (5.79)$$

bestimmt Für allgemeine Lorentz-Transformationen ergeben sich hieraus (nach expliziter Rechnung) die Transformationseigenschaften

$$\begin{aligned}\vec{E}'_{\perp} &= \gamma \left( \vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B} \right)_{\perp} & \vec{E}'_{\parallel} &= \vec{E}_{\parallel} \\ \vec{B}'_{\perp} &= \gamma \left( \vec{B} - \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{E} \right)_{\perp} & \vec{B}'_{\parallel} &= \vec{B}_{\parallel}\end{aligned}\quad (5.80)$$

mit den Komponenten  $\parallel, \perp$  definiert als parallel beziehungsweise senkrecht zu  $\vec{v}$ . Wie wir schon zu Beginn anhand der Form der Coulomb-Kraft und Lorentz-Kraft vermutet haben, mischen also  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  unter Lorentz-Transformationen mit endlicher Relativgeschwindigkeit.

Als letzten Schritt schreiben wir nun noch die Maxwell-Gleichungen in relativistischer Form und zeigen damit, dass die Elektrodynamik Lorentz-invariant ist. Wir beginnen mit

$$\begin{aligned}\partial_{\alpha} F^{\alpha\beta} &= \partial_{\alpha} (\partial^{\alpha} A^{\beta} - \partial^{\beta} A^{\alpha}) \\ &= \underbrace{\partial_{\alpha} \partial^{\alpha}}_{=\square} A^{\beta} - \partial^{\beta} \partial_{\alpha} A^{\alpha}\end{aligned}\quad (5.81)$$

und erhalten in der Lorentz-Eichung mit  $\partial_{\alpha} A^{\alpha} = 0$  für die inhomogenen Maxwell-Gleichungen

$$\boxed{\partial_{\alpha} F^{\alpha\beta} = \square A^{\beta} = \frac{4\pi}{c} j^{\beta}}\quad (5.82)$$

Zusätzlich erfüllt der Feldstärke-Tensor die sogenannte Bianchi-Identität

$$\begin{aligned}\boxed{\partial_{\alpha} F_{\beta\gamma} + \partial_{\beta} F_{\gamma\alpha} + \partial_{\gamma} F_{\alpha\beta} = 0} \\ \Leftrightarrow \quad \partial_{\alpha} (\partial_{\beta} A_{\gamma} - \partial_{\gamma} A_{\beta}) + \partial_{\beta} (\partial_{\gamma} A_{\alpha} - \partial_{\alpha} A_{\gamma}) + \partial_{\gamma} (\partial_{\alpha} A_{\beta} - \partial_{\beta} A_{\alpha}) = 0\end{aligned}\quad (5.83)$$

Man kann durch explizites Ausrechnen zeigen, dass sie den homogenen Maxwell-Gleichungen entspricht, die wir durch die Definitionen der Potentiale automatisch erfüllt hatten

$$\begin{aligned}\partial_1 F_{23} + \partial_2 F_{31} + \partial_3 F_{12} = 0 & \Leftrightarrow \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ \partial_0 F_{ij} + \partial_j F_{j0} + \partial_j F_{0i} = 0 & \Leftrightarrow \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\end{aligned}\quad (5.84)$$

Eine einfachere Form der Bianchi-Identität erhält man durch die Definition eines dualen Tensors mit Hilfe des total antisymmetrischen oder Levi-Civita-Tensors

$$\tilde{F}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} F_{\gamma\delta}\quad (5.85)$$

Dann ist die Bianchi-Identität äquivalent zu

$$\partial_{\alpha} \tilde{F}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \partial_{\alpha} F_{\gamma\delta} = 0\quad (5.86)$$

und die Maxwellgleichungen bekommen die wunderschön einfache Form

$$\boxed{\partial_{\alpha} F^{\alpha\beta} = \frac{4\pi}{c} j^{\beta}} \quad \text{und} \quad \boxed{\partial_{\alpha} \tilde{F}^{\alpha\beta} = 0}\quad (5.87)$$

