

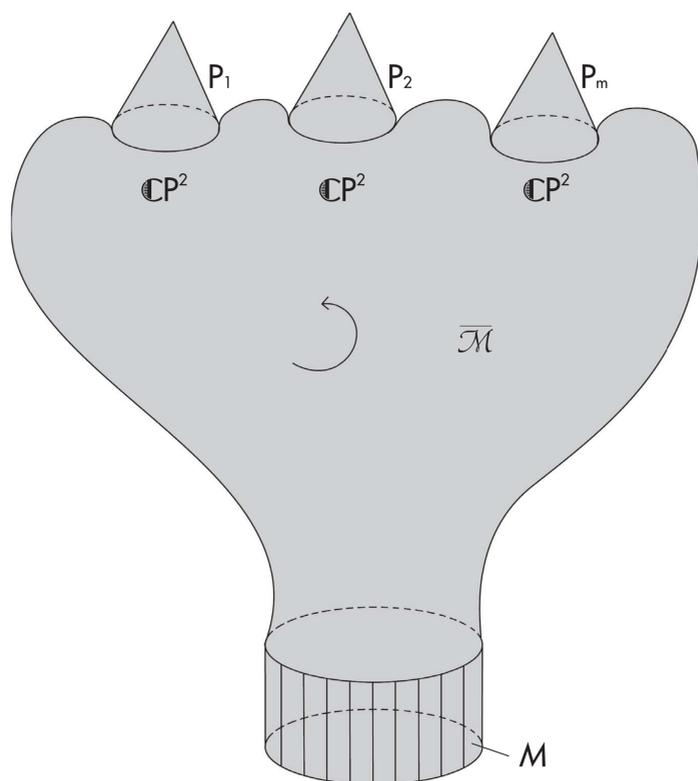
### Yang-Mills-Theorie und Topologie

Die vier **fundamentalen Wechselwirkungen** der Physik (Gravitation, elektromagnetische, schwache und starke Wechselwirkung) unterscheiden sich phänomenologisch (z.B. in ihrer Stärke und in ihrer Reichweite) zwar wesentlich, doch liegt ihnen ein einheitliches geometrisches Konzept zugrunde. Dieses lässt sich naturphilosophisch als Nahwirkungsprinzip bezeichnen. Es besagt, daß die Wechselwirkung zwischen zwei Teilchen nicht direkt erfolgt, sondern durch ein Mediator- oder Eichfeld übertragen wird.

Die **Yang-Mills-Gleichungen** bestimmen das dynamische Verhalten der Eichfelder der starken Wechselwirkung (Wechselwirkung, die die Atomkerne zusammenhält). Es handelt sich hierbei um ein System von nichtlinearen Differentialgleichungen auf der vierdimensionalen Raumzeit  $M$ . Dieses kann man sich als „Verallgemeinerung“ der Maxwell-Gleichungen zur Behandlung der elektromagnetischen Phänomene vorstellen.

Die **Topologie** ist ein Gebiet der Mathematik zur Untersuchung der qualitativen Eigenschaften von geometrischen Strukturen, d. h. man fragt nicht „wie groß etwas ist“, sondern eher ob es Löcher hat oder ob man es in Teile zerlegen kann.

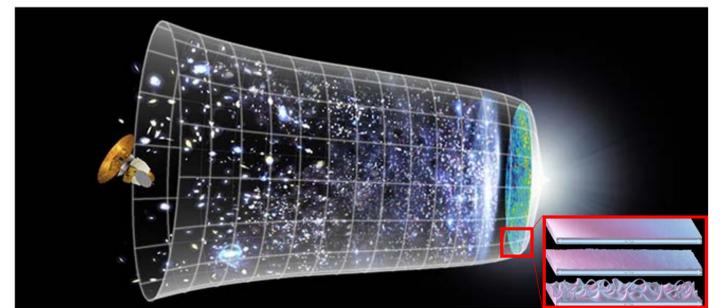
Die **Donaldson-Theorie** verknüpft diese beiden scheinbar völlig separaten Welten. Das Bestreben, alle Lösungen der Yang-Mills-Gleichungen von einem bestimmten Typ (Instantonen) zu finden, hat zu tiefen neuen Einsichten auf dem Gebiet der Topologie von glatten vierdimensionalen Mannigfaltigkeiten geführt. Aus der Struktur des Raumes  $\mathcal{M}$  der Instanton-Lösungen kann man nämlich Rückschlüsse über die Struktur von  $M$  ziehen.



