Mathematische Begleitvorlesung zur Experimentalphysik II

SS 2001

Michael G. Schmidt
Universität Heidelberg, Institut für Theoretische Physik,
Philosophenweg 16, 69121 Heidelberg
(e-mail: m.g.schmidt@thphys.uni-heidelberg.de)

Bearbeitung:
Peter Melchior
Dominikus Heinzeller

7. Juli 2005

Dieses Skript knüpft direkt an die Vorlesungsnotizen der mathematischen Begleitvorlesung zur Experimentalphysik I im Wintersemester 2000/2001 an. Die Numerierung wird deshalb fortlaufend weitergeführt.

Inhaltsverzeichnis

7. Coulombkraft und Gauß'sches Gesetz für das elektrostatische Feld; Flächen- und Volumenintegration

7.1. Coulombkraft, das elektrische Feld, allgemeine Felder

In der Mechanik (und der Experimentalphysik I) geht man von dem *Newton'schen Kraftgesetz* aus:

a). $\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \vec{F}$ oder konkreter

$$m\frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} = \boxed{m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)}$$

mit noch allgemein gehaltenen Kräften $\vec{F}$. In einem Inertialsystem $\{\vec{e}_i\}$ gilt für die kartesischen Koordinaten $\{x_i\}$ des (abstrakten) Vektors $\vec{r} = \sum_i x_i\vec{e}_i$:

$$m\ddot{x}_i = F_i(x_k, \dot{x}_j, t), \tag{7.1}$$

also keine Beschleunigung ohne Kräfte.

Gleichung (7.1) ist eine Differentialgleichung zweiter Ordnung für den (Orts-)Vektor in Abhängigkeit der Zeit. Ein physikalischer Vektor besitzt ein klar definiertes Verhalten unter Drehungen: Die Newton'sche Bewegungsgleichung ist *forminvariant* unter Drehungen, sofern man die Kräfte mitdreht – auch die Kraft ist ein Vektor!

Wir haben bereits einige Kräfte kennengelernt:

- Die Gravitationskraft (Newton)

  $$\boxed{\vec{F} = -\gamma\frac{m\,M}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}}$$

  ist die Kraft eines Zentralkörpers der Masse M auf einen Körper der Masse m im Abstand $\vec{r}$.

  Bemerkung: Zur Berechnung der Gravitationskraft benutzen wir das Modell einer punktförmigen Masse mit Eigenvolumen $V = 0$.

- Die Federkraft bei Auslenkung $\vec{r} - \vec{r}_0$ aus der Ruhelage $\vec{r}_0$ ist

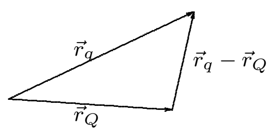
  $$\boxed{\vec{F} = -k(\vec{r} - \vec{r}_0)} \tag{7.2}$$

  Bemerkung: Dies gilt nur bei kleinen Auslenkungen aus der Ruhelage, denn es handelt sich hier um eine lineare Näherung durch Taylor-Entwicklung. Allgemein ist $\vec{F} = \mathbb{K}(\vec{r} - \vec{r}_0)$ mit einer 3×3-Matrix $\mathbb{K}$.

b).

- Die Coulombkraft zwischen zwei (statischen) Ladungen q und Q mit dem Abstandsvektor $\vec{r} = \vec{r}_q - \vec{r}_Q$ ist ähnlich der Gravitations-Kraft, nur viel stärker und auch abstoßend:

  $$\boxed{\vec{F}_{\text{Coulomb}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\,Q}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}}$$



Die elektrische Ladung ist eine Eigenschaft der Körper, welche *unabhängig* von der Masse ist: So besitzen Positronen und Protonen gleiche Ladungen bei verschiedenen Massen. Die (ruhe)masselosen Photonen haben keine elektrische Ladung.

Anmerkung: In der modernen Quantenchromodynamik, der Theorie für starke Wechselwirkungen, haben Gluonen zunächst keine Masse, aber eine verallgemeinerte Ladung

Wir gehen jetzt näher auf die Coulombkraft ein. Vorerst wollen wir uns auf die *Elektrostatik*, die Beschreibung von Kraftwirkungen zwischen unbewegten elektrischen Ladungen, konzentrieren. Dazu dient uns das sogenannte Nahwirkungsbild:

Wir stellen uns vor, die Ladung Q erzeugt ein *elektrisches Feld*

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}(\vec{r})}{q} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{|\vec{r}-\vec{r}_Q|^2} \frac{(\vec{r}-\vec{r}_Q)}{|\vec{r}-\vec{r}_Q|} \tag{7.3}$$

welches dann auf die Probeladung q die Kraft $q\,\vec{E}(\vec{r}_q) = \vec{F}(\vec{r}_q)$ ausübt. Dabei ist q so klein zu halten, daß es nicht zu Rückwirkungen auf die Lage der Ladung Q kommt.

Die wirkliche eigenständige Existenz eines solchen Feldes wird erst in der *Elektrodynamik* bei der Diskussion elektromagnetischer Wellen klar, wobei die Existenz der erzeugenden Ladungen in den Hintergrund tritt. Das Ziel ist hierbei z. B. die Behandlung von Radiowellen, ohne auf Details ihrer Erzeugung einzugehen.

c). Der Begriff *Feld* impliziert einen gegeben („angehefteten") Wert des Feldes an jedem Punkt des Raumes. Das Feld ist also eine Funktion der Raumkoordinaten, z. B.

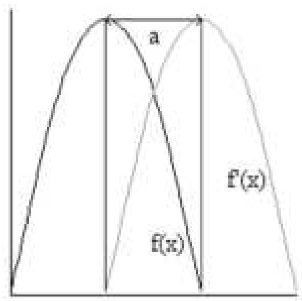
- bei einem Temperaturfeld der Wert der Temperatur
- bei einem Druckfeld der Wert des Druckes
- bei einem Strömungsfeld die Komponenten des Geschwindigkeitsvektors der Strömung (Gas, Flüssigkeit)
- in der Elektrostatik die Komponenten des elektrischen Feldes

Wir unterscheiden

- Skalarfelder: Im Sinne der Definition beschreiben wir das Feld $f(\vec{r})$ in Abhängigkeit des abstrakten Ortsvektors $\vec{r}$. In der Physik hat sich jedoch eine äquivalente (aber etwas schlampige) Schreibweise eingebürgert[1]: $f(x_1, x_2, x_3) = f(\vec{x}) \equiv f(\vec{r})$.

  Bei Drehungen des Bezugsystems erhält man eine neue Funktion f' und es gilt

$$\boxed{f'(x_1', x_2', x_3') = f(x_1, x_2, x_3)}$$



[1] Physiker lieben Koordinaten!

(„Neues f in neuen Koordinaten = Altes f in alten Koordinaten")

Beispiel (zur Vereinfachung mit Translationen): f sei jetzt das Feld einer Variablen x. Bei einer Translation des Koordinatenursprungs um σ gilt dann $f'(x' = x + \sigma) = f(x)$, siehe vorangehende Abbildung.

Bemerkung: In [4] ist dieser Abschnitt mit Vorsicht zu genießen!

- Vektorfelder: $\vec{V}(\vec{r})$ wird in Komponenten zerlegt und mit $V_i(x_1, x_2, x_3)$, $(i = 1, 2, 3)$ oder kurz mit $\vec{V}(\vec{x})$ bzw. $\vec{V}(\vec{r})$, s. o. bezeichnet.

  Bei Drehungen entsteht ein gedrehtes Vektorfeld in gedrehten Koordinaten, was einer Drehung auf dem Vektorfeld in alten Koordinaten entspricht:

$$\vec{V}'(\vec{x}') = \mathbb{D}\,\vec{V}(\vec{x}) \qquad \text{mit} \quad \vec{x}' = \mathbb{D}\,\vec{x}$$

$$\text{bzw.} \quad \vec{x} = \mathbb{D}^{-1}\,\vec{x}' = \mathbb{D}^T\,\vec{x}', \quad \text{da} \quad \mathbb{D}\cdot\mathbb{D}^T = 1$$

$$\Longrightarrow \boxed{\vec{V}'(\mathbb{D}\,\vec{x}) = \mathbb{D}\,\vec{V}(\vec{x})}$$

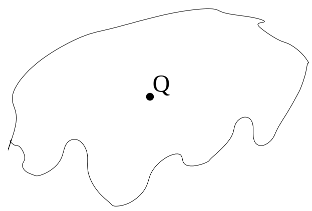
  Beispiel: Das elektrische Feld ist ein Vektorfeld!

- Tensorfelder: Zur Vollständigkeit wollen wir noch Tensorfelder, Vektorfelder mit mehreren Vektorindizes, angeben: $T_{ik}(x_1, x_2, x_3)$

7.2. Gauß'sches Gesetz, lineare Superposition

Eine *punktförmige* Ladung Q sei von der Fläche A, z. B. einer Kugeloberfläche umschlossen. Dann gilt, zunächst vereinfacht, das Gauß'sche Gesetz:

$$\boxed{\Phi = \int_A d\vec{A}\cdot\vec{E} = \frac{Q}{\varepsilon_0}} \tag{7.4}$$

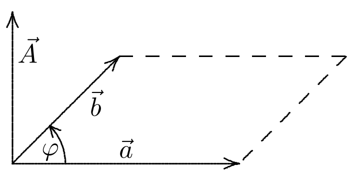


Φ wird als *elektrischer Fluß* bezeichnet. Wir wollen das nun ausgehend vom Coulmb'schen Gesetz nachrechnen.

a). Das Flächenintegral (Wdh. Kapitel 4)

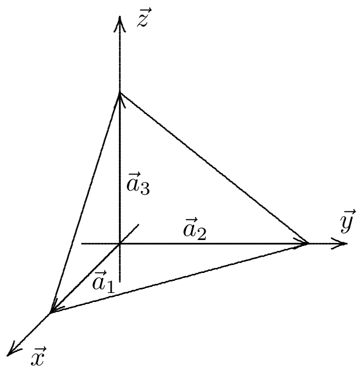
- Die Fläche A wird von zwei Vektoren aufgespannt. Man kann der Fläche in drei Dimensionen einen *Flächenvektor* zuordnen.

$$\vec{A} = \vec{a}\times\vec{b}$$



  Der Flächenvektor steht immer senkrecht auf der Fläche („Igelvektor").

- Wir zerlegen eine beliebige Fläche in kleine Flächenstücke, zum Beispiel Dreiecke mit $\Delta\vec{A} = \frac{1}{2}(\Delta\vec{a}\times\Delta\vec{b})$. Der Flächenvektor läßt sich in Flächenvektoren von Flächen in den Koordinatenebenen zerlegen:



$$\underbrace{(\vec{a}_2-\vec{a}_1)}^{\Delta\vec{a}}\times\underbrace{(\vec{a}_3-\vec{a}_1)}^{\Delta\vec{b}} = \vec{a}_2\times\vec{a}_3-\vec{a}_2\times\vec{a}_1-\vec{a}_1\times\vec{a}_3$$
$$= \underbrace{\vec{a}_2\times\vec{a}_3-\vec{a}_1\times\vec{a}_2-\vec{a}_1\times\vec{a}_3}_{\text{Summe der ins Innere des Tetraeders zeigenden Flächenvektoren}}$$

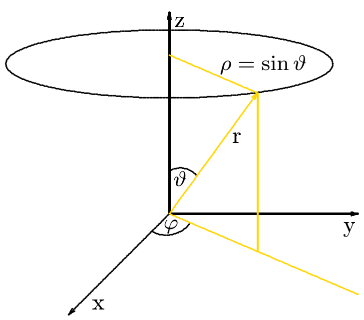
Folgerung: Die Summe der nach außen gerichteten Flächenvektoren für geschlossene Flächen (hier: Tetraederoberfläche) ist Null.

- Wir summieren die Beiträge $\Delta\vec{A}_n\cdot\vec{E}_n$, wobei $\vec{E}_n$ nach irgendeiner Vorschrift auf dem Dreieck gewählt wird.
- Durch Grenzübergang für $n\longrightarrow\infty$ erhalten wir

$$\lim_{n\to\infty}\sum_n \Delta\vec{A}_n\cdot\vec{E}_n=\int_A d\vec{A}\cdot\vec{E}$$

mit $|\Delta\vec{A}_n|\longrightarrow 0$. Hierbei muß der Limes unabhängig von Einteilung und Vorschrift für die Wahl von $\vec{E}_n$ sein, denn nur dann existiert das Flächenintegral ($\rightsquigarrow$ „anständige" Funktionen)!

b). Wir werten das Flächenintegral in Kugelkoordinaten aus, wobei $\vec{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}(Q\,\vec{r})/r^3=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}(Q\,\vec{e}_r)/r^2$ das Coulombfeld einer Punktladung Q sei.



Das Integral $\int_A d\vec{A}\cdot\vec{E}$ enthält nur die zu $\vec{e}_r$ parallelen, radialen Komponenten der Flächenstücke $d\vec{A}$. Wir arbeiten wieder mit der in der Physik üblichen, etwas nachlässigen Komponentenschreibweise von Vektoren: $\vec{r}=(x,y,z)$. Dabei unterdrücken wir nämlich die Basisvektoren $\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z$ und sparen uns so Schreibarbeit…

$$\begin{aligned} x &= r\sin\vartheta\cos\varphi\\ y &= r\sin\vartheta\sin\varphi\\ z &= r\cos\vartheta \end{aligned}$$

Wir wählen lokale Koordinatenachsen parallel zu

$$\left.\frac{\partial\vec{r}}{\partial r}\right|_{\vartheta,\varphi=\text{const}}, \quad \underbrace{\left.\frac{\partial\vec{r}}{\partial\vartheta}\right|_{r,\varphi=\text{const}}}_{\sim\ \text{Großkreis}}, \quad \underbrace{\left.\frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi}\right|_{\vartheta,r=\text{const}}}_{\sim\ \text{Kleinkreis}}.$$

Damit ergibt sich

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial r} = \begin{pmatrix}\sin\vartheta\cos\varphi\\ \sin\vartheta\sin\varphi\\ \cos\vartheta\end{pmatrix} = \vec{e}_r, \quad \frac{\partial\vec{r}}{\partial\vartheta} = r\begin{pmatrix}\cos\vartheta\cos\varphi\\ \cos\vartheta\sin\varphi\\ -\sin\vartheta\end{pmatrix} = r\,\vec{e}_\vartheta, \quad \frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi} = r\begin{pmatrix}-\sin\vartheta\sin\varphi\\ \sin\vartheta\cos\varphi\\ 0\end{pmatrix} = r\sin\vartheta\,\vec{e}_\varphi$$

und es folgt, daß $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\vartheta$ und $\vec{e}_\varphi$ wechselseitig senkrecht und normiert sind.

Es gilt $\vec{E} \parallel \vec{e}_r$ (radiale Ausrichtung des Feldes bei Kugeloberfläche). Deshalb genügt es, die Fläche senkrecht zu $\vec{e}_r$ und damit den Flächenvektor parallel zu $\vec{e}_r$ zu betrachten.

$$d\vec{A}_{\parallel\vec{e}_r} = \left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial\vartheta}d\vartheta\right)\times\left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi}d\varphi\right) = r^2\sin\vartheta\,\vec{e}_\vartheta\times\vec{e}_\varphi\,d\vartheta\,d\varphi = r^2\sin\vartheta\,\vec{e}_r\,d\vartheta\,d\varphi \tag{7.5}$$

Wie man in (7.5) sieht, zeigt der Flächenvektor wie benötigt nach außen.

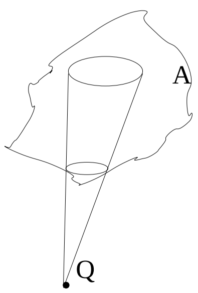
Bemerkung: Zur Erinnerung an letztes Semester [1, Kap. 4.3] sei gesagt, daß man den Flächenvektor auch wie folgt erhält[2]:

$$d\vec{A}_{\parallel\vec{e}_r} = \begin{vmatrix}\vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z\\ \cos\vartheta\cos\varphi & \cos\vartheta\sin\varphi & -\sin\vartheta\\ -\sin\vartheta\sin\varphi & \sin\vartheta\cos\varphi & 0\end{vmatrix}\cdot r^2 d\vartheta d\varphi\ldots$$

Anschaulich kann man sich auch überlegen, daß die Kugelfläche $d\vec{A}$ ein „Rechteck" mit Seitenflächen in Richtung des Großkreises ($r\,d\vartheta$) und des Kleinkreises ($\varrho\,d\varphi = r\,\sin\vartheta\,d\varphi$) darstellt.