Wenn man den dualen Feldstärke-Tensor in Komponenten ausschreibt

$$\tilde{F}^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -B_x & -B_y & -B_z \\ B_x & 0 & E_z & -E_y \\ B_y & -E_z & 0 & E_x \\ B_z & E_y & E_x & 0 \end{pmatrix}\quad (5.88)$$

dann stellt man fest, dass er durch eine elektrisch-magnetische Dualität mit dem originalen Feldstärke-Tensor verknüpft ist

$$\vec{E} \leftrightarrow \vec{B} \quad \Leftrightarrow \quad F^{\alpha\beta} \leftrightarrow \tilde{F}^{\alpha\beta} \quad (5.89)$$

Die Maxwellgleichungen im Vakuum sind symmetrisch unter dieser Dualität. Diese Symmetrie ist dadurch gebrochen, dass in der Natur offenbar keine magnetische Ladung oder magnetischer Strom vorkommt. Einen Review-Artikel zu diesem Thema finden Sie unter [www.arxiv.org/1204.3077.pdf](http://www.arxiv.org/1204.3077.pdf).

Wir nutzen die Lorentz-Invarianz der Maxwell-Gleichungen in der Praxis, um ein Inertialsystem zu finden, in dem sie sich besonders einfach lösen lassen. In den Übungen geben wir dazu ein Beispiel.

## 5.5 Elektromagnetische Wellen

In der relativistischen Schreibweise betrachten wir zum Schluss noch elektromagnetische Wellen, die wir ja schon in Form der üblichen Potentiale erhasht hatten. Wir erinnern uns kurz daran, dass sie Lösungen der Gleichung

$$\square A^\alpha = \frac{4\pi}{c} j^\alpha \quad (5.90)$$

sind und eine Superposition der allgemeinen homogenen Gleichung und einer speziellen Lösung einer inhomogenen Gleichung, beschrieben durch das retardierte Potential, waren

$$A^\alpha = A_{\text{hom}}^\alpha + A_{\text{spez}}^\alpha \quad \text{mit} \quad \square A_{\text{hom}}^\alpha = 0 \quad (5.91)$$

Bevor wir diese Wellen relativistisch betrachten, klären wir noch ein Problem. Die Bedingung für die Lorentz-Eichung  $\partial_\alpha A^\alpha = 0$  hebt nämlich die Eichfreiheit  $A^\alpha \rightarrow A^\alpha - \partial^\alpha \chi$  noch nicht vollständig auf, denn die Verschiebung

$$A^\alpha \rightarrow A^\alpha - \partial^\alpha \chi_{\text{hom}} \quad \text{mit} \quad \square \chi_{\text{hom}} = 0 \quad (5.92)$$

ändert nichts an der Eichbedingung  $\partial_\alpha A^\alpha = 0$ . Wir brauchen noch eine weitere Bedingung, zum Beispiel die Bedingung der Landau-Eichung

$$\partial^0 \chi_{\text{hom}} = \phi \quad \Leftrightarrow \quad A^0 = 0, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \quad (5.93)$$

Die Tatsache dass wir zwei Eich-Bedingungen benötigen heißt dass von den vermeintlich vier Komponenten von  $A^\alpha$  nur zwei auch physikalische Freiheitsgrade sind. Für unsere elektromagnetische Welle bedeutet das, dass sie zwei unabhängige Polarisierungen hat.

Wir betrachte nun die allgemeine Lösung der Wellengleichung im Vakuum ( $j^\alpha \equiv 0$ )

$$\begin{aligned} \vec{A}(\vec{x}, t) &= \text{Re} \int d^3k \vec{A}_0(\vec{k}) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} \quad \text{mit} \quad \omega = c|\vec{k}| \\ A^0(\vec{x}, t) &= 0 \end{aligned} \quad (5.94)$$

Sie ist eine Superposition von ebenen Wellen mit

- Wellenzahl  $|\vec{k}| = 2\pi/\lambda$  oder Wellenlänge  $\lambda$
- Frequenz  $\nu = \omega/(2\pi)$
- Ausbreitungsgeschwindigkeit  $c$

Der letzte Punkt ist wichtig, weil wir bislang noch nicht gezeigt haben, dass die universelle Geschwindigkeit in den Lorentz-Transformationen etwas mit der Lichtgeschwindigkeit zu tun hat.

