Theoretische Physik 4 (Quantentheorie)

Sommersemester 2014

Übungsblatt 4

Aufgabe 4.1: Nebelkammer

Die Spuren, die von Elektronen in der Nebelkammer erzeugt werden, bestehen aus kleinen Tröpfchen von etwa 1 μm Durchmesser. Verwenden Sie das, um zu zeigen, dass die Spur, die ein Elektron mit einer kinetischen Energie von 1 keV hinterlässt, von einer klassischen Trajektorie praktisch nicht zu unterscheiden ist. *4 Punkte.*

Aufgabe 4.2: Lineare Operatoren

Welche der folgenden Operatoren, die wie angegeben auf Wellenfunktionen wirken, sind linear?

(a) $(A\psi)(x) = x\psi(x)$

(b) $(B\psi)(x) = x^2\psi(x)$

(c) $(C\psi)(x) = (x+a)\psi(x)$

(d) $(D\psi)(x) = x\psi(x) + a$

(e) $(E\psi)(x) = \overline{\psi(x)}$

(f) $(F\psi)(x) = \psi(x) \cdot \psi(-x)$

(g) $(G\psi)(x) = \int f(x-y)\, \psi(y)\, \mathrm{d}y$

(h) $H = G^2$.

4 Punkte.

Aufgabe 4.3: Adjungierter Operator I

Sei A eine komplexe $n \times n$-Matrix. Benutzen Sie die Definition

$$\langle v|Aw\rangle = \langle A^\dagger v|w\rangle \qquad \forall v, w \in \mathbb{C}^n \tag{1}$$

(wobei $\langle v|w\rangle = \sum_{i=1}^n \overline{v_i} w_i$), um die Matrixelemente von $A^\dagger$ zu finden. *2 Punkte.*

Aufgabe 4.4: Adjungierter Operator II

Finden Sie die Adjungierten der folgenden Operatoren auf Wellenfunktionen

(a) $(A\psi)(x) = \mathrm{e}^{-x^2} \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}(x) \quad (x \in \mathbb{R})$

(b) $(B\psi)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+\mathrm{i}(x-y)}\, \psi(y)\, \mathrm{d}y \quad (x \in \mathbb{R})$

(c) Für $x \in \mathbb{R}^3$, $R \in O(3)$ (d.h. $R^{\mathrm{T}} = R^{-1}$): $(C\psi)(x) = \psi(R^{-1}x)$.

3 Punkte.

Aufgabe 4.5: Adjungierter Operator III

Was ist der Adjungierte des Operators

$$A = \mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\phi} \tag{2}$$

auf dem Raum der stetig differenzierbaren Funktionen auf dem Intervall $[0, 2\pi]$? Unter welcher Randbedingung ist A hermite'sch? *3 Punkte.*

Aufgabe 4.6: Zeitentwicklungsoperator

Zeigen Sie, dass der Integralkern (mit $a = \hbar/2m$)

$$u_\varepsilon(t, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) = (4\pi(\varepsilon + \mathrm{i}at))^{-d/2} \exp\left(-\frac{1}{4}\frac{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|^2}{\varepsilon + \mathrm{i}at}\right) \tag{3}$$

für $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ die Gleichung

$$u_\varepsilon(t, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}') = \int u_{\varepsilon-\delta}(t - s, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})\, u_\delta(s, \boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}')\, \mathrm{d}^3\boldsymbol{y} \tag{4}$$

erfüllt. Integrieren Sie beide Seiten, multipliziert mit einer integrierbaren Funktion $\psi_0(\boldsymbol{x}')$, über $\boldsymbol{x}'$ und interpretieren Sie für $\varepsilon \to 0$, $\delta \to 0$ das Resultat. *4 Punkte.*

Abgabe am 20.05.2014, vor Beginn der Vorlesung. Viel Erfolg!