Mit (7.5) sind wir in der Lage, das Gauß'sche Flußintegral zu berechnen:

$$\int_A d\vec{A}\cdot\vec{E} = \int_0^\pi d\vartheta\int_0^{2\pi} d\varphi\,r^2(\cancel{\vartheta},\varphi)\,\sin\vartheta\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{\cancel{r^2}}\underbrace{\vec{e}_r\cdot\vec{e}_r}_{=1} = 4\pi\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}Q = \frac{Q}{\varepsilon_0} \tag{7.6}$$



(Zur Erinnerung: $\int_0^\pi d\vartheta\,\sin\vartheta = \int_{-1}^{+1} d(\cos\vartheta) = 2$)

Wir bestätigen also für Punktladungen das Gauß'sche Gesetz für beliebige geschlossene Flächen um Q!

Für geschlossene Flächen, die Q nicht enthalten, heben sich die Beiträge der an den Durchstoßpunkten entgegengesetzten Flächen heraus.

$$\int_A d\vec{A}\cdot\vec{E} = 0$$

Der dazugehörige vollständige Ausdruck ist auch in sphärischen Polarkoordinaten wegen der Grenzen in ϑ,φ umständlich.

[2] Hätten Sie es noch gewußt???

c). Das elektrische Feld einer Ansammlung von Punktladungen Q_i ergibt sich durch lineare Überlagerung (*Superposition*), da es sich hier um unabhängige Kräfte handelt!

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_i \frac{Q_i(\vec{r} - \vec{r}_i)}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} = \sum_i \vec{E}_i(\vec{r})$$

Diese lineare Superposition ist für die Elektrodynamik allgemein sehr wichtig. Sie hängt eng damit zusammen, daß die Felder, anders als in der Hydrodynamik, linearen Differentialgleichungen genügen, wie wir später noch sehen werden. Falls (wie in der Chromodynamik, der Theorie der starken Wechselwirkungen) auch die Felder selbst eine Ladung tragen, ist die lineare Superposition nicht mehr erlaubt.

Jetzt wenden wir uns ab von den Punktladungen hin zu den Ladungsdichten:

$$\varrho(\vec{r}\,') = \frac{\text{Ladung}}{\text{Volumen}}\ (\text{infinitesimal})\ = \frac{dQ}{dV}\,.$$

Die Summation über Teilladungen $Q = \sum_i Q_i$ geht dann über in $Q = \int_V d^3r'\varrho(\vec{r}\,')$ und wir erhalten

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V d^3r' \frac{(\vec{r} - \vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3} \varrho(\vec{r}\,').}$$

Wir bilden nun das Gauß'sche Flächenintegral $\int_A d\vec{A} \cdot \vec{E}(\vec{r})$ und vertauschen die Integrationen (infinitesimale Summationen) von $d\vec{A}$ und $d^3\vec{r}\,'$.

$$\int_A d\vec{A} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d^3r'\rho(\vec{r}\,') \int_A d\vec{A} \cdot \underbrace{\frac{(\vec{r} - \vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3}}_{\substack{\text{Feld einer} \\ \text{Einheits-} \\ \text{Punktladung} \\ \text{bei } \vec{r}\,'}} \tag{7.7}$$

Das Flächenintegral aus (7.7) ergibt 4π falls r' innerhalb, und 0 falls r' ausserhalb der Fläche liegt.

$$\Longrightarrow \boxed{\int_A d\vec{A} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V d^3r'\rho(\vec{r}\,') = \frac{1}{\varepsilon_0} Q\,,}$$

wobei V das von A eingeschlossene Volumen ist. Wir erhalten also das Gauß'sche Integral in allgemeiner Form.

d). Natürlich bekommt man auch umgekehrt aus dem Gauß'schen Gesetz das Coulomb-Gesetz: Für die Punktladung Q bei $\vec{r}_Q$ werte man das Integral $\int_A d\vec{A} \cdot \vec{E}(\vec{r})$ auf einer Kugeloberfläche (mit Radius R) um $\vec{r}_Q$ aus:

Aus der Radialsymmetrie von $\vec{E}(\vec{r})$ folgt $\vec{E}(\vec{r}) \parallel (\vec{r} - \vec{r}_Q)$ und mit $R = |\vec{r} - \vec{r}_Q|$ direkt das Coulomb-Gesetz:

$$\begin{aligned} 4\pi R^2 \left|\vec{E}(\vec{r})\right| &= \frac{Q}{\varepsilon_0} \\ \Longrightarrow \vec{E}(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{R^2} \vec{e}_{\vec{r}-\vec{r}_Q} \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{|\vec{r} - \vec{r}_Q|^2} \frac{\vec{r} - \vec{r}_Q}{|\vec{r} - \vec{r}_Q|} \end{aligned}$$

e). Anwendungen Elektrisches Feld einer homogen geladenen Kugel mit Ladungsdichte ρ und Radius R: Wende das Gauß'sches Gesetz auf eine Kugelfäche mit Radius r an, wobei nur die eingeschlossenen Ladungen zählen:

$$\int_A d\vec{A} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V d^3r' \rho(\vec{r}\,') = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho \frac{4\pi}{3} \begin{cases} r^3 & \text{für } r \leq R \\ R^3 & \text{für } r \geq R \end{cases}$$

Aus der Radialsymmetrie von $\vec{E}(\vec{r})$ folgt wie oben

$$\int_A d\vec{A} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = 4\pi\, r^2 \left| \vec{E}(\vec{r}) \right|$$

und damit

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \begin{cases} r & \text{für } r \leq R \\ \dfrac{R^3}{r^2} & \text{für } r \geq R \end{cases}$$

Für $r \geq R$ haben somit wieder das Coulomb-Gesetz für eine Punktladung $Q = \frac{4\pi}{3} R^3 \rho$ erhalten!

7.3. Divergenz von $\vec{E}(\vec{r})$

Die Divergenz (Quellstärke) des Vektorfeldes $\vec{E}(\vec{r})$ ist definiert als

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{E}(\vec{r}) = \lim_{V \longrightarrow 0} \frac{\int_A d\vec{A} \cdot \vec{E}(\vec{r})}{V}}$$

wobei V das von A eingeschlossene Volumen ist, welches auf den Punkt $\vec{r}$ zusammengezogen wird.

Mit dem Gauß'schen Gesetz ergibt sich

$$\int_A d\vec{A} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V d^3r' \rho(\vec{r}\,') \simeq \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0} V\,,$$

wobei man die letzte Abschätzung, gültig nur für infinitesimale V, durch Anwendung des Mittelwertsatzes[3] erhält. Einsetzen ergibt schließlich

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}}$$

Später werden wir die Divergenz durch Differentiation in Koordinaten ausdrücken ($\operatorname{div} \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot \vec{E}$).

Bemerkung: Betrachten wir nun eine Punktladung als Grenzfall einer Kugel mit homogener Ladungsverteilung. In Abschnitt 7.2 e) haben wir gesehen, daß für die Ladung der Kugel $Q = \frac{4\pi}{3} R^3 \rho$ gilt, wobei R den Kugelradius und ρ die Ladungsdichte bezeichnet.

[3] Der Mittelwertsatz der Integralrechnung: Wenn der Integrand $f(t)$ im Integrationsintervall $t \in (x, x + \Delta x)$ stetig (und integrierbar) ist, dann kann das Integral immer durch ein Produkt aus Intervalllänge und einem Wert des Integranden im Intervall ausgedrückt werden, also $\int_x^{x+\Delta x} dt\, f(t) = f(x + h\,\Delta x)\,\Delta x$ für zumindest einen Wert von h im Intervall $0 \leq h \leq 1$.

Für $|\vec{r}| < R$ gilt deshalb

$$\operatorname{div}\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0}\frac{3}{4\pi R^3}\,,$$

oder allgemeiner ausgedrückt

$$\operatorname{div}\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q}{\varepsilon_0}\cdot f(R,r) \text{ mit } f(R,r) = \begin{cases} 0 & \text{für } r > R \\ \dfrac{3}{4\pi R^3} & \text{für } r \leq R \end{cases}$$

Integriert man nun den Klammerausdruck $f(r,R)$ über das gesamte Volumen, erhält man exakt 1 wegen

$$\int d^3r\, f(r,R) = \frac{4\pi}{3}R^3\frac{3}{4\pi R^3} \equiv 1\,. \tag{7.8}$$

Betrachten wir das Verhalten von $f(r,R)$ bei $R \longrightarrow 0$:

$$\begin{aligned} f(r=0,R) &\longrightarrow \infty \quad (R \longrightarrow 0) \\ f(r\neq 0,R) &\longrightarrow 0 \quad (R \longrightarrow 0) \end{aligned} \tag{7.9}$$

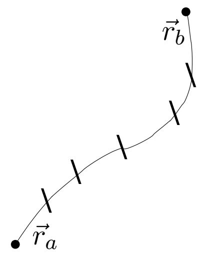
Aufgrund von Gleichung (7.8) und (7.9) ergibt sich, daß $f(r,R)$ für $R = 0$ eine dreidimensionale Dirac'sche Deltafunktion $\delta_3(\vec{r})$ darstellt. Die Deltafunktion kann hier nicht behandelt werden, den interessierten Leser verweisen wir daher auf ein späteres Kapitel über Distributionen.

8. Das elektrische Potential; der Gradient

8.1. Das elektrische Potential

a). Das elektrische Feld ist eine auf die Einheitsladung normierte Kraft, welches in der Elektrostatik zeitunabhängig ist.

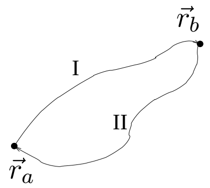
Wir betrachten nun die Arbeit an einer Einheitsladung beim Transport auf einem Weg von $\vec{r}_a$ nach $\vec{r}_b$:



$$\boxed{W = \int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} d\vec{r} \cdot E(\vec{r}) = -U}$$

wobei U die *Spannung* zwischen den Punkten $\vec{r}_a$ und $\vec{r}_b$ darstellt.

Das obige Integral, und damit die Spannung U, sollte wegunabhängig sein; sonst könnte auf einem geschlossenen Weg Arbeit geleistet und ein *perpetuum mobile* konstruiert werden. Dazu betrachte man nebenstehende Abbildung.



Falls $\int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} d\vec{r} \cdot \vec{E}(\vec{r})$ vom Weg abhängig, also für die Wege I und II verschieden ist, so würde man durch Bewegung z. B. entlang des Weges I-II zwar zum Ausgangspunkt $\vec{r}_a$ zurückkehren, hätte aber Arbeit gewonnen. Daraus folgt, daß $-U(\vec{r}) = \int_{\vec{r_0}}^{\vec{r}} d\vec{r} \cdot \vec{E}(\vec{r})$ tatsächlich nur von $\vec{r}$ abhängt. $\vec{r_0}$ ist beliebig, aber fest.

b). Damit kommen wir zur Definition des Potentials:

$$\boxed{\varphi(\vec{r}) = -\int_{\vec{r_0}}^{\vec{r}} d\vec{r} \cdot \vec{E}(\vec{r}) + \varphi(\vec{r_0})}$$

wobei $\varphi(\vec{r_0})$ beliebig, also frei wählbar ist (z.B. $\varphi(\infty) = 0$). Damit ergibt sich die Spannung U als

$$U = -\int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} d\vec{r} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \varphi(\vec{r}_b) - \varphi(\vec{r}_a)\,.$$

Wir leiten nun eine Darstellung des Energiesatzes aus der Bewegungsgleichung eines massiven Ladungsträgers der Ladung q her:

$$m\ddot{\vec{r}} = q\vec{E}(\vec{r}) \implies m\dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}} = q\dot{\vec{r}} \cdot \vec{E}(\vec{r})$$

Mit $\frac{d}{dt}(\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}) = \ddot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} + \dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}}$ folgt $\frac{d}{dt}(\frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2) = q\dot{\vec{r}} \cdot \vec{E}(\vec{r})$. Durch Integrieren ergibt sich daraus

$$\int_{t_a}^{t_b} dt \frac{d}{dt}\left(\frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2\right) = q\int_{t_a}^{t_b} dt \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = q\int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} d\vec{r} \cdot \vec{E}(\vec{r})$$

$$\implies \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 t_b - \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 t_a = -q(\varphi(\vec{r}_b) - \varphi(\vec{r}_a))\,.$$

Der Energiesatz für einen Ladungsträger der Masse m und Ladung q kann man daher folgendermaßen schreiben:

$$\frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 t_b + q\varphi(\dot{\vec{r}}_b) = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 t_a + q\varphi(\dot{\vec{r}}_a)\,,$$

wobei der jeweils erste Term die kinetische Energie beschreibt, der jeweils zweite Term die potentielle Energie im elektrischen Feld.

Anmerkung: Die Flächen (im 2-dimensionalen: Linien) mit konstantem Potential heißen Äquipotentialflächen.

8.2. Gradient

a). Wie bestimmen wir bei gegebenem $\varphi(\vec{r})$ das elektrische Feld $\vec{E}(\vec{r})$? Wir müssen hierbei beachten, daß $\varphi(\vec{r})$ ein Skalarfeld, $\vec{E}(\vec{r})$ hingegen ein Vektorfeld bildet.

Wir differenzieren zuerst nach $\vec{r}$:

$$\varphi(\vec{r}+\Delta\vec{r}) - \varphi(\vec{r}) = -\int_{\vec{r}}^{\vec{r}+\Delta\vec{r}} d\vec{r}\cdot\vec{E}(\vec{r})$$

Durch Anwendung des Mittelwertsatzes kann man für kleine $\Delta\vec{r}$ das Integral durch

$$\varphi(\vec{r}+\Delta\vec{r}) - \varphi(\vec{r}) = -E(\vec{r})\cdot\Delta\vec{r} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \tag{8.1}$$

abschätzen, wobei $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ wie üblich Restterme der Ordnung ϵ^2 bezeichnen mit $|\Delta\vec{r}| \approx \epsilon$.

Verwendet man anstatt von $\vec{r}$ dessen Komponenten x, y, z, so kann man die Potentialdifferenz in Gleichung (8.1) auch folgendermaßen schreiben:

$\varphi(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - \varphi(x,y,z) =$	als partielle Ableitungen:
$\varphi(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - \varphi(x, y+\Delta y, z+\Delta z)$	$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\|_{x,y+\Delta y,z+\Delta z}\Delta x$
$+\varphi(x, y+\Delta y, z+\Delta z) - \varphi(x,y,z+\Delta z)$	$\frac{\partial\varphi}{\partial y}\|_{x,y,z+\Delta z}\Delta y$
$+\varphi(x,y,z+\Delta z) - \varphi(x,y,z)$	$\frac{\partial\varphi}{\partial z}\|_{x,y,z}\Delta z$

Durch Taylor-Entwicklung der partiellen Ableitungen läßt sich der erste Term in Δx vereinfachen:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\varphi}{\partial x}|_{x,y+\Delta y,z+\Delta z}\Delta x &= \frac{\partial\varphi}{\partial x}|_{x,y,z}\Delta x + \frac{\partial\varphi}{\partial x\partial y}|_{x,y,z+\Delta z}\Delta x\Delta y + \frac{\partial\varphi}{\partial x\partial z}|_{x,y+\Delta y,z}\Delta x\Delta z \\ &= \frac{\partial\varphi}{\partial x}|_{x,y,z}\Delta x + O(\varepsilon^2)\end{aligned}$$

Damit ergibt sich für die Potentialdifferenz zur Ordnung ϵ schließlich

$$\begin{aligned}\Delta\varphi = \varphi(\vec{r}+\Delta\vec{r}) - \varphi(\vec{r}) &\approx \frac{\partial\varphi}{\partial x}|_{x,y,z}\Delta x + \frac{\partial\varphi}{\partial y}|_{x,y,z}\Delta y + \frac{\partial\varphi}{\partial z}|_{x,y,z}\Delta z \\ &= (\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z})\cdot\begin{pmatrix}\Delta x\\ \Delta y\\ \Delta z\end{pmatrix} = \operatorname{grad}\varphi\cdot\Delta\vec{r},\end{aligned} \tag{8.2}$$

oder in Differentialschreibweise $d\varphi = \operatorname{grad}\varphi\cdot d\vec{r}$, wobei $\operatorname{grad}\varphi = (\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z})$. Vergleichen wir Gleichung (8.2) mit Gleichung (8.1), so erkennen wir

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\operatorname{grad}\varphi(\vec{r})\,.$$

Aus $\Delta\varphi = \operatorname{grad}\varphi\cdot\Delta\vec{r}$ folgt, daß der Vektor $\operatorname{grad}\varphi$ immer senkrecht auf den Äquipotentialflächen steht: Zeigt der Vektor $\Delta\vec{r}$ in Richtung der Potentialflächen, so ist $\Delta\varphi = 0$; steht $\Delta\vec{r}$ dagegen senkrecht auf den Potentialflächen, so ist $\Delta\varphi$ maximal. Eine 2-dimensionale Anwendung im täglichen Leben sind die Höhenlinien der Landkarten, siehe Abbildung 1.