Auch wenn es für unsere Betrachtung der relativistischen Elektrodynamik nicht zentral ist, sehen wir uns noch die Polarisierung elektromagnetischer Wellen an. Der Einfachheit halber betrachten wir monochromatische Wellen mit festem  $\lambda = 2\pi/|\vec{k}|$  und entsprechendem  $\omega$

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \text{Re} \left[ \vec{A}_0(\vec{k}) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} \right] \quad (5.95)$$

Aus der zweiten Eichbedingung  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$  folgt, dass es sich um eine transversale Welle handelt

$$\vec{k} \cdot \vec{A}_0 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{k} \perp \vec{A}_0 \quad (5.96)$$

Die zugehörige elektrischen und magnetischen Feldstärken im Vakuum sind

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\underbrace{\vec{\nabla}\phi}_{=0} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \text{Re} \left[ i \frac{\omega}{c} \vec{A}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} \right] = \text{Re} \left[ i |\vec{k}| \vec{A}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} \right] \\ \vec{B} &= \vec{\nabla} \times \vec{A} = \text{Re} \left[ i \vec{k} \times \vec{A}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} \right] \end{aligned} \quad (5.97)$$

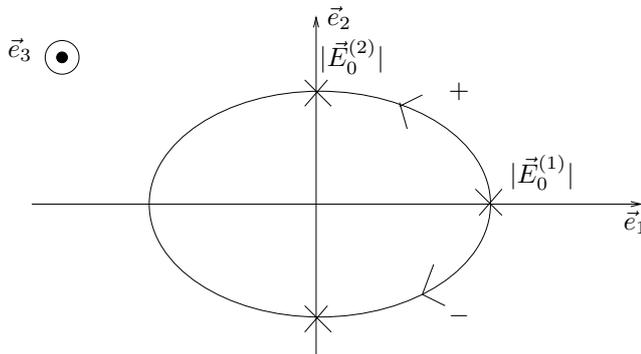
Daraus folgt für die Richtungen und Beträge der Felder einfach

$$|\vec{B}| = |\vec{E}| \quad \vec{B} \perp \vec{E} \quad \vec{B} \perp \vec{k} \quad \vec{E} \perp \vec{k} \quad (5.98)$$

Zum Schluss berechnen wir noch die Polarisation der Welle, beginnend mit der allgemeinen komplexen Darstellung in Form zweier reeller, zeitlich konstanter Vektorfelder  $\vec{E}_0^{(1)} \perp \vec{k}$  und  $\vec{E}_0^{(2)} \perp \vec{k}$

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{x}, t) &= \text{Re} \left[ \left( \vec{E}_0^{(1)} + i \vec{E}_0^{(2)} \right) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} \right] \\ &= \text{Re} \left[ \left( \vec{E}_0^{(1)} + i \vec{E}_0^{(2)} \right) \left( \cos(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t) + i \sin(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t) \right) \right] \\ &= \vec{E}_0^{(1)} \cos(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t) - \vec{E}_0^{(2)} \sin(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t) \end{aligned} \quad (5.99)$$

Durch Multiplikation mit einer konstanten Phase kann man weiterhin  $\vec{E}_0^{(1)} \perp \vec{E}_0^{(2)}$  einstellen, so dass die Richtungen von  $\vec{E}_0^{(1)}$ ,  $\vec{E}_0^{(2)}$  und  $\vec{k}$  ein kartesisches Koordinatensystem bilden. Die einzige Freiheit ist die Orientierung von  $\vec{E}_0^{(2)}$



Das elektrische Feld ist also elliptisch polarisiert. Zwei Spezialfälle sind

$$\begin{aligned} |\vec{E}_0^{(1)}| &= |\vec{E}_0^{(2)}| && \Rightarrow \text{rechts/links zirkuläre Polarisation} \\ |\vec{E}_0^{(1,2)}| &= 0 && \Rightarrow \text{lineare Polarisation} \end{aligned} \quad (5.100)$$