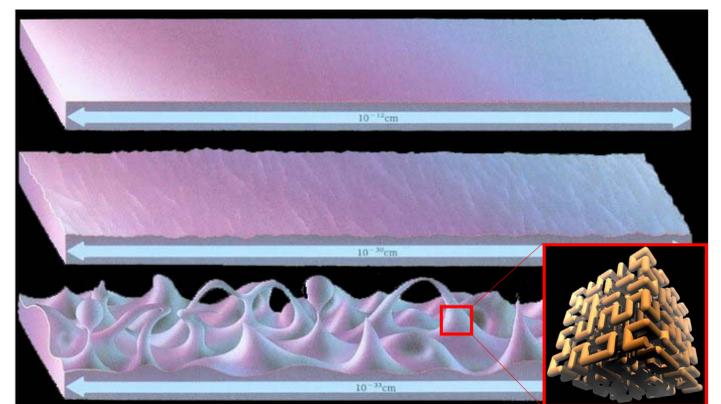
Die obige Abbildung illustriert die Struktur des Lösungsraumes (fünfdimensionaler Raum mit Singularitäten, dessen Rand  $M$  ist).

### Quantentheorie, Raum und Zeit

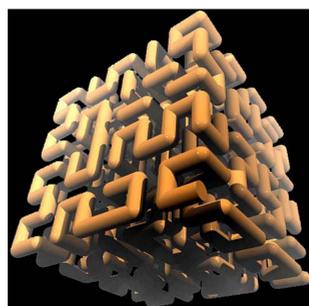
**Urknall-Szenario:** Die allgemeine Relativitätstheorie und astronomische Beobachtungen deuten darauf hin, dass unser Universum vor endlicher Zeit aus einem Anfangszustand hervorgegangen ist, bei dem alle Energie und Materie bei einer extrem hohen Temperatur auf einen nahezu punktförmigen Raumbereich zusammengepresst war, viele Größenordnungen kleiner als ein Atomkern.



**Fluktuierende Geometrie:** Die Physik der Materie und der Struktur von Raum und Zeit im Anfangszustand ist unverstanden. Es gibt aber aus theoretischen Überlegungen deutliche Hinweise darauf, dass die Begriffe von Raum und Zeit von ganz anderer Art sein müssten als bisher in der Physik bekannt. Den Raum kann man sich auf den kleinsten Skalen, die bisher im Labor oder in Teilchenbeschleunigern sondierbar sind ( $10^{-15}$  cm), als vollkommen glatt vorstellen. Auf noch viel kleineren räumlichen Skalen, wie sie im Urknall-Anfangszustand vorherrschen ( $10^{-33}$  cm), scheint der Raum aufgrund von Quanteneffekten zu „fluktuieren“.



**Nichtkommutative Geometrie:** Die Vorstellung, dass die Struktur von Raum und Zeit auf extrem kleinen Skalen fluktuiert, bedeutet, dass Raum- und Zeitmessung quantenphysikalischen Unschärferelationen unterliegen. Die geometrischen Größen zur Beschreibung von Raum und Zeit sind dann selber quantenphysikalischer Natur. Dies hat eine neue mathematische Forschungsrichtung inspiriert, die „nichtkommutative Geometrie“. Hierbei steht die



grundsätzlich quantenphysikalische Natur der geometrischen Größen im Mittelpunkt. Nichtkommutative Geometrien besitzen neuartige Symmetriestrukturen die helfen können, die paradoxe Situation beim Urknall zu verstehen.