b). Wir setzen nun in das Wegintegral $\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{r}\cdot\vec{E}(\vec{r})$ die Identität $\vec{E}(\vec{r}) = -\operatorname{grad}\varphi(\vec{r})$ ein und erhalten so auf umgekehrtem Wege die ursprüngliche Definition des Potentials:

$$\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{r}\cdot\vec{E}(\vec{r}) = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{r}\,\operatorname{grad}\varphi(\vec{r}) = -\int_{\varphi(\vec{r}_0)}^{\varphi(\vec{r})} d\varphi = -(\varphi(\vec{r}) - \varphi(\vec{r}_0))$$

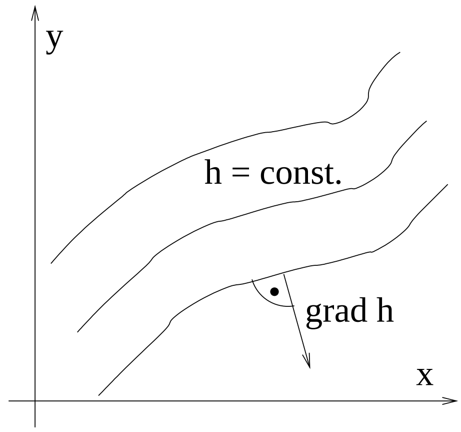


Abbildung 1: Höhenlinien und Gradient

c). Zur Schreibweise Folgende Notationen sind äquivalent:

$$\operatorname{grad}\varphi = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)\varphi(x,y,z) = \vec{\nabla}\varphi$$

Dabei ist $(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$ ein Differentialoperator und $\vec{\nabla}$ wird als Nablaoperator[4] bezeichnet.

d). Beispiel Wir betrachten die homogenen Ladung auf einer Kugel mit Ladungsdichte ρ und Radius R. Dann ergibt sich mit 7.2 e) für das Potential in Abhängigkeit von $\vec{r}$ (Weg auf dem Radius wegen leichterer Rechnung) und für $\vec{r}_0 = \infty$:

$$\varphi(\vec{r}) = \int_\infty^{\vec{r}} d\vec{r}\cdot E(\vec{r}) + \varphi(\infty) = \begin{cases} \frac{4}{3}\frac{\rho R^3}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r} & r > R \\ \frac{\rho}{\varepsilon_0}\left(\frac{1}{2}R^2 - \frac{1}{6}r^2\right) & r \le R \end{cases}$$

e). Rechnen mit dem Gradienten Im Folgenden verwenden wir die Kettenregel und Produktregel für Ableitungen:

1. Es ist $\vec{\nabla} f(r) = f'(r)\frac{\vec{r}}{r}$, da $\frac{\partial}{\partial x} f(r) = f'(r)\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ (analog für y und z) mit $r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.
2. $\vec{\nabla}\,(f_1(\vec{r})\, f_2(\vec{r})) = (\vec{\nabla} f_1(\vec{r}))\, f_2(\vec{r}) + f_1(\vec{r})(\vec{\nabla} f_2(\vec{r}))$
3. Vektoriell:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}\,(\vec{V}_1(\vec{r})\cdot\vec{V}_2(\vec{r})) &= (\vec{\nabla}\,\vec{V}_1(\vec{r}))\cdot\vec{V}_2(\vec{r}) + (\vec{\nabla}\,\vec{V}_2(\vec{r}))\cdot\vec{V}_1(\vec{r}) \\ &= \left(\vec{\nabla}\right)\underbrace{\left(\;\vec{V}_1\;\right)}_{\text{Zeile}}\underbrace{\left(\vec{V}_2\right)}_{\text{Spalte}} + \left(\vec{\nabla}\right)\left(\;\vec{V}_2\;\right)\left(\vec{V}_1\right) \end{aligned}$$

[4] Das Wort „Nabla“ stammt von einem altertümlichen Musikinstrument, einer Laute, an deren Form der Operator erinnert.

$$\text{wobei z. B. } \left(\vec{\nabla}\right)\left(\ \vec{V_1}\ \right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}V_{1x} & \frac{\partial}{\partial x}V_{1y} & \frac{\partial}{\partial x}V_{1z} \\ \frac{\partial}{\partial y}V_{1x} & \frac{\partial}{\partial y}V_{1y} & \frac{\partial}{\partial y}V_{1z} \\ \frac{\partial}{\partial z}V_{1x} & \frac{\partial}{\partial z}V_{1y} & \frac{\partial}{\partial z}V_{1z} \end{pmatrix}, \text{ analog für } V_2.$$

Hier sieht man, daß man das Rechnen mit Gradienten auch als Vektor- und Matrizenrechnung auffassen kann. Man kann also Vektoranalysis mit der Devise betreiben: Mache Differenzieren und Matrizenmultiplikation (und später auch Kreuzprodukt in ähnlicher Weise) miteinander verträglich!

f). Totales Differential Es gilt $d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}dz$ für eine Funktion $\varphi(x, y, z)$. Dann ist $d\varphi$ eine Differentialform:

$$d\varphi = a_x(x, y, z)\,dx + a_y(x, y, z)\,dy + a_z(x, y, z)\,dz \quad \text{mit } a_x = \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \ldots$$

Man sagt dann: $d\varphi$ ist ein *totales Differential.*

Wir geben nun das sogenannte Integrationskriterium an: Ist φ zweimal stetig differenzierbar, dann gilt mit obigem a_x, a_y, a_z

$$\frac{\partial a_x}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}\varphi\right) = \frac{\partial^2}{\partial y\partial x}\varphi \overset{(*)}{=} \frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\varphi = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}\varphi\right) = \frac{\partial a_y}{\partial x}$$

d. h. es gilt die Gleichheit bei (*)[5]. Dann folgt mit $(\vec{a} \times \vec{b})_z = a_x b_y - a_y b_x$:

$$\frac{\partial}{\partial x}a_y - \frac{\partial}{\partial y}a_x = 0 \iff \left(\vec{\nabla} \times \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}\right)_z = 0 \quad \text{für} \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \vec{\nabla}\varphi$$

Das notwendige Kriterium dafür, daß eine Differentialform ein totales Differential ist, ist also

$$\vec{\nabla} \times \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = 0\,.$$

Mit $\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \vec{\nabla}\varphi$ folgt aufgrund der Vertauschbarkeit der partiellen Differentiationen

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla}\phi) = 0 \implies \underbrace{(\vec{\nabla} \times \vec{\nabla})}_{\text{Algebra!}}\,\phi = 0\,.$$

Letzteres ist sehr intuitiv: $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} = 0$.

[5]Ist f in D zweimal partiell differenzierbar und sind die zweiten partiellen Ableitungen stetig in D, so hat die Reihenfolge der partiellen Ableitungen keinen Einfluss auf das Ergebnis der Ableitungen: $\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}(p) = \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_1}(p)\,,\ p \in D$

g). Beispiel: Herleitung der Entropie δQ im 1. Hauptsatz der Thermodynamik

$$\delta Q = dU - p\,dV$$

ist kein totales Differential.

Annahme: δQ sei ein totales Differential. Dann ist für ein ideales Gas Q wegen $dU = n\,C_V\,dT$ und $p = n\,R\,T/V$ abhängig von T und V und es ergibt sich

$$\delta Q = n\,C_V\,dT + \frac{n\,R\,T}{V}dV\,.$$

Dies hieße $\frac{\partial Q}{\partial T} = n\,C_V$ und $\frac{\partial Q}{\partial V} = \frac{n\,R\,T}{V}$; desweiteren gelte für δQ als totales Differential die Identität $\frac{\partial}{\partial V}(\frac{\partial Q}{\partial T}) = \frac{\partial}{\partial T}(\frac{\partial Q}{\partial V})$. Es ist $\frac{\partial}{\partial V}(n\,C_V) = 0$, aber $\frac{\partial}{\partial T}(\frac{n\,R\,T}{V}) = \frac{n\,R}{V} \neq 0$, was zu einem Widerspruch führt. Also ist δQ kein totales Differential.

Wir versuchen daher, einen sog. integrierenden Faktor $f(T)$ zu finden, so daß für $f(T)\,\delta Q = f(T)\,n\,C_V\,dT + f(T)\frac{n\,R\,T}{V}dV$ die Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial V}(f(T)\,n\,C_V) = \frac{\partial}{\partial T}\left(f(T)\frac{n\,R\,T}{V}\right) = 0$$

erfüllt ist. Der erste Term ist offensichtlich gleich 0. Dies erfordert $\frac{\partial}{\partial T}(f(T)\frac{n\,R\,T}{V}) = 0$, also $f(T) = \frac{c}{T}$, wobei $c = \text{const.}$

Wir definieren daher $dS = \frac{\delta Q}{T}$ als totales Differential der *Zustandsgröße*[6]

$$S(T,V) = \int_{S(T_0,V_0)}^{S(T,V)} dS + S(T_0,V_0)\,,$$

der *Entropie.*

[6]Zustandsgrößen sind unabhängig vom Weg, in diesem Fall im T-V-Diagramm.

9. „Rotation“ eines Vektorfeldes, Stoke'scher Satz, Ampere'sches Gesetz

9.1. rot $\vec{E} = \vec{0}$ als notwendiges Kriterium für das elektrische Feld in der Elektrostatik

Wir haben für ein konservatives Kraftfeld $\vec{F}(\vec{r})$ bzw. für ein elektrisches Feld $\vec{E}(\vec{r})$ gezeigt:

$$\boxed{\vec{E} = -\mathrm{grad}\,\varphi(\vec{r}) \Longleftrightarrow \oint d\vec{r}\cdot\vec{E}(\vec{r}) = 0 \text{ für alle geschlossenen Wege}}$$

$$(\vec{F}(\vec{r}) = -\mathrm{grad}\,V(\vec{r}) \text{ in der Mechanik})$$

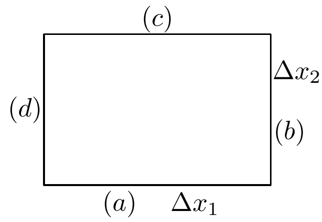
$\vec{E} = -\mathrm{grad}\,\varphi$ heißt

$$\vec{E} = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\vec{e}_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\vec{e}_2 + \frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\vec{e}_3\right) = \vec{\nabla}\varphi$$

mit $\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix}$ in der Koordinatendarstellung. Wir bilden jetzt $\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}$:

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}\times\vec{\nabla} &= \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \end{vmatrix} \\
&= \vec{e}_1 \underbrace{\left(\frac{\partial^2}{\partial x_2\,\partial x_3} - \frac{\partial^2}{\partial x_3\,\partial x_2}\right)}_{=0} + \vec{e}_2 \underbrace{\left(\frac{\partial^2}{\partial x_3\,\partial x_1} - \frac{\partial^2}{\partial x_1\,\partial x_3}\right)}_{=0} + \vec{e}_3 \underbrace{\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1\,\partial x_2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2\,\partial x_1}\right)}_{=0}
\end{aligned}$$

Für eine zweimal stetig differenzierbare Funktion gilt also $\vec{\nabla}\times\vec{\nabla} = \vec{0}$, d. h. rot grad $= \vec{0}$, siehe hierzu auch Abschnitt 8.2 f). Wir erhalten $\vec{\nabla}\times\underbrace{(-\vec{\nabla}\varphi)}_{\vec{E}} = -(\vec{\nabla}\times\vec{\nabla})\varphi = \vec{0}$, d. h. rot $\vec{E} := \vec{\nabla}\times\vec{E} = \vec{0}$ ist ein *notwendiges* Kriterium für das elektrische Feld in der Elektrostatik.



9.2. Der Stoke'sche Satz

Ziel: rot $\vec{E}$ als *hinreichendes* Kriterium für statisches elektrisches Feld.

a). Wir betrachten ein (infinitesimales) Rechteck in der 1-2 Ebene (s. Abbildung) und berechnen

$$\begin{aligned}
\oint_{\text{Rechteck}} d\vec{r}\cdot\vec{E}(\vec{r}) &= \int_{x_1}^{x_1+\Delta x_1} dx_1' E_1(x_1', x_2, x_3) & (a)\\
&+ \int_{x_2}^{x_2+\Delta x_2} dx_2' E_2(x_1+\Delta x_1, x_2', x_3) & (b)\\
&+ \int_{x_1+\Delta x_1}^{x_1} dx_1' E_1(x_1', x_2+\Delta x_2, x_3) & (c)\\
&+ \int_{x_2+\Delta x_2}^{x_2} dx_2' E_2(x_1, x_2', x_3)\,. & (d)
\end{aligned}$$

Wir fassen (a) und (c), (b) und (d) zusammen und erhalten mit dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung für $\bar{x}_1 \in (x_1, x_1 + \Delta x_1), \bar{x}_2 \in (x_2, x_2 + \Delta x_2)$

$$\oint\limits_{\text{Rechteck}} d\vec{r} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = -\int_{x_1}^{x_1+\Delta x_1} dx_1' \Delta x_2 \frac{\partial E_1}{\partial x_2}(x_1', \bar{x}_2, x_3) + \int_{x_2}^{x_2+\Delta x_2} dx_2' \Delta x_1 \frac{\partial E_2}{\partial x_1}(\bar{x}_1, x_2', x_3)\,.$$

Bei Anwendung des Mittelwertsatzes der Integralrechnung ergibt sich für $\bar{\bar{x}}_1 \in (x_1, x_1 + \Delta x_1), \bar{\bar{x}}_2 \in (x_2, x_2 + \Delta x_2)$

$$\oint\limits_{\text{Rechteck}} d\vec{r} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = -\frac{\partial E_1}{\partial x_2}(\bar{\bar{x}}_1, \bar{x}_2, x_3)\Delta x_2\, \Delta x_1 + \frac{\partial E_2}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{\bar{x}}_2, x_3)\Delta x_1\, \Delta x_2\,. \tag{9.1}$$

Aufgrund der Stetigkeit der Ableitungen können wir in Gleichung 9.1 im Grenzübergang für $\Delta x_1, \Delta x_2 \longrightarrow 0$ die Differentiale als dritte Komponente der Rotation von $\vec{E}$ identifizieren und wir erhalten

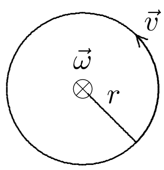
$$\oint\limits_{\text{Rechteck}} d\vec{r} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \left(-\frac{\partial E_1}{\partial x_2} + \frac{\partial E_2}{\partial x_1}\right) \Delta x_1\, \Delta x_2 = (\operatorname{rot} \vec{E})_3 \Delta x_1\, \Delta x_2\,,$$

d. h. es gilt

$$\boxed{\lim_{\Delta x_1, \Delta x_2 \to 0} \frac{\oint\limits_{\text{Rechteck}} d\vec{r} \cdot \vec{E}(\vec{r})}{\Delta x_1\, \Delta x_2} = (\operatorname{rot} \vec{E})_3}$$

Geometrisch können wir $\Delta x_1\, \Delta x_2$ als Fläche mit Flächenvektor $\Delta x_1\, \Delta x_2\, \vec{e}_3$ interpretieren.

Wir gehen jetzt vom 2-Dimensionalen zum 3-Dimensionalen über. Bei entsprechender zyklischer Vertauschung (1–2 $\Rightarrow$ 2–3 $\Rightarrow$ 3–1) erhalten wir analog die erste und zweite Komponente von rot $\vec{E}$.



Bemerkung (Zum Namen „Rotation“): Wir betrachten die Kreisströmung $\vec{v}(\vec{r}) = \vec{\omega} \times \vec{r}$, $\vec{\omega}$ konstant. Der Ausdruck

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\vec{\nabla} \times \vec{v}(\vec{r}) &= \frac{1}{2}\vec{\nabla} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \\ &\overset{\omega\ \text{const.}}{=} \frac{1}{2}(\vec{\omega}\, \vec{\nabla} \cdot \vec{r} - \vec{\omega} \cdot \vec{\nabla}\, \vec{r}) \\ &= \frac{1}{2}(\vec{\omega}\, 3 - \vec{\omega}\, 1) = \vec{\omega} \end{aligned}$$

Nebenrechnung:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 3,$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix} (x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(Matrizenmultiplikation)

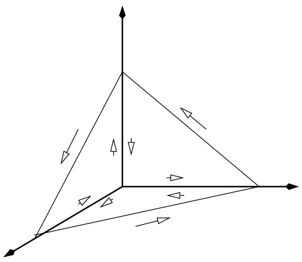
beschreibt die Rotation des Wirbels. Vorsicht bei der Anwendung des Grassmann'schen Entwicklungssatzes („BAC–CAB“–Regel)! Die Vektoralgebra ist so zu verwenden, daß der Differentialoperator $\vec{\nabla}$ immer vor dem zu differenzierenden Ausdruck zu stehen kommt (anderenfalls muß man die Differentiation durch Pfeile $\curvearrowright$ deutlich machen).

b). Der Satz von Stokes

$$\boxed{\underset{\substack{\text{geschlossene}\\ \text{Kurve C}}}{\oint} d\vec{r}\cdot\vec{E}(\vec{r}) = \underset{\substack{\text{Fläche, von}\\ \text{C umrandet}}}{\int} d\vec{A}\cdot\operatorname{rot}\vec{E}}$$

„Beweis“ (Vollständiger Beweis in der Vektoranalysis, fordert viel Vorarbeit!).

