Theoretische Physik 4 (Quantentheorie)

Sommersemester 2014

Übungsblatt 9

Aufgabe 9.1: Funktionen von Operatoren

a) A und B seien selbstadjungierte Operatoren. A habe eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren. Zeigen Sie: wenn $[A, B] = 0$, dann gilt auch $[f(A), B] = 0$ für jede Funktion f, die auf dem Spektrum von A definiert ist.

b) Zeigen Sie für endlichdimensionale Räume $\mathcal{H}$: wenn A ein Operator auf $\mathcal{H}$ ist und U ein unitärer Operator auf $\mathcal{H}$, dann ist

$$e^{UAU^\dagger} = Ue^A U^\dagger \,.$$

c) Zeigen Sie: wenn A und B den Kommutator $[A, B] = \lambda A$ haben, dann gilt

$$Ae^B = e^\lambda e^B A$$

(hier ist B als beschränkt angenommen, sodass die Exponentialreihe verwendet werden kann).

4 *Punkte.*

Aufgabe 9.2: Nichtexistenz des Phasenoperators

Gegeben sei die Hamilton-Funktion des klassischen harmonischen Oszillators:

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\, q^2 \,.$$

a) Zeigen Sie, dass die durch

$$q(\phi, I) = \sqrt{\frac{2I}{m\omega}}\cos\phi\,, \quad p(\phi, I) = -\sqrt{2Im\omega}\,\sin\phi$$

definierte Transformation zu den Wirkungs- und Winkelvariablen $I > 0$ bzw. $\phi \in (-\pi, \pi]$ lokal kanonisch ist, d.h. $\{\phi, I\} = 1$.

b) Drücken Sie die klassischen Analoga

$$\bar{a} = \frac{m\omega q - \mathrm{i}p}{\sqrt{2m\omega}} \quad \text{und} \quad a = \frac{m\omega q + \mathrm{i}p}{\sqrt{2m\omega}}$$

der Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren $a^\dagger$ und a durch ϕ und I aus.

c) Drücken Sie I als Funktion von $\bar{a}$ und a aus. Welchen Operator $\mathcal{O}$ erhält man, wenn man $\bar{a}$ und a durch die entsprechenden Operatoren $a^\dagger$ und a ersetzt?

d) Zeigen Sie, dass es keinen selbstadjungierten Operator Φ gibt, der die der klassischen Poissonklammer $\{\phi, I\} = 1$ entsprechende kanonische Vertauschungsrelation $[\Phi, \mathcal{O}] = \mathrm{i}\hbar$ erfüllt.

6 Punkte.

Aufgabe 9.3: Duhamel-Formel

Sei H ein zeitunabhängiger Hamilton-Operator mit einer Zerlegung in zwei Anteile H_0 und V.

a) Zeigen Sie, dass gilt:

$$e^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}tH} = e^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}tH_0} - \frac{\mathrm{i}}{\hbar}\int_0^t ds\, e^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}(t-s)H_0}\, V\, e^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}sH}\,.$$

b) Iterieren Sie die Formel bis zur zweiten Ordnung in V und vergleichen Sie mit dem Resultat der zeitgeordneten Entwicklung im Wechselwirkungsbild.

4 Punkte.

Aufgabe 9.4: Goldene Regel für periodische Potentiale

Sei H_0 ein zeitunabhängiger Hamilton-Operator, und sei $V(t)$ ein periodisches Störpotential, das zur Zeit $t = 0$ eingeschaltet wird und klein gegenüber H_0 ist:

$$V(t) = \theta(t)\, \left(A\, e^{-\mathrm{i}\omega t} + A^\dagger\, e^{\mathrm{i}\omega t}\right) \quad \text{mit } \omega > 0\,.$$

Das System sei für $t < 0$ im Eigenzustand

$$|m, t\rangle = e^{-\mathrm{i}H_0 t/\hbar}\,|m\rangle = e^{-\mathrm{i}E_m t/\hbar}\,|m\rangle$$

des ungestörten Hamilton-Operators H_0. Bestimmen Sie Wahrscheinlichkeit, das System zur Zeit $t > 0$ im Zustand

$$|n, t\rangle = e^{-\mathrm{i}H_0 t/\hbar}\,|n\rangle = e^{-\mathrm{i}E_n t/\hbar}\,|n\rangle$$

mit $m \neq n$ zu finden, für große Werte von t in erster Ordnung der Störungsentwicklung. Diskutieren Sie die beiden Fälle $E_n - E_m \approx \pm\hbar\omega$.

6 Punkte.

Abgabe am 24.06.2014 vor Beginn der Vorlesung. Viel Erfolg!