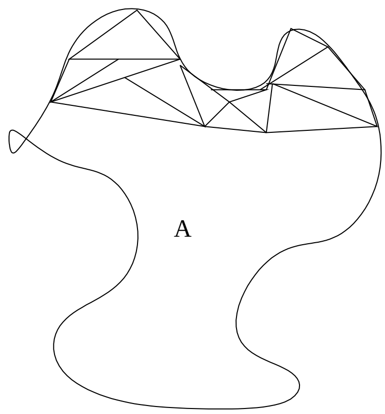
(i) $\oint d\vec{r}\cdot\vec{E}(\vec{r}) = d\vec{A}\cdot\operatorname{rot}\vec{E}$ bei Integration über beliebige, infinitesimale, ebene Flächen (z. B. Dreiecke)



Betrachten wir also ein windschiefes Dreieck der Fläche ΔA im Raum. Da sich bei der Summation die „inneren Linienintegrale“ herausheben, können wir das Linienintegral über den Dreiecksrand C darstellen als drei Linienintegrale C_i über je eine Dreiecksseite der Fläche A_i und zwei zugehörige Koordinatenachsenabschnitte:

$$\oint_C d\vec{r}\cdot\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{3}\oint_{C_i} d\vec{r}\cdot\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{3}(rot\,\vec{E})_i(\Delta A)_i = (rot\,\vec{E})\cdot\Delta\vec{A}$$

(ii) Wenden wir uns nun einer beliebigen geschlossenen Kurve C zu; eine solche Kurve ist im Allgemeinen nicht eben. Man kann sie aber in jedem Fall mit einer Fläche ausfüllen, so dass C die Randkurve dieser Fläche ist.[7] Teilt man nun die Fläche in kleine Flächestücke



(in der Regel Dreiecke: „Triangulierung“) auf, so wird die Randkurve durch einen Polygonzug approximiert. Man kann daher wie im obigen Fall das Integral über die Randkurve als Summe von Integralen über die Berandung der kleinen Flächenstücke schreiben; die Summe der „inneren Integrale“ ist wiederum gleich Null:

$$\oint_C d\vec{r}\cdot\vec{E}(\vec{r}) = \sum_k \oint_{C_k} d\vec{r}\cdot\vec{E}(\vec{r})$$

[7]Damit das für jede beliebige Kurve C gilt, muss das Gebiet, in dem die Kurve liegt, einfach zusammenhängend sein, das heißt, jede geschlossene Kurve muss sich zu einem Punkt zusammenziehen lassen.

(iii) Geht man nun zu infinitesimal kleinen Flächenstücken über, so erhält man den Satz von Stokes:

$$\oint_C d\vec{r} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \oint_{C_k} d\vec{r} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (rot\,\vec{E}) \cdot (\Delta\vec{A})_k = \int_A d\vec{A} \cdot (rot\,\vec{E})\,,$$

also kurz

$$\boxed{\oint_{C=\partial A} d\vec{r} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \int_A d\vec{A} \cdot (rot\,\vec{E})}$$

wobei $C = \partial A$ bedeutet, dass C die Randkurve der Fläche A ist. Damit erhält man aus $\mathrm{rot}\,\vec{E} = 0$ direkt $\oint_C d\vec{r} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = 0$, also gilt in einfach zusammenhängenden Gebieten

$$\boxed{E = -\mathrm{grad}\,\phi \iff \oint_C d\vec{r} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = 0 \iff \mathrm{rot}\,\vec{E} = 0}$$

9.3. Das Ampere'sche Gesetz

Nach der Einführung in der Experimentalphysik werden wir dieses Thema ausführlicher behandeln. Aus der Experimentalphysik-Vorlesung ist bereits die Gleichung bekannt, die die Integration des Magnetfelds über eine geschlossene Kurve C in Beziehung setzt mit dem Stromfluß durch die durch die Kurve berandete Fläche A:

$$\oint_C d\vec{r} \cdot \vec{B} = \mu_0 I_{\mathrm{tot}} = \mu_0 \int_A d\vec{A} \cdot \vec{j}\,.$$

Mit dem Satz von Stokes ergibt sich $\oint_C d\vec{r} \cdot \vec{B} = \int_A d\vec{A} \cdot (\mathrm{rot}\,\vec{B})$, und daher gilt für beliebige Flächen $\vec{A}$ die Aussage

$$\boxed{\mathrm{rot}\,\vec{B} = \mu_0 \vec{j}\,.}$$

Dieses Ergebnis erhält man auch, wenn man sich die Definition von $rot\,\vec{B} = \nabla \times \vec{B}$ vor Augen hält:

$$(\mathrm{rot}\,\vec{B})_i = \lim_{\Delta A_i \to 0} \frac{\oint_{C_i=\partial(\Delta A_i)} d\vec{r} \cdot \vec{B}}{\Delta A_i} = \mu_0 (\vec{j})_i$$

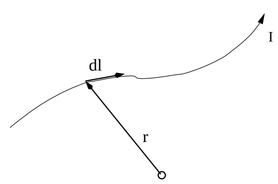
Damit stellt sich $\mathrm{rot}\,\vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ ganz ähnlich dar wie die Quellengleichung für die Divergenz des elektrischen Felds, nämlich $\mathrm{div}\,\vec{E} = \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}$. Zudem gilt in der Elektrostatik $\mathrm{rot}\,\vec{E} = 0$. Dem entspricht in der Magnetostatik $\mathrm{div}\,\vec{B} = 0$, d. h. es gibt keine magnetischen Quellen.

Aus $\rho(\vec{r})$ konnten wir leicht $\vec{E}(\vec{r})$ berechnen; dies ist für den Fall $\vec{j} - \vec{B}$ nicht so leicht möglich: Entweder man wählt den Weg der Vorlesung über die Lorentztransformation (was sicher nicht der historischen Herleitung entspricht), oder man führt als Ansatz das Vektorpotential $\vec{A}(\vec{r})$ ein, für das gelten muß:

$$\vec{B} = rot\,\vec{A}$$

In Abschnitt 10.4 b) werden wir letzteren Weg beschreiten. Die Lösung dieses Problems, das *Biot-Savart'sche Gesetz*, wollen wir jedoch schon hier angeben: Für ein Leiterstück, durch das der Strom I fließt, gilt:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$



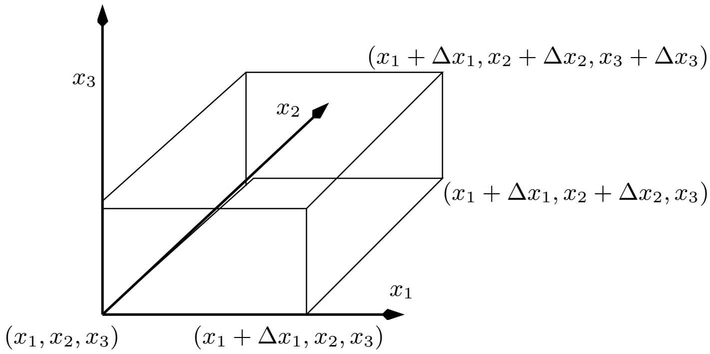
10. Divergenz in kartesischen Koordinaten; Gauß'scher Satz; Vektoranalysis

10.1. Divergenz

Wir haben die Divergenz von $\vec{E}$ als Quellstärke definiert:

$$\operatorname{div}\vec{E} = \lim_{V\to 0}\frac{\int_{A=\partial V} d\vec{A}\cdot\vec{E}}{V}$$

Wie oben bedeutet $A = \partial V$, dass die Oberfläche A das Volumen V berandet.[8]



Wollen wir die Divergenz $\operatorname{div}\vec{E}$ ähnlich wie $\operatorname{rot}\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{B}$ durch Ableitungen ausdrücken, betrachten wir dazu praktischerweise einen Quader (s. obige Abbildung) mit infinitesimalem Volumen und berechnen $\int_A d\vec{A}\cdot\vec{E}(\vec{r})$ über die Quaderoberfläche. Gegenüberliegende Seiten (hier zuerst die Seiten in bzw. parallel zur 1-2-Ebene) liefern aufgrund des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung

$$\begin{aligned}\int_{x_1}^{x_1+\Delta x_1} dx_1' \int_{x_2}^{x_2+\Delta x_2} dx_2' (-E_3(x_1', x_2', x_3) + E_3(x_1', x_2', x_3 + \Delta x_3) = \\ \int_{x_1}^{x_1+\Delta x_1} dx_1' \int_{x_2}^{x_2+\Delta x_2} dx_2' \frac{\partial}{\partial x_3} E_3(x_1', x_2', \bar{x}_3)\Delta x_3,\end{aligned}$$

wobei $\bar{x}_3$ einen Punkt zwischen x_3 und $x_3 + \Delta x_3$ darstellt. Der Mittelwertsatz der Integralrechnung ergibt dann für das obige Doppelintegral

$$\begin{aligned}\int_{x_1}^{x_1+\Delta x_1} dx_1' \int_{x_2}^{x_2+\Delta x_2} dx_2' (-E_3(x_1', x_2', x_3) + E_3(x_1', x_2', x_3 + \Delta x_3) = \\ \frac{\partial}{\partial x_3} E_3(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)\Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3\,.\end{aligned}$$

Die Seitenflächen des Quaders in bzw. parallel zur 2-3-Ebene sowie 3-1-Ebene berechnen sich analog. Mit $\Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3 = \Delta V$ erhält man also:

$$\operatorname{div}\vec{E} = \lim_{V\to 0}\frac{\int_{A=\partial V} d\vec{A}\cdot\vec{E}}{V} = \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}E_i(x_1,x_2,x_3) = (\frac{\partial}{\partial x_1},\frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial x_3})\begin{pmatrix}E_1\\E_2\\E_3\end{pmatrix} = \vec{\nabla}\cdot\vec{E}$$

[8] Dies entspricht der Definition von $(\operatorname{rot}\vec{B})_i$, welche wir im Abschnitt über das Ampere'sche Gesetz gefunden haben.

10.2. Gauß'scher Satz

Betrachten wir nun ein endliches Volumen:

(i) Dieses Volumen kann man approximativ aus kleinen Quadern zusammensetzen.

(ii) Das Flächenintegral über die Randfläche A des approximierten Volumens schreibt man nun als Summe über die Flächenintegrale der kleinen Quader-Volumina ΔV_i. Da die Integration über die inneren Flächen wieder herausfällt, erhält man:

$$\int_A d\vec{A}\cdot\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{n}\int_{\Delta A_i} d\vec{A}\cdot\vec{E}(\vec{r}) \approx \sum_{i=1}^{n}(\operatorname{div}\vec{E})\,\Delta V_i$$

(iii) Geht man nun zum Grenzwert $n \longrightarrow \infty$ über, ergibt sich der Satz von Gauß:

$$\boxed{\int_{A=\partial V} d\vec{A}\cdot\vec{E}(\vec{r}) = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\int_{\Delta A_i}(\operatorname{div}\vec{E})\,\Delta V_i = \int_V \underbrace{d^3r}_{\text{„}dV\text{“}}\,\operatorname{div}\vec{E}}$$

Mit $\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}$ erhält man dann wieder das Gauß'sche Gesetz

$$\int_{A=\partial V} d\vec{A}\cdot\vec{E}(\vec{r}) = \int_V d^3r\,\frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}\,.$$

10.3. Vektoranalysis im Rahmen der Elektrizitätslehre

Wir haben bisher den Gradienten, die Divergenz und die Rotation mit dem Differentialoperator $\vec{\nabla}$ gebildet:

$$\operatorname{grad}\phi = \vec{\nabla}\phi, \qquad \operatorname{div}\vec{E} = \vec{\nabla}\cdot\vec{E}, \qquad \operatorname{rot}\vec{E} = \vec{\nabla}\times\vec{E}, \qquad \operatorname{rot}\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{B}$$

Für die Elektrostatik haben wir folgende Gesetzmäßigkeiten erhalten:

$$\boxed{\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \qquad \operatorname{rot}\vec{E} = 0, \qquad \vec{B} = 0}$$

Ebenso gilt in der Magnetostatik:

$$\boxed{\operatorname{div}\vec{B} = 0, \qquad \operatorname{rot}\vec{B} = \mu_0\vec{j}, \qquad \vec{E} = 0}$$

Nachfolgende Tabelle enthält eine Zusammenstellung der wichtigsten Rechenregeln im Umgang mit dem Nablaoperator.

Vektorrechnung bei Verwendung des Differentialoperators $\vec{\nabla}$ (Quelle: [3])
Achtung: ϕ und ψ sind skalare Funktionen, $\vec{U}$ und $\vec{V}$ sind vektorwertige Funktionen.
(a) $\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\phi = \operatorname{div}\operatorname{grad}\phi = \vec{\nabla}^2\phi = \Delta\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$
(b) $\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\phi = \operatorname{rot}\operatorname{grad}\phi = 0$
(c) $\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{V}) = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{V} = \vec{e}_x\left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial x\,\partial z}\right)$ $+\vec{e}_y\left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial y\,\partial z}\right) + \vec{e}_z\left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial x\,\partial z} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial y\,\partial z} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2}\right)$
(d) $\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{V}) = \operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{V} = 0$
(e) $\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{V}) = \operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{V} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{V}) - \vec{\nabla}^2\vec{V} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{V} - \Delta\vec{V}$
(f) $\vec{\nabla}\cdot(\phi\vec{V}) = \phi(\vec{\nabla}\cdot\vec{V}) + \vec{V}\cdot(\vec{\nabla}\phi)$
(g) $\vec{\nabla}\times(\phi\vec{V}) = \phi(\vec{\nabla}\times\vec{V}) + \vec{V}\times(\vec{\nabla}\phi)$
(h) $\vec{\nabla}\cdot(\vec{U}\times\vec{V}) = \vec{V}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{U}) - \vec{U}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{V})$
(i) $\vec{\nabla}\times(\vec{U}\times\vec{V}) = (\vec{V}\cdot\vec{\nabla})\vec{U} - (\vec{U}\cdot\vec{\nabla})\vec{V} - \vec{V}(\vec{\nabla}\cdot\vec{U}) + \vec{U}(\vec{\nabla}\cdot\vec{V})$
(j) $\vec{\nabla}(\vec{U}\cdot\vec{V}) = \vec{U}\times(\vec{\nabla}\times\vec{V}) + (\vec{U}\cdot\vec{\nabla})\vec{V} + \vec{V}\times(\vec{\nabla}\times\vec{U}) + (\vec{V}\cdot\vec{\nabla})\vec{U}$
(k) $\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\,\phi\times\vec{\nabla}\,\psi) = 0$

Mit etwas Übung lassen sich die Ergebnisse aus obiger Tabelle leicht berechnen.

Anmerkung (zu (j)): Wir haben bisher die Produktregel angewandt, um (j) zu berechnen, siehe auch Abschnitt 8.2 e).

$$\vec{\nabla}(\vec{U}\cdot\vec{V}) = \underbrace{(\vec{\nabla}\vec{U})}_{\substack{\text{Matrix-}\\\text{mult.}}}\cdot\vec{V} + \underbrace{(\vec{\nabla}\vec{V})}_{\substack{\text{Matrix-}\\\text{mult.}}}\cdot\vec{U}$$

In obiger Tabelle erhält man diese Form, indem man den Grassmann'schen Entwicklungssatz anwendet:

$$\vec{U}\times(\vec{\nabla}\times\vec{V}) = (\vec{\nabla}\vec{V})\cdot\vec{U} - \vec{U}\cdot\vec{\nabla}\vec{V}\,.$$

Analog für $\vec{V}\times(\vec{\nabla}\times\vec{U})$.

Zu guter Letzt noch einige weitere Hilfsmittel, die durch einfache Rechnung überprüft werden können:

- $\vec{\nabla}f(r) = f'(r)\,\frac{\vec{r}}{r}$ (Kettenregel)
- Für $\vec{a} = \text{const.}$ gilt $\vec{\nabla}\left(\vec{a}\cdot\vec{V}(\vec{r})\right) = \left(\vec{\nabla}\vec{V}(\vec{r})\right)\cdot\vec{a}$, wobei $\vec{\nabla}\vec{V}(\vec{r})$ als Matrizenmultiplikation aufgefaßt wird.
- $\vec{\nabla}\cdot\vec{r} = (\ \vec{\nabla}\ )\left(\vec{r}\right) = 3$, $\vec{\nabla}\vec{r} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \left(\vec{\nabla}\right)(\ \vec{r}\ )$. $\vec{\nabla}\vec{r}$ wird „Tensorprodukt" genannt und als Matrixmultiplikation einer Zeile mit einer Spalte verstanden.

10.4. Potential, Vektorpotential

a). Für ein wirbelfreies Feld $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$ folgt div $\vec{E} = -\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\phi = -\Delta\phi$. Δ wird *Laplace-Operator* genannt und es gilt $\Delta = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$.

Weiterhin folgt für ein wirbelfreies Feld automatisch $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\phi = \vec{0}$. In der Elektrostatik erhalten wir damit die sog. *Poisson-Gleichung*

$$\boxed{\Delta\varphi = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right)\varphi = \frac{-\rho(x_1, x_2, x_3)}{\varepsilon_0}}$$

b). In der Magnetostatik machen wir folgenden Ansatz:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}) \qquad \text{mit dem } \textbf{Vektorpotential } \vec{A}(\vec{r})$$

Für diesen Ansatz folgt

- div $\vec{B} = \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \overset{\text{Spatprodukt}}{=} (\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}) \cdot \vec{A} = 0$
- rot $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}\,\vec{A} = \vec{\nabla}\underbrace{(\vec{\nabla} \cdot \vec{A})}_{?} - \Delta\vec{A}$

  $\vec{A}$ ist nicht eindeutig bestimmt, wir führen daher eine sogenannte *Eichtransformation* durch: $\boxed{\vec{A} + \vec{\nabla}f(\vec{r})}$ führt zu identischem Magnetfeld $\vec{B}$, denn $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}f = 0$ (*Eichfreiheit*)

  Als Eichung fordern wir zusätzlich div $\vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$, was als *Coulombeichung* bezeichnet wird.

Als Ergebnis unserer Überlegungen erhalten wir dann folgende Vektorgleichung:

$$\boxed{\text{rot}\,\vec{B}(\vec{r}) = -\Delta\vec{A}(\vec{r}) = \mu_0\vec{j}(\vec{r})} \tag{10.1}$$

Jede Komponente von Gleichung (10.1) besitzt die mathematische Form einer Poisson–Gleichung, deren Lösung durch Superposition der Coulombpotentiale $\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\,|\vec{r}-\vec{r}'|}$ entsteht:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d^3r'\, \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Entsprechend gilt für das Vektorpotential

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r'\, \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}\,,$$

falls $\vec{j}(\vec{r}')$ im Unendlichen verschwindet und keine sonstigen Randbedingungen existieren. Für $\vec{B} = \vec{\nabla}_r \times \vec{A}(\vec{r})$ erhalten wir dann

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \vec{\nabla}_r \times \left(\frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}\right) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r'\,(-1)\vec{j}(\vec{r}') \times \vec{\nabla}_r\left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}\right) \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r'\,\vec{j}(\vec{r}') \times \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \end{aligned}$$

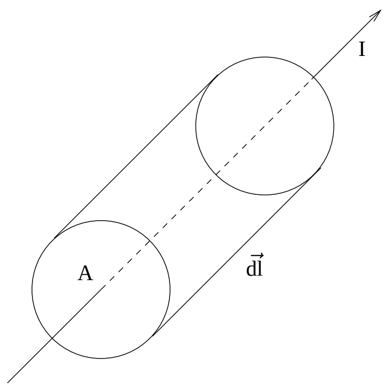


Abbildung 2: Stromdurchflossenes Leiterelement

Wir führen die Volumenintegration über in eine eindimensionale Integration über die Längenelemente $d\vec{l}$: $\int d^3r' \longrightarrow \int dA\, d\vec{l}$, siehe Abbildung 2. Dies ergibt das *Biot-Savart'sche Gesetz*

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int I\, d\vec{l} \times \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

11. Berechnung von $\vec{\nabla}$, $\operatorname{grad}\phi(\vec{r})$, $\operatorname{div}\vec{A}$ und $\operatorname{div}\operatorname{grad}\phi(\vec{r})$ in rechtwinkligen lokalen Koordinaten, speziell in Kugelkoordinaten

Dieser Themenbereich ist sehr umfangreich, weshalb wir hier nur eine gekürzte Fassung präsentieren wollen.

11.1. $\vec{\nabla}$ in allgemeinen orthonormalen Koordinaten

Der Differentialoperator in kartesischen Koordinaten ist definiert als $\vec{\nabla} = \sum_{i=1}^{3} \vec{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i}$.
Für allgemeinene Koordinaten u_i sind die Koordinatenvektoren gegeben durch

$$\vec{e}_{u_i} = \frac{1}{|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i}|} \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i} \tag{11.1}$$

wobei die Normierung durch die sog. *Skalenfaktoren* $f_{u_i} = |\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i}|$ erreicht wird.
Beispiel: Kugelkoordinaten r, ϑ, φ (Wiederholung):

$$x = r\sin\vartheta\cos\varphi, \quad y = r\sin\vartheta\sin\varphi, \quad z = r\cos\vartheta$$

Die Koordinatenvektoren sind gegeben durch

$$\vec{e}_r = \begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi \\ \cos\vartheta \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\vartheta = \begin{pmatrix} \cos\vartheta\cos\varphi \\ \cos\vartheta\sin\varphi \\ \sin\vartheta \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit den Skalenfaktoren $f_r = 1, f_\vartheta = r, f_\varphi = r\sin\vartheta$.
Kommen wir zurück zu den allgemeinen Koordinaten u_i. Wegen Gleichung (11.1) ist

$$\vec{e}_{u_i} \cdot \vec{\nabla} = \frac{1}{f_{u_i}} \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i} \cdot \vec{\nabla} = \frac{1}{f_{u_i}} \sum_j \frac{\partial x_j}{\partial u_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \overset{(*)}{=} \frac{1}{f_{u_i}} \frac{\partial}{\partial u_i}.$$

Die Umformung $(*)$ ergibt sich aus der Kettenregel, denn es gilt

$$\frac{\partial}{\partial u_i} f(x_1(u_1,u_2,u_3), x_2(u_1,u_2,u_3), x_3(u_1,u_2,u_3)) = \sum_j \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial u_i}$$

Nun folgt

$$\boxed{\vec{\nabla} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\vec{e}_{u_i}}{f_{u_i}} \frac{\partial}{\partial u_i}} \tag{11.2}$$

Für unser obiges Beispiel bedeutet dies

$$\vec{\nabla} = \vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \vec{e}_\vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r\sin\vartheta} \vec{e}_\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

11.2. grad ϕ, rot $\vec{A}$, div $\vec{A}$

- grad $\phi(u_1, u_2, u_3) = \vec{\nabla}\phi = \sum_{i=1}^{3} \frac{\vec{e}_{u_i}}{f_{u_i}} \frac{\partial \phi}{\partial u_i}$, siehe Abschnitt 11.1.
- rot $\vec{A}(u_1, u_2, u_3) = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ mit $\vec{A} = \sum_{i=1}^{3} \vec{e}_{u_i} A_{u_i}(u_1, u_2, u_3)$. Wegen

$$\vec{\nabla} u_i = \sum_j \frac{\vec{e}_{u_j}}{f_{u_j}} \underbrace{\frac{\partial u_i}{\partial u_j}}_{=\delta_{ij}} = \frac{\vec{e}_{u_i}}{f_{u_i}}$$

können wir $\vec{e}_{u_i}$ durch $(\vec{\nabla} u_i) f_{u_i}$ ersetzen und erhalten

$$\begin{aligned} \text{rot}\,\vec{A} &= \vec{\nabla} \times \left(\sum_{i=1}^{3} (\vec{\nabla} u_i) f_{u_i} A_{u_i} \right) \\ &\overset{\text{Produktregel}}{=} \sum_{i=1}^{3} \left\{ (\underbrace{\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}}_{=0\,!} u_i) f_{u_i} A_{u_i} - (\vec{\nabla} u_i) \times \vec{\nabla}(f_{u_i} A_{u_i}) \right\} \end{aligned}$$

Verwenden wir Gleichung für den Gradienten und die Relation $\vec{\nabla} u_i = \vec{e}_{u_i} f_{u_i}^{-1}$ (s. o.), so können wir wegen

$$\sum_{i,j} \frac{\vec{e}_{u_i}}{f_{u_i}} \times \frac{\vec{e}_{u_j}}{f_{u_j}} \frac{\partial}{\partial u_j} (f_{u_i} A_{u_i}) = \sum_{i,j} \frac{\varepsilon_{ijk}}{f_{u_1} f_{u_2} f_{u_3}} \vec{e}_{u_k} f_{u_k} \frac{\partial}{\partial u_j} (f_{u_i} A_{u_i})$$

die Rotation von $\vec{A}$ auch in Determinanten-Schreibweise bringen:

$$\text{rot}\,\vec{A} = \frac{1}{f_{u_1} f_{u_2} f_{u_3}} \begin{vmatrix} f_{u_1} \vec{e}_{u_1} & f_{u_2} \vec{e}_{u_2} & f_{u_3} \vec{e}_{u_3} \\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3} \\ f_{u_1} A_{u_1} & f_{u_2} A_{u_2} & f_{u_3} A_{u_3} \end{vmatrix}$$

- div $\vec{A}(u_1, u_2, u_3) = \vec{\nabla} \cdot \vec{A}$ mit $\vec{A} = \sum_{i=1}^{3} \vec{e}_{u_i} A_{u_i}(u_1, u_2, u_3)$. Für ein Rechtssystem gilt für $\vec{e}_{u_1}, \vec{e}_{u_2}, \vec{e}_{u_3}$ bei zyklischer Vertauschung

$$\vec{e}_{u_3} = \vec{e}_{u_1} \times \vec{e}_{u_2} = (\vec{\nabla} u_1) \times (\vec{\nabla} u_2) f_{u_1} f_{u_2}$$

und damit $\left(\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} = 0\right)$

$$\begin{aligned} \text{div}\,\vec{A} &= \vec{\nabla} \cdot \Big\{ (\vec{\nabla} u_1) \times (\vec{\nabla} u_2) f_{u_1} f_{u_2} A_{u_3} + (\vec{\nabla} u_2) \times (\vec{\nabla} u_3) f_{u_2} f_{u_3} A_{u_1} \\ &\quad + (\vec{\nabla} u_3) \times (\vec{\nabla} u_1) f_{u_3} f_{u_1} A_{u_2} \Big\} \\ &= \Big(((\vec{\nabla} u_1) \times (\vec{\nabla} u_2)) \cdot \vec{\nabla}(f_{u_1} f_{u_2} A_{u_3}) + ((\vec{\nabla} u_2) \times (\vec{\nabla} u_3)) \cdot \vec{\nabla}(f_{u_2} f_{u_3} A_{u_1}) \\ &\quad + ((\vec{\nabla} u_3) \times (\vec{\nabla} u_1)) \cdot \vec{\nabla}(f_{u_3} f_{u_1} A_{u_2}) \Big) \end{aligned}$$

Man beachte die zyklische Vertauschung der einzelnen Summanden! Durch die Anwendung der Produktregel $\vec{\nabla} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = (\vec{\nabla} \times \vec{a}) \cdot \vec{b} - (\vec{\nabla} \times \vec{b}) \cdot \vec{a}$ und $(\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}) = 0$ vereinfachte sich der Ausdruck. Ersetzen wir wieder ∇u_i, so erhalten wir

$$\text{div}\,\vec{A} = \frac{1}{f_{u_1} f_{u_2} f_{u_3}} \left\{ \frac{\partial}{\partial u_3} (f_{u_1} f_{u_2} A_{u_3}) + \frac{\partial}{\partial u_1} (f_{u_2} f_{u_3} A_{u_1}) + \frac{\partial}{\partial u_2} (f_{u_3} f_{u_1} A_{u_2}) \right\}$$

11.3. div grad ϕ

div grad $\phi(u_1, u_2, u_3) = \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\phi = \Delta\phi$ wird als *Laplace-Operator* bezeichnet, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$.

In Abschnitt 11.2 haben wir die Divergenz des Vektorpotentials $\vec{A}$ in allgemeinen Koordinaten bestimmt. Für den Fall $\vec{A} = \operatorname{grad}\phi$ erhalten wir mit $\operatorname{grad}\phi = \sum_i \frac{\vec{e}_{u_i}}{f_{u_i}} \frac{\partial\phi}{\partial u_i} \Longrightarrow A_i = \frac{1}{f_{u_i}} \frac{\partial\phi}{\partial u_i}$ den Laplace-Operator in allgemeinen Koordinaten:

$$
\begin{aligned}
\Delta\phi = \operatorname{div}\operatorname{grad}\phi(u_1, u_2, u_3) &= \frac{1}{f_{u_1} f_{u_2} f_{u_3}} \left\{ \frac{\partial}{\partial u_3} \left(\frac{f_{u_1} f_{u_2}}{f_{u_3}} \frac{\partial\phi}{\partial u_3} \right) + \frac{\partial}{\partial u_1} \left(\frac{f_{u_2} f_{u_3}}{f_{u_1}} \frac{\partial\phi}{\partial u_1} \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{f_{u_3} f_{u_1}}{f_{u_2}} \frac{\partial\phi}{\partial u_2} \right) \right\}
\end{aligned}
$$

Zusammenfassung für Kugelkoordinaten:
Die Skalenfaktoren sind $f_r = 1, f_\vartheta = r, f_\varphi = r\sin\vartheta$.

$$
\begin{aligned}
\operatorname{grad}\phi(r,\vartheta,\varphi) &= \left(\vec{e}_r \frac{\partial\phi}{\partial r} + \frac{1}{r}\vec{e}_\vartheta \frac{\partial\phi}{\partial\vartheta} + \frac{1}{r\sin\vartheta}\vec{e}_\varphi \frac{\partial\phi}{\partial\varphi} \right) \\
\operatorname{rot}\vec{A}(r,\vartheta,\varphi) &= \left\{ \vec{e}_r \left(\frac{\partial}{\partial\vartheta}(r\sin\vartheta\, A_\varphi) - \frac{\partial}{\partial\varphi}(r\, A_\vartheta) \right) + r\,\vec{e}_\vartheta \left(\frac{\partial}{\partial\varphi} A_r - \frac{\partial}{\partial r}(r\sin\vartheta\, A_\varphi) \right) \right. \\
&\quad \left. + r\sin\vartheta\,\vec{e}_\varphi \left(\frac{\partial}{\partial r}(r\, A_\vartheta) - \frac{\partial}{\partial\vartheta} A_r \right) \right\} \\
\operatorname{div}\vec{A}(r,\vartheta,\varphi) &= \frac{1}{r^2\sin\vartheta} \left\{ \frac{\partial}{\partial r}(r^2\sin\vartheta\, A_r) + \frac{\partial}{\partial\vartheta}(r\sin\vartheta\, A_\vartheta) + \frac{\partial}{\partial\varphi}(r\, A_\varphi) \right\} \\
\Delta\phi(r,\vartheta,\varphi) &= \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\vartheta} \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\vartheta} \right) + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi} \left(\frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi} \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{cot\vartheta}{r}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\vartheta} \right) \phi(r,\vartheta,\varphi) \\
&= \left\{ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2} + \cot\vartheta \frac{\partial}{\partial\vartheta} + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \right) \right\} \phi(r,\vartheta,\varphi)
\end{aligned}
$$

Bemerkung: Kugelkoordinaten sind für die Behandlung fundamentaler Probleme besonders wichtig. Eine ebenso wichtige Rolle spielen Zylinderkoordinaten, für die ähnliche Formeln gelten. Wir empfehlen für einen sicheren Umgang mit den neuen Begriffen, obige Beziehungen für Zylinderkoordinaten selbst zu berechnen.

12. Fourierentwicklung

Vorbemerkungen

Die Fouriertransformation ist ein wichtiges mathematisches Hilfsmittel, das bei zahlreichen Problemen Anwendung findet, z. B. in der Optik und Akustik. Einige Beispiele:

- Schallquellen, die periodisch veränderlichen Druck auf das Ohr ausüben. Die Aufgabe hierbei ist, das Signal nach Frequenzen zu zerlegen wie das menschliche Ohr.
- Wir erinnern uns, dass die Kraft auf einen gedämpften, harmonischen Oszillator als periodisch angenommen wurde. Man kann nun eine beliebige zeitlich veränderliche Kraft nach periodischen Kräften $F(\omega)e^{i\omega t}$ zerlegen.
- Wir betrachten vorab kurz Druckwellen, z. B. Schallwellen. Später werden wir uns mit Schallwellen genauer auseinandersetzen. Für diese gilt die Wellengleichung

  $$\frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\kappa}{\rho_0} \frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial x^2}$$

  Mit dem Separationsansatz $P(x,t) = f(x)g(t)$ erhält man

  $$f(x)\frac{d^2 g}{dt^2} = v^2 \frac{d^2 f}{dx^2} g(t) \Longrightarrow \frac{\frac{d^2 g}{dt^2}}{g} = v^2 \frac{\frac{d^2 f}{dx^2}}{f} = C = \text{const.}$$

  wobei für die Ausbreitungsgeschwindigkeit v der Schallwellen folgende Beziehung mit der Kompressibilität κ und der Dichte ρ_0 des Mediums gilt: $v^2 = \frac{\kappa}{\rho_0}$; damit ist $\alpha^2 = \frac{-C}{v^2}$ bei einem Lösungsansatz $f(x) = f_+ e^{i\alpha x} + f_- e^{-i\alpha x}$.

  Soll nun f periodisch (z. B. 2π-periodisch) sein, fordert man als Randbedingung z. B. $f(0) = f(2\pi) = 0$. Damit erhält man $f(x) = f_0 \sin(\alpha x)$ mit $\alpha = 0, \pm\frac{1}{2}, \pm 1, \pm\frac{3}{2}, \dots = \pm\frac{2\pi}{\lambda}$ und $\lambda = 4\pi, 2\pi, \frac{4}{3}\pi, \dots$ Dies ergibt dann $g(t) = g_0 \sin(\alpha v t + \phi) = g_0 \sin(\frac{2\pi}{\lambda} v t + \phi)$.

  Es gilt $\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{\lambda} v \Longrightarrow \lambda\nu = v$. Wir erhalten eine stehende Welle als Ergebnis.

  Da es sich bei der Wellengleichung um eine lineare Differentialgleichung handelt, ist die Superposition von Lösungen wiederum eine Lösung:

  $$p(x,t) = \sum_n p_n \sin\left(\frac{n}{2} x\right) \sin\left(\frac{n}{2} v t + \phi_n\right)$$

  Die p_n und ϕ_n sind z. B. durch Anfangsbedingungen wie $p(x,0)$ und $\frac{\partial}{\partial t} p(x,t)\big|_{t=0}$ festzulegen.

12.0. Einleitung

Gesucht wird eine Möglichkeit eine beliebige Funktion $f(x)$ nach einem Satz von Funktionen $f_n(x)$ zu entwickeln, d. h. als Linearkombination darzustellen[9]:

$$\boxed{f(x) = \sum_n a_n f_n(x)}$$

Im Allgemeinen wird es sich dabei um einen unendlichen Satz von Funktionen handeln; die f_n bilden dabei eine Vektorraumbasis.

[9] Jean Baptist Joseph, Baron de Fourier (1768–1830)

Beispiel: Die Taylorentwicklung (o.B.d.A. bei $x_0 = 0$)

$$f(x) = \sum_{n=1} \infty \frac{1}{n!} \frac{d^n f}{dx^n}\bigg|_{x=0} x^n \Longrightarrow f_n = x^n$$

x^n ist Eigenfunktion zum Differentialoperator $x\frac{d}{dx}$ und eindeutig bestimmt für ganze nichtnegative n.

12.1. Fourierentwicklung für periodische Funktionen, Funktionen im endlichen Intervall

Betrachen wir Funktionen auf dem endlichen Intervall $\left[-\frac{L}{2}; +\frac{L}{2}\right]$, zunächst mit den Bedingungen $f(-\frac{L}{2}) = f(\frac{L}{2})$ und $f'(-\frac{L}{2}) = f'(\frac{L}{2})$. Diese Funktionen lassen sich mittels $f(L+x) = f(x)$ auf die gesamte reelle Achse fortsetzen und sind dann periodische Funktionen.

Gesucht wird nun ein vollständiges[10] System von Funktionen, nach denen f entwickelt werden kann; diese sollten daher ebenfalls periodisch sein. Dazu sucht man Eigenfunktionen des linearen Differentialoperators $-\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2$:

$$-\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 f_\lambda(x) = \lambda f_\lambda(x)$$

Die Lösungen dieser Gleichung sind bereits aus dem Abschnitt über Lineare Differentialgleichungen bekannt, der Ansatz lautet: $f_\lambda(x) = a\cos(\omega x) + b\sin(\omega x)$

- $\omega^2 f_\lambda(x) = \lambda f_\lambda(x) \Longrightarrow \lambda = \omega^2$
- $f\left(-\frac{L}{2}\right) = f\left(+\frac{L}{2}\right)$ bzw. $f(L) = f(0)$ und $f'\left(-\frac{L}{2}\right) = f'\left(+\frac{L}{2}\right) \Longrightarrow \omega L = 2\pi n$.
  $\boxed{\omega = \frac{2\pi n}{L}}$, $n \in \mathbb{N}$.

Daraus kann man nun folgern:

(i) Es gibt einen Satz von Funktionen der Gestalt

$$\left\{\cos\left(\frac{2\pi n x}{L}\right)\right\}, \quad \left\{\sin\left(\frac{2\pi n x}{L}\right)\right\},$$

welche im Funktionenraum bzgl. des *inneren Produkts*

$$(f, g) = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dx\, f(x) g(x)$$

wechselweise senkrecht aufeinander stehen.

Zum Beweis: $D := -\left(\frac{d}{dx}\right)^2$ ist ein selbstadjungierter (symmetrischer) Operator auf periodischen (und differenzierbaren) Funktionen (vgl. Sätze: Sturm – Liouville). Durch zweifache partielle Integration und unter Beachtung der L-Periodizität von f und g erhält

[10] Beweis folgt später

man wegen der Periodizität von f und g

$$\begin{aligned}
(f, Dg) &= \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dx\, f(x) \left(-\left(\frac{d}{dx}\right)^2\right) g(x) \\
&= \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dx \left(\frac{d}{dx} f(x)\right)\left(\frac{d}{dx} g(x)\right) - f(x)\left(\frac{d}{dx} g(x)\right)\Big|_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \\
&= \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dx \left(\left(-\left(\frac{d}{dx}\right)^2\right) f(x)\right) g(x) + \frac{d}{dx} f(x) g(x)\Big|_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \\
&= (Df, g)
\end{aligned} \tag{12.1}$$

Damit gilt für eine Eigenfunktion f_λ, d.h. $Df_\lambda = \lambda f_\lambda$,

$$(f_{\lambda'}, Df_\lambda) = \lambda(f_{\lambda'}, f_\lambda), \quad (Df_{\lambda'}, f_\lambda) = \lambda'(f_{\lambda'}, f_\lambda)\,.$$

Nach (12.1) gilt somit $(\lambda - \lambda')(f_{\lambda'}, f_\lambda) = 0$, also $(f_{\lambda'}, f_\lambda) = 0$ für $\lambda \neq \lambda'$.

(ii) Der Definitionsbereich der $\{f\}$ und $\{g\}$ in (i) ist gleich; darauf kommen wir später zurück.

(iii) Es liegt eine Entartung von $\left\{\cos\left(\frac{2\pi nx}{L}\right), \sin\left(\frac{2\pi nx}{L}\right)\right\}$ vor. Wir können direkt nachrechnen (partielle Integration), dass mit obiger Definition auch die Funktionen mit gleichem n senkrecht aufeinander stehen; wir werden das im nächsten Abschnitt begründen.

(iv) Es bleibt noch die Normierung von $\sin\left(\frac{2\pi nx}{L}\right)$ bzw. $\cos\left(\frac{2\pi nx}{L}\right)$ zu überprüfen. Dazu berechnen wir die Normierung für die Quadrate der Funktionen und verwenden das bekannte Ergebnis für die Integration von $\sin^2(x)$ bzw. $\cos^2(x)$:

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dx \sin^2\left(\frac{2\pi nx}{L}\right) = \frac{L}{2}\int_{-1}^{1} dy \sin^2(\pi ny) = \frac{L}{2}\int_{-1}^{1} dy \frac{\left(\sin^2 + \cos^2\right)(\pi ny)}{2} = \frac{L}{2}$$

Die Rechnung für $\cos^2\left(\frac{2\pi nx}{L}\right)$ ergibt dasselbe Resultat.

Damit bilden also $\left\{\frac{1}{\sqrt{L}}, \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{2\pi nx}{L}\right), \sqrt{\frac{2}{L}}\cos\left(\frac{2\pi nx}{L}\right)\right\}$ ein Orthonormalsystem.

Die Fourier-Entwicklung erhält man, indem man $f(x)$ als Summe über die Basisfunktionen s_n und c_n und sog. Projektionsfaktoren a_n und b_n schreibt, wobei diese Faktoren von der Projektion von $f(x)$ auf die Basisfunktionen herrühren:

$$s_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{2\pi nx}{L}\right), \quad c_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\cos\left(\frac{2\pi nx}{L}\right), \quad c_0 = \frac{1}{\sqrt{L}}$$

$$\begin{aligned}
a_n &= (f, c_n) = \sqrt{\frac{2}{L}}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dx \cos\left(\frac{2\pi nx}{L}\right) f(x) \\
b_n &= (f, s_n) = \sqrt{\frac{2}{L}}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dx \sin\left(\frac{2\pi nx}{L}\right) f(x) \\
\frac{a_0}{\sqrt{2}} &= (f, c_0) = \frac{1}{\sqrt{L}}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dx f(x)
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich folgende Darstellung für $f(x)$:

$$f(x) = (c_0, f)c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \{(c_n, f)c_n(x) + (s_n, f)s_n(x)\}$$

oder

$$\boxed{f(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\frac{a_0}{2} + \sqrt{\frac{2}{L}}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n \cos\left(\frac{2\pi n x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n x}{L}\right)\right\}}$$

Obige Gleichungen gelten für periodische, stetig differenzierbare Funktionen.

Die Fourier-Entwicklung mit obigen Fourierkoeffizienten a_n und b_n besitzt optimale Konvergenz und ist eindeutig. Um die Behauptung zu beweisen, betrachten wir das Fehlerquadrat Q, also die quadratische Abweichung der Fourierentwicklung (wobei wir a_n und b_n der Einfachheit halber zu a_n zusammenfassen) von der Funktion $f(x)$ selbst:

$$\begin{aligned} Q &= \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dx \left(f(x) - \sum_{n=0}^{N} a_n f_n(x)\right)^2 = \left(f - \sum_{n=0}^{N} a_n f_n, f - \sum_{n=0}^{N} a_n f_n\right) \\ &= (f, f) + \sum_{n=0}^{N} a_n^2 (f_n, f_n) - \sum_{n=0}^{N} \{a_n(f, f_n) + a_n(f_n, f)\} \end{aligned}$$

Q ist dann extremal, wenn $\frac{dQ}{da_k} = 0 \Leftrightarrow 2a_k - 2(f, f_k) = 0 \Leftrightarrow a_k = (f, f_k)$, also wenn die a_k Fourierkoeffizienten sind.

Das Fehlerquadrat ergibt sich dann zu: $Q = (f, f) - \sum_{n=0}^{N} a_n^2$; falls $\lim_{N\to\infty} Q = 0$ sprechen wir von einem vollständigen Funktionensystem $\{f_n\}$ für die Klasse der Funktionen (in diesem Fall periodische, stetig differenzierbare Funktionen). Die f_n sind Basisvektoren eines ∞-dimensionalen Vektorraums mit innerem Produkt (ein sog. Hilbertraum).

Falls obige Bedingungen (i) und (ii) erfüllt sind, liefert der lineare Differentialoperator D stets ein vollständiges Funktionensystem. Zum Schluß dieses Abschnitts übernehmen wir noch zwei Sätze aus der Mathematik über das Konvergenzverhalten der Fourier-Reihen:

(*) Für jede beschränkte und im Intervall stückweise stetige Funktion konvergiert die Fourierreihe im Mittel gegen die gegebene Funktion, d. h. der quadratische Fehler geht gegen null, und es gilt die Parsevalsche Gleichung

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dx f^2 = (f, f) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2$$

(**) Lässt sich das Definitionsintervall der Funktion in endlich viele Intervalle zerlegen, in denen die Funktion stetig und monoton ist, und sind an den Unstetigkeitsstellen der obere und untere Grenzwert f_+ bzw. f_- definiert, so konvergiert die Fourierreihe dieser Funktionen an stetigen Stellen gegen $f(x)$ und an unstetigen Stellen gegen $\frac{f_+ + f_-}{2}$.

Die Koeffizienten $\{a_n, b_n\}$ sind die Fourier-Transformierten von $f(x)$.

$$f(x) \Longleftrightarrow \{a_n, b_n\}$$

12.2. Komplexe periodische Funktionen

Gesucht sind Lösungen von $i\frac{d}{dx}f_\omega(x) = \omega f_\omega(x)$ (ω reell) für komplexwertige Funktionen f mit $f_\omega(0) = f_\omega(L)$.

Mögliche Lösungen sind $f_{\omega_n}(x) = ae^{-i\omega_n x}$ mit $\omega_n = \frac{2\pi n}{L}$ wie in Abschnitt 12.1, d. h. $\left\{e^{\frac{i2\pi n}{L}}, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\right\}$ bilden ein Basissystem.

$D = i\frac{d}{dx}$ ist *selbstadjungierter* Operator für das innere Produkt im Vektorraum der komplexwertigen Funktionen,

$$\begin{aligned}
(f,g) &= \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dx f^*(x)g(x) \\
(f,Dg) &= \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dx f^* \left(i\frac{d}{dx}\right) g(x) = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dx \left(i\frac{d}{dx}f\right)^* g(x)
\end{aligned}$$

Wegen der Periodizität fällt hier wieder der Randterm heraus.

Der Beweis zur Orthogonalität läßt sich analog zu Abschnitt 12.1 führen, hier liegt jedoch *keine Entartung* vor. Es ergibt sich aber auch direkt

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dx \left(e^{\frac{i2\pi n' x}{L}}\right)^* e^{\frac{i2\pi n x}{L}} = \frac{L}{i2\pi(n-n')} e^{\frac{i2\pi(n-n')x}{L}}\Bigg|_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} = \begin{cases} 0 & n \neq n' \\ L & n = n' \end{cases} ,$$

die normierten Basisvektoren sind $e_n = \frac{e^{\frac{i2\pi n x}{L}}}{\sqrt{L}}$.

Komplexe Fouriertransformation:

$$\boxed{\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \frac{1}{\sqrt{L}} e^{\frac{i2\pi n x}{L}} \\
a_n &= (e_n, f) = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dx \frac{1}{\sqrt{L}} e^{\frac{i2\pi n x}{L}} f(x)
\end{aligned}}$$

Beispiel (zu 12.1):

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} < x < 1 \end{cases} \qquad L = 1$$

ist beispielhaft für den Schalldruck $p(t) = p_0 + f(t)$. Die Fourierentwicklung ergibt

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sqrt{2}\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\sqrt{2}a_n\cos(2\pi nx) + \sqrt{2}b_n\sin(2\pi nx)\right\} \\
a_n &= \sqrt{2}\int_0^L dx\cos(2\pi nx)f(x) = \sqrt{2}\int_0^{\frac{1}{2}} dx\cos(2\pi nx) \\
&= \sqrt{2}\frac{\sin(2\pi nx)}{2\pi n}\bigg|_0^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}\frac{\sin(\pi n)}{2\pi n} = 0 \quad (n>0) \\
a_0 &= \sqrt{2}\int_0^{\frac{1}{2}} dx = \frac{\sqrt{2}}{2} \\
b_n &= \sqrt{2}\int_0^{\frac{1}{2}} dx\sin(2\pi nx) = \sqrt{2}\left(-\frac{\cos(2\pi nx)}{2\pi n}\right)\bigg|_0^{\frac{1}{2}} \\
&= -\sqrt{2}\left(\frac{\cos(\pi n)-1}{2\pi n}\right) = \sqrt{2}\frac{(1-(-1)^n)}{2\pi n}\,,
\end{aligned}
$$

zusammen also

$$
f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-(-1)^n)}{\pi n}\sin(2\pi nx)
$$

mit $f(0) = \frac{1}{2} = f\left(\frac{1}{2}\right)$, dem Mittelwert von 0 und 1.

12.3. Fourierentwicklung im unendlichen Intervall

Bisher hatten wir Fourierreihen nur für auf dem endlichen Intervall L definierte Funktionen und eventuell periodische fortgesetzte Funktionen betrachtet. Unser Ziel in diesem Abschnitt ist es, die Fourierentwicklung für beliebige Funktionen auf einem unendlichen Intervall zu betrachten ($L \to \infty$).

Zunächst sei x die Zeit t (dann wäre es besser $L \to T$ umzutaufen). Aus Abschnitt 12.1 kennen wir die Beziehung $\omega_n = 2\pi\frac{n}{L} = 2\pi\nu$. Für $L \to \infty$ folgt $\nu \to 0$, d. h. die Frequenzen werden „dicht“. Für $\epsilon := \frac{2\pi}{L}$ gilt natürlich ebenso $\epsilon \to 0$ ($L \to \infty$).

Betrachten wir

$$
f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\underbrace{(\omega_{n+1}-\omega_n)}_{=\epsilon}\frac{\sqrt{L}}{2\pi}a_n e^{i\omega_n x}
$$

und

$$
g(\omega_n) = \frac{\sqrt{L}}{\sqrt{2\pi}}a_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} e^{-i\omega_n x}f(x)dx\,,
$$

so geht $f(x)$ für $L \to \infty, \epsilon \to 0$ in ein Integral über und wir erhalten

$$
\boxed{
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, g(\omega)e^{i\omega x} \\
g(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} dx\, f(x)e^{-i\omega x}
\end{aligned}
}
$$

Diese Fouriertransformation ist eine (lineare) Integraltransformation. Wir werden in diesem Abschnitt noch weitere Transformationen kennenlernen, z. B. die Laplace-Transformation.

Anmerkung: Für die Fouriertransformation existieren verschiedene Notationen. In der sog. Cambridge-Notation wird der Faktor $\frac{1}{2\pi}$ der Funktion $f(x)$ zugeordnet, für gewöhnlich verteilt man ihn jedoch symmetrisch auf $f(x)$ und $g(\omega)$.

Sei $f(x)$ eine reellwertige Funktion. Dann gilt

$$\begin{aligned} f^*(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, g^*(\omega) e^{-i\omega x} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\infty}^{-\infty} d\bar{\omega}\, g^*(-\bar{\omega}) e^{i\bar{\omega} x} \\ &= f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, g(\omega) e^{i\omega x}\,, \end{aligned}$$

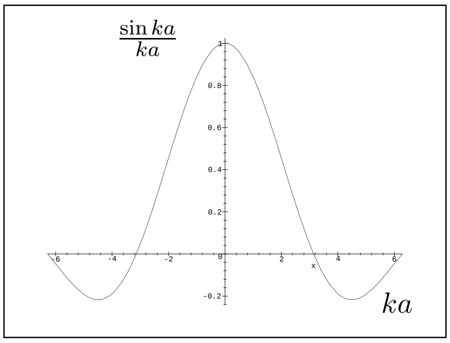
also $g^*(-\omega) = g(\omega)$ (oft: $g(\omega) \to \tilde{f}(\omega)$).

Falls x sich nicht auf die Zeit, sondern eine räumliche Koordinate bezieht, schreibt man üblicherweise k (Wellenzahl) statt ω.

Beispiele zur Fouriertransformation:

(i) $f(x) = \begin{cases} 1 & -a \leq x \leq +a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \tilde{f}(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, f(x)\, e^{-ikx} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{a} dx\, e^{-ikx} \\ &= \frac{1}{-i\sqrt{2\pi}} \left(e^{-ika} - e^{ika} \right) \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, a\, \frac{\sin ka}{ka} \end{aligned}$$



Diese Funktion beschreibt die Beugung von Wellen an einem Spalt: Für Wellen gilt $\omega^2 = c^2k^2 = c^2\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2$. Bei Beugung an einem Spalt wird die Wellenzahl zerlegt in einen Anteil parallel zum Spalt und einen Anteil senkrecht zum Spalt: $k^2 = k_{||}^2 + k_{\perp}^2$. In unserem obigen Fall ist k durch $k_{||} = k \sin\alpha$ zu ersetzen. Für kleine Winkel gilt die Abschätzung $\sin\alpha \approx \alpha$. Für die Intensität erhält man $\tilde{f}^2(k_{||}) \approx \frac{2}{\pi} a^2 \frac{\sin^2(ka\alpha)}{(ka\alpha)^2}$.

(ii) $f(x) = e^{-\alpha x^2}$

$$\begin{aligned} \tilde{f}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-\alpha x^2} e^{-i\omega x} \overset{(\dagger)}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-\alpha(x^2 + \frac{i\omega}{2\alpha})^2} e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}} \int_{-\infty+\frac{i\omega}{2\alpha}}^{\infty+\frac{i\omega}{2\alpha}} du\, e^{-\alpha u^2} \overset{(\ddagger)}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}} \int_{-\infty}^{\infty} du\, e^{-\alpha u^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}} \end{aligned}$$

($\dagger$): Quadratische Ergänzung im Exponenten
($\ddagger$): Funktionentheorie: Satz von Cauchy ... (siehe letzter Abschnitt)

$\tilde{f}(\omega)$ beschreibt wieder eine Gauß'sche Glockenkurve.

Jetzt wollen wir noch kurz zwei weitere Transformationen angeben:

. **Laplace-Transformation** Diese Transformation findet in der Physik häufige Anwendung, zum Beispiel bei Einschaltvorgängen.

$$F(p) = L[f] = \int_0^\infty dt\, e^{-pt} f(t)$$

Ihre Umkehrung ist

$$f(t) = \frac{1}{2\pi\, i} \int_{C-i\,\infty}^{C+i\,\infty} dz\, F(z)\, e^{zt}$$

. **Mellin-Transformation**

$$F(p) = M[f] = \int_0^\infty dt\, t^{p-1} f(t)$$

Beide Transformationen sind *lineare Integraltransformationen*, welche sich zur Behandlung linearer Differentialgleichungen eignen. Da wir im Rahmen dieser Vorlesung nicht weiter darauf eingehen wollen, verweisen wir den interessierten Leser auf die Funktionentheorie.

12.4. Fouriertransformation von Ableitungen, „Faltungen“

- Wir bilden die Ableitung $\frac{df}{dx}$ mit $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk\, \tilde{f}(k) e^{ikx}$:

$$\frac{df}{dx} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(ik\tilde{f}(k)e^{ikx} \right) dk \Longrightarrow \widetilde{\left(\frac{df}{dx}\right)}(k) = ik\tilde{f}(k)$$

- *Faltung* Wir bilden

$$h(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dy\, f(y)\, g(x-y)$$

mit

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk'\, \tilde{f}(k') e^{ik'y}$$

und

$$g(x-y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk''\, \tilde{g}(k'') e^{ik''(x-y)}\,.$$

Die darauf angewandte Fouriertransformation ergibt

$$\begin{aligned}\tilde{h}(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx h(x) e^{-ikx} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy\, f(y)\, g(x-y) e^{-ik(x-y)-iky} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} d(x-y) g(x-y) e^{-ik(x-y)}\, f(y) e^{-iky} = \tilde{g}(k)\, \tilde{f}(k)\,!\end{aligned}$$

Eine Faltung geht bei Fouriertransformation also in ein Produkt aus Fouriertransformationen über. Umgekehrt kann man ebenso aus einem Produkt von Fouriertransformationen durch Rücktransformation eine Faltung erzeugen.

12.5. Parseval'sche Gleichung für Fouriertransformationen (im unendlichen Bereich)

In Abschnitt 12.1 haben wir für endliche L gezeigt:

$$(f,f) = \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} f^*(x)f(x)dx \overset{\text{Orthogonalität!}}{=} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |a_n|^2$$

Später (Abschnitt 12.3) haben wir dann L gegen unendlich streben lassen. Die Summe über die a_n geht dann über in ein Integral: $\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\, \frac{L}{2\pi}$. Mit $\frac{\sqrt{L}}{\sqrt{2\pi}} a_n = g(\omega_n)$ folgt

$$(f,f) = \int_{-\infty}^{+\infty} f^*(x)f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} g^*(\omega)g(\omega)d\omega$$

Dafür sollten f und g „quadratintegrabel" sein.

Bemerkung: Wir betrachten das innere Produkt von zwei Eigenfunktionen $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ikx} = f_k(x)$:

$$(f_k, f_{k'}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{-ikx}e^{+ik'x} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{-i(k-k')x} =? \tag{12.2}$$

Für diskrete k konnten wir obigen Ausdruck schreiben als $\delta_{k\,k'}$, wobei hier das Kronecker-Symbol gemeint ist. In (12.2) handelt es sich aber um eine Funktion von $(k - k')$. Die Lösung dieses Problems führt uns zur Dirac'schen δ-Funktion.

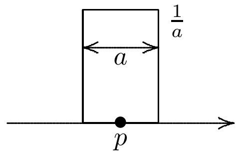
13. Dirac'sche δ-Funktion, Distributionen

13.1. Die Dirac'sche δ-Funktion

Wir betrachten eine lineare Integraltransformation

$$\boxed{F(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \delta(p-x)\, f(x) \stackrel{!}{=} f(p)} \tag{13.1}$$

Das Integral soll also genau den Wert von f an der Stelle p annehmen, wobei f eine beliebige (integrable) Funktion ist. Zunächst ist klar, daß $\delta(p-x)$ keine gewöhnliche Funktion sein kann. Wir wählen zur Berechnung zunächst eine Kastenfunktion



$$\delta_a(p-x) = \begin{cases} \dfrac{1}{a} & \text{für } |p-x| \le \dfrac{a}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Offensichtlich ist $\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \delta(p-x) = 1$. Nach dem Mittelwertsatz folgt mit $\frac{-a}{2} \le (p-\bar{x}) \le \frac{a}{2}$

$$F_a(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \delta_a(p-x)\, f(x) = f(\bar{x})$$

Zwar ist $\lim_{a\to 0} F_a(p) = f(p)$, wir können den Limes aber nicht unter das Integral ziehen. $F_a(p)$ ist eine lineare Integraltransformation, $\lim_{a\to 0} F_a(p)$ aber nicht! Jedoch ergeben die $F_a(p)$ für $a \to 0$ eine *Folge von linearen Funktionalen*, die in einem vollständigen metrischen Raum gegen das δ-Funktional konvergieren.

Gleichung (13.1) ist also symbolisch zu verstehen. Solche Funktionale bezeichnet man als *Distributionen* (Funktionen, die nur unter dem Integral existieren).

Anmerkung: In der Mathematik ist ein lineares Funktional eine lineare Abbildung von einem Vektorraum bzw. Funktionenraum (Dualraum) auf einen Zahlenraum. Lineare Integraltransformationen sind spezielle Funktionale, welche in der linearen Algebra auch durch ein inneres Produkt dargestellt werden. Auch Gleichung (13.1) ist ein solches inneres Produkt.

13.2. Fouriertransformation und δ-Funktion

Wir setzen $a_n = \frac{1}{\sqrt{L}} \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} d\bar{x}\, f(\bar{x}) e^{-2\pi i n \frac{\bar{x}}{L}}$ in $f(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{2\pi i n \frac{x}{L}}$ ein und erhalten

$$f(x) = \frac{1}{L} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} d\bar{x}\, f(\bar{x}) e^{2\pi i n \frac{x-\bar{x}}{L}}$$

Dieser Ausdruck beschreibt ein δ-Funktional $f(\cdot) \to f(x)$. Durch Vertauschung von Integration und Summation ergibt sich formal

$$f(x) \text{ „=“ } \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} d\bar{x} \left\{ \frac{1}{L} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i n \frac{x-\bar{x}}{L}} \right\} f(\bar{x})$$

$$\Longrightarrow \boxed{\frac{1}{L} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i n \frac{x-\bar{x}}{L}} = \delta(x-\bar{x}) \quad \left(\text{hier auf } \left[-\tfrac{L}{2}; \tfrac{L}{2}\right]\right)}$$

Für den Grenzfall $L \to \infty$ erhalten wir mit $\Delta\omega = \frac{2\pi}{L}$ (s. Abschnitt 12.1)

$$\boxed{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\, e^{i\omega(x-\bar{x})} = \delta(x-\bar{x})\,.}$$

Damit vereinfacht sich auch die Orthogonalitätsbeziehung (siehe S. 31):

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{-i(k-k')x} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\bar{x}\, e^{-i(k-k')\bar{x}} \overset{\text{s. o.}}{=} \delta(k-k')\,,$$

d. h. δ_{ik} ist durch $\delta(k-k')$ zu ersetzen.

13.3. Rechnen mit δ-Funktionen

Anmerkung: Wenn Sie sich unsicher fühlen, dann setzen Sie zunächst ein Folge $\{\delta_n(x)\}$ von normalen Funktionen ein und bilden dann den Grenzwert für $n \to \infty$, d. h. $a \to 0$.

Sei beispielsweise $\delta_n(x) = n\, e^{-\pi n^2 x^2}$. Dann ist

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, n\, e^{-\pi n^2 x^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} dy\, e^{-\pi y^2} = 1$$

und $\delta_n(x)$ eine Gauß'sche Glockenkurve, welche mit wachsendem n ein immer schärferes, steileres Maximum erreicht.

Für die δ-Funktion gelten folgende Rechenregeln

(i) $\int_{-\infty}^{+\infty} dx'\, \delta(x'-x) f(x') = f(x)$

(ii) Substitution: $x'' = -x' \Longrightarrow \delta(x') = \delta(-x')$, denn

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} dx'\, \delta(x') f(x') &= -\int_{+\infty}^{-\infty} dx''\, \delta(-x'') f(-x'') \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx''\, \delta(-x'') f(-x'') = f(0)\,.\end{aligned}$$

(iii) $\delta(ax') = \frac{1}{|a|}\delta(x')$, denn

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx'\, \delta(ax') f(x') \overset{a\geq 0}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d(ax')}{a}\, \delta(ax') f(\frac{ax'}{a}) = \frac{1}{a} f(0)\,.$$

Die Rechnung für $a < 0$ läuft analog.

(iv) Wir berechnen $\delta(f(x))$ für einfache Nullstellen von $f(x)$ bei $x_1, \ldots, x_n$, dort gilt also $\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_i} \neq 0$. In kleinen Umgebungen der Nullstellen ist $f(x) = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=x_i}(x-x_i)$ (Taylorentwicklung bis zur ersten Ordnung) und damit nach (iii)

$$\delta(f(x)) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\left|\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=x_i}\right|}\delta(x-x_i)$$

(v) Die Ableitung einer δ-Funktion erhalten wir durch partielle Integration, wobei der Randterm wegen der Auswertung bei $-\infty$ und $+\infty$ verschwindet:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \delta'(x) f(x) = -\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \delta(x) f'(x) = -f'(0)$$

Diese zunächst fraglich erscheinende partielle Integration einer Distribution läßt sich rechtfertigen, indem wir wieder zuerst die Formel für eine Folge von Funktionen durchführen und dann den Grenzwert bilden.

13.4. Mehrdimensionale δ-Funktionen

Wir wollen die dreidimensionale δ-Funktion $\delta_3(\vec{x}-\vec{x}_0)$ berechnen, für die gelten soll:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dx_2 \int_{-\infty}^{+\infty} dx_3 \delta_3(\vec{x}-\vec{x}_0) f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0)\,.$$

Wir können daher auch formal $\delta_3(\vec{x}-\vec{x}_0) = \delta(x_1 - x_{0_1})\delta(x_2 - x_{0_2})\delta(x_3 - x_{0_3})$ schreiben, wobei die drei eindimensionalen δ-Funktionen getrennt unter den jeweiligen Integralen zu berechnen sind. *Vorsicht:* Das Produkt von Distributionen, z. B. $\delta^2(x)$ ist nicht wohldefiniert!

Kommen wir zurück zur Elektrostatik. Dort hatten wir folgende Gesetzmäßigkeiten gefunden:

- $\operatorname{div} \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}$
- $\int_A d\vec{a} \cdot \vec{E} = \int_V d^3r\, \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$ (Gauß'sches Gesetz)
- $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r})}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}(\vec{r}-\vec{r}')$ (Coulombgesetz für kontinuierliche Ladungsverteilung)

Für eine Punktladung bei $\vec{r}=0$ gilt dann $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q(\vec{r})}{|\vec{r}|^3}$ und damit $\operatorname{div}\vec{E} = 0$ für $\vec{r} \neq 0$, weil dort $\rho(\vec{r}) \equiv 0$.

Für eine Punktladung erhalten wir somit

$$\boxed{\rho(\vec{r}) = \delta_3(\vec{r})}$$

Setzen wir dies in obige Gleichungen ein (der geneigte Leser möge dies zur Übung tun), erhalten wir das korrekte Resultat.

Betrachten wir nun $\Delta\varphi = \operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi = -\frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}$, wobei

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3r'\, \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}'-\vec{r}|}\,.$$

Mit $\rho(\vec{r}) = -\delta_3(\vec{r})\varepsilon_0$ ist $\Delta\varphi = \delta_3(\vec{r})$ und

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{-\varepsilon_0}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3r'\, \frac{d_3(\vec{r}')}{|\vec{r}'-\vec{r}|} = -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|\vec{r}|} = \mathrm{G}(\vec{r})$$

Diese Funktion ist das *Inverse* des Laplace-Operators und wird für gewöhnlich als *Greens-Funktion* bezeichnet. Wir setzen die Greens-Funktion in die allgemeine Formel für $\varphi(\vec{r})$ ein und erhalten

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3r'\, \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r}\,'-\vec{r}|} = -\frac{1}{\varepsilon_0}\int d^3r'\, \mathrm{G}(\vec{r}-\vec{r}\,')\,\rho(\vec{r}\,')\,.$$

Der so entstandene Ausdruck hat die Form einer Matrixmultiplikation $\sum_{r'} \mathrm{G}_{r\,r'}\rho_{r'}$!

13.5. Auffinden der Greensfunktion mit Fouriertransformationen

Wir betrachten

$$\boxed{\Delta G(\vec{r}) = -\delta_3(\vec{r})}$$

und führen die Fouriertransformation von $G(\vec{r})$ ein:

$$\begin{aligned}
\tilde{G}(\vec{k}) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int d^3r\, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} G(\vec{r}) \\
G(\vec{r}) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int d^3k\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \tilde{G}(\vec{k}) \\
\Delta G(\vec{r}) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int d^3k\, (i\vec{k})^2 e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \tilde{G}(\vec{k}) = -\delta_3(\vec{r}) \\
& \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} = \vec{\nabla}\cdot\left((i\vec{k})e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}\right) = (i\vec{k})^2 e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}\right) \\
\text{Umkehrung:} \quad (-\vec{k}^2)\,\tilde{G}(\vec{k}) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int d^3r\, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \underbrace{\Delta G(\vec{r})}_{\delta_3(\vec{r})} = \frac{-1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}$$

Dies bedeutet

$$\tilde{G}(\vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\,\frac{1}{\vec{k}^2}$$

Die Umkehrung wiederum ergibt

$$\begin{aligned}
G(\vec{r}) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k\, e^{i\overbrace{\vec{k}\cdot\vec{r}}^{|\vec{k}|r\cos\vartheta}} \frac{1}{\vec{k}^2} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^\infty k^2 dk \int_{-1}^{+1} d\cos\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{1}{k^2}\, e^{ikr\cos\vartheta} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dk\, \frac{e^{ikr\cos\vartheta}\Big|_{-1}^{+1}}{ikr} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dk\, \frac{2i\,\sin kr}{ikr} \\
&\overset{x:=kr}{=} \frac{2}{(2\pi)^2 r} \underbrace{\int_0^\infty dx\, \frac{\sin x}{x}}_{=\frac{\pi}{2},\ \text{siehe Funktionentheorie}} \\
&= \frac{1}{4\pi r}
\end{aligned}$$

Dies entspricht den vorherigen Berechnungen der Greens-Funktion!

14. Lineare partielle Differentialgleichungen, die Wellengleichung

14.1. DGL-Typen, Anfangsbedingungen, Randbedingungen

14.1.1. Elliptischer Typ

Die Poisson'sche Differentialgleichung haben wir schon kennengelernt:

$$\Delta\phi(r) = -\frac{\rho(r)}{\epsilon_0},$$

wobei $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ ein Differentialoperator vom elliptischen Typ ist.

14.1.2. Hyperbolischer Typ

Die Wellengleichung (auf die wir in Kürze weiter eingehen werden) ist vom hyperbolischen Typ:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) A(x, y, z, t) = 0$$

14.1.3. Parabolischer Typ

Die Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x\,, t) = \frac{1}{\kappa}\frac{\partial u}{\partial t}$$

ist von parabolischem Typ, ebenso die Schrödingergleichung:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\phi(x,\, t) = -\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\phi(x,\, t) + \ldots$$

allerdings ist die Funktion ϕ hier komplexwertig.

14.1.4. Rand- oder Anfangsbedingungen

Um bei Differentialgleichungen eindeutige Lösungen zu finden, muss man Rand- und/oder Anfangsbedingungen stellen (ein reichhaltiges mathematisches Thema!), z.B. ist bei der Poisson-Gleichung das Potential ϕ (Dirichlet'sche Randbedingung) oder auch $\vec{\nabla}\phi$ (Neumannsche Randbedingung) auf der Leiteroberfläche vorgegeben.

14.2. Herleitung der Wellengleichung

Wir leiten nun die Wellgleichung aus den Maxwellschen Gleichungen für das Vakuum (strom- und ladungsfrei) her:

$$\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0, \quad \operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$
$$\operatorname{div}\vec{B} = 0, \quad \operatorname{rot}\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{E} = \vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{E}) &= \vec{\nabla}\vec{\nabla}\cdot\vec{E} - \Delta\vec{E} = -\mathrm{rot}\,\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}\times\vec{B}) \\ &= -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right),\end{aligned}$$

es gilt also

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t^2}\right)\vec{E}(\vec{r},t) = 0 \tag{14.1}$$

Völlig analog leitet man für das magnetische Feld her:

$$\begin{aligned}\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{B} &= \vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{B}) = \vec{\nabla}\vec{\nabla}\cdot\vec{B} - \Delta\vec{B} = \mathrm{rot}\,\frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right) \\ &= -\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right),\end{aligned}$$

Damit erhält man

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t^2}\right)\vec{B}(\vec{r},t) = 0\,.$$

14.3. Lösung der Wellengleichung in einer Dimension

Wir gehen von der eindimensionalen Form $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)A(x,\,t) = 0$ aus, einer lineare Differentialgleichung; man kann ihre Lösungen also superponieren.

Mit dem Separationsansatz $A(x,\,t) = f(x)\,g(t)$ kann man obige Gleichung umschreiben:

$$\left(\frac{d^2}{dx^2}f(x)\right)g(t) - \frac{1}{c^2}f(x)\left(\frac{d^2}{dt^2}g(t)\right)$$

oder besser:

$$\frac{\frac{d^2f(x)}{dx^2}}{f(x)} = \frac{1}{c^2}\frac{\frac{d^2g(t)}{dt^2}}{g(t)}$$

Die linke Seite ist nun nur von x, die rechte nur von t abhängig, d.h. beide Seiten sind gleich einer von x,t unabhängigen Konstanten $-k^2$. Das führt uns zu zwei bereits bekannten Differentialgleichungen (vgl. harmonischer Oszillator):

$$f''(x) = -k^2\,f(x),\;\; g''(t) = -k^2c^2\,g(t)\,.$$

Die allgemeinen Lösungen im Komplexen bei festem k sind dann

$$f(x) = A\,e^{ikx} + B\,e^{-ikx} \quad \text{und} \quad g(t) = C\,e^{ikct} + D\,e^{-ikct}\,,$$

wobei A,B,C,D von k abhängige Konstanten sind.

Damit erhalten wir

$$A(x,t) = AC\,e^{ik(x+ct)} + BD\,e^{-ik(x+ct)} + AD\,e^{ik(x-ct)} + BC\,e^{-ik(x-ct)}$$

Die allgemeine Lösung mit obigem Ansatz ist schließlich:

$$A(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} dk\left(a(k)\,e^{ik(x+ct)} + b(k)\,e^{-ik(x-ct)}\right)$$

mit $a(k) = a^*(-k)$, $b(k) = b^*(-k)$ für reelle $A(x,t)$.

(i) Betrachten wir folgende Randbedingungen:

1. $A(0,\,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} dk\,\left(a(k)\,e^{ikct} + b(k)\,e^{-ikct}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} dk\,\left(a(k) + b(-k)\right) e^{ikct} \equiv 0$

2. $A(L,\,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} dk\,\left(a(k)\,e^{ikL}\,e^{ikct} + b(k)\,e^{ikL}\,e^{-ikct}\right)$
$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} dk\,\left(a(k)\,e^{ikL} + b(-k)\,e^{-ikL}\right) e^{ikct} \equiv 0$

Wendet man nun die Umkehrung der Fouriertransformation an, so erhält man $a(k) = -b(-k)$ (aus 1.) und $a(k)\,e^{ikL} = -b(-k)\,e^{-ikL}$ (aus 2.). Damit ergibt sich direkt

$$a(k)\,e^{ikL} = a(k)\,e^{-ikL}\,,$$

d. h. $\sin(kL) = 0$, also $kL = n\,\pi$ mit $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Fazit: $k = k_n = \frac{\pi n}{L}$ ist diskret, $a(k)$ und $b(k)$ sind δ-Funktionen! Wir notieren als Ergebnis

$$A(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(a_n e^{ik_n(x+ct)} - a_{-n} e^{ik_n(x-ct)}\right)$$

(ii) Betrachten wir nun die Anfangsbedingung

$$A_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(a_n\,e^{ik_n x} + (-a_{-n})\,e^{ik_n x}\right) \tag{14.2}$$

welche für $x = 0, L$ 0 ergibt, wie erforderlich.

Wählen wir $\bar{L} = 2L$, also das doppelte Intervall wie zuvor, so kann man Gleichung (14.2) auch folgendermaßen formulieren:

$$A_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\bar{L}}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{\bar{L}}}{\sqrt{2\pi}}\,(a_n - a_{-n})\,e^{2\pi i n \frac{x}{\bar{L}}} \tag{14.3}$$

Diese Formulierung beruht auf der Tatsache, dass man $A_0(x)$ im Prinzip beliebig periodisch fortsetzen kann: $A_0\left(x + \frac{\bar{L}}{2}\right) = -A_0(x)$.

Für $a_n = a^*_{-n}$, d. h. für reelles A_0, erhalten wir

$$A_0(x) = -\frac{4}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Im}(a_n)\,\sin(k_n x)$$

Ähnlich gilt

$$\begin{aligned}
\dot{A}_0(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(a_n\, i\, k_n\, c\, e^{ik_n x} + a_{-n}\, i\, k_n\, c\, e^{ik_n x} \right) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (a_n + \underbrace{a_{-n}}_{a_n^*})\, i\, k_n\, c\, e^{ik_n x} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\,\mathrm{Re}(a_n)\, i\, k_n\, c\, e^{ik_n x} \\
&= -\frac{4}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Re}(a_n)\, \sin(k_n x)
\end{aligned}$$

Die Fouriertransformation von $A_0(x)$ und $\dot{A}_0(x)$ liefert also $\mathrm{Im}(a_n)$ und $\mathrm{Re}(a_n)$. Diese in $A(x,t)$ eingesetzt ergeben die Lösung des Problems!

14.4. Exkurs: Elektromagnetische Wellen

Zum Abschluss des Kapitels über partielle Differentialgleichungen werden wir noch einige Grundeigenschaften elektromagnetischer Wellen herleiten:

Wir gehen aus von der Wellengleichung für elektrisches und magnetisches Feld:

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{0}, \qquad \left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{0} \tag{14.4}$$

Der (Wellen-)Ansatz

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0\, e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}, \qquad \vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}_0\, e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} \tag{14.5}$$

liefert, in (14.4) eingesetzt,

$$\left((ik)^2 - \frac{1}{c^2}(i\omega)^2 \right) \vec{E}_0\, e^{i\left(\omega t - \vec{k}\vec{r}\right)} = \vec{0}, \qquad \left((ik)^2 - \frac{1}{c^2}(i\omega)^2 \right) \vec{B}_0\, e^{i\left(\omega t - \vec{k}\vec{r}\right)} = \vec{0},$$

also die Dispersionsbeziehung $\frac{\omega^2}{c^2} - \vec{k}^2 = 0$. Mit $|\vec{k}| = \frac{2\pi}{\lambda}$ und $\omega = 2\pi\nu$ folgt die bekannte Formel $c = \lambda\nu$.

Mit Hilfe der Maxwell-Gleichungen erhält man des weiteren

$$\vec{k} \cdot \vec{E}_0 = 0, \quad \vec{k} \cdot \vec{B}_0 = 0 \implies \vec{E}_0, \vec{B}_0 \perp \vec{k}\,,$$

außerdem

$$\vec{k} \times \vec{E}_0 = \omega \vec{B}_0, \quad \vec{k} \times \vec{B}_0 = -\frac{\omega}{c^2} \vec{E}_0 \implies \vec{E}_0 \perp \vec{B}_0, \quad |\vec{E}_0| = c|\vec{B}_0|$$

und schließlich

$$\vec{E}_0 \times \vec{B}_0 = \frac{1}{\omega} \vec{E}_0 \times \left(\vec{k} \times \vec{E}_0 \right) = \frac{\vec{k}}{\omega} \vec{E}_0^2 - \frac{1}{\omega} (\vec{E}_0 \cdot \vec{k})\, \vec{E}_0 = \frac{\vec{k}}{\omega} \vec{E}_0^2\,.$$

Die Superposition von ebenen Wellen ergibt die allgemeine Lösung

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \sum_{\pm} \int d^3k\, \vec{E}_{0,\pm}(\vec{k})\, e^{i(\pm\omega(k)t - \vec{k}\cdot\vec{r})}\,.$$

Realteil bzw. Imaginärteil ergeben dann reelle Lösungen. Die allgemeine Lösung für $\vec{B}(\vec{r}, t)$ ergibt sich analog.

Dies ist ebenfalls ein Fourieransatz, wobei die Wellengleichung zur Dispersionsbeziehung führt.

15. Bemerkungen zur Funktionentheorie, Vorrede zur Greensfunktion der Wellengleichung

15.1. Funktionentheorie

Allgemein behandelt die Funktionentheorie Funktionen mit komplexem Definitions- und Wertebereich:

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \text{ mit } z = x + iy \text{ wobei } x, y \in \mathbb{R}$$

Der Funktionentheorie kommt eine Schlüsselrolle in der Mathematik zu, sie stellt die Basis für die „klassische Mathematische Physik“ dar. So lassen sich beispielsweise die wichtigsten linearen Differentialgleichungen — i. A. mit nicht konstanten Koeffizienten (Gleichungen der *Fuchs-Klasse*) — im Komplexen übersichtlich mit Methoden der Funktionentheorie behandeln.

Eine wesentliche Eigenschaft der betrachteten Funktionen ist ihre Analyzität. Eine Funktion heißt analytisch, wenn ihr Grenzwert existiert und richtungsunabhängig ist:

$$\lim_{|\Delta z| \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = f'(z)\,,$$

wobei man die für komplexe Zahlen üblichen Betragsdefinition verwendet:[11]

$$|\Delta z| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

Analytische Funktionen sind z. B. z^n, $\sin(z)$, e^z, $\lg(z)$.

Wählt man $\Delta z = \Delta x$, $i\Delta y$, so ergeben sich folgende Beziehungen:

$$\begin{aligned} &\lim_{|\Delta x| \to 0} \frac{u(x + \Delta x + iy) - u(x + iy) + iv(x + \Delta x + iy) - iv(x + iy)}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} \\ = &\lim_{|\Delta y| \to 0} \frac{u(x + iy + i\Delta y) - u(x + iy) + iv(x + iy + i\Delta y) - iv(x + iy)}{i\Delta y} = \frac{1}{i}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}\right) \end{aligned}$$

Da u und v reellwertige Funktionen sind, ergibt der Vergleich von Real- und Imaginärteil obiger Gleichungen die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \tag{15.1}$$

Diese zentrale Bedingung für analytische Funktionen kann man z. B. durch Hinzunahme einer dritten Koordinate als Bedingung für die Wirbelfreiheit zweier Vektorfelder in $\mathbb{R}^2$ ansehen:

$$\vec{\nabla} \times \begin{pmatrix} u \\ -v \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}, \qquad \vec{\nabla} \times \begin{pmatrix} v \\ u \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

Wendet man diese Beziehung auf den Satz von Stokes an, so erhält man direkt den Satz von Cauchy:

$$\oint d\vec{r} \cdot \begin{pmatrix} u \\ -v \\ 0 \end{pmatrix} = \int d\vec{a} \cdot \vec{\nabla} \times \begin{pmatrix} u \\ -v \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \oint d\vec{r} \cdot \begin{pmatrix} v \\ u \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

[11] Definition der Analysis: Eine Funktion heißt analytisch (oder holomorph/regulär) in einem offenen, zusammenhängenden Gebiet $A \subset \mathbb{C}$, wenn sie für alle $z \in A$ eindeutig und differenzierbar ist.

Dies bedeutet

$$\oint u\,dx - v\,dy = 0 \quad \text{bzw.} \quad \oint v\,dx + u\,dy = 0$$
$$\Longrightarrow \oint (u+iv)(dx+idy) = 0\,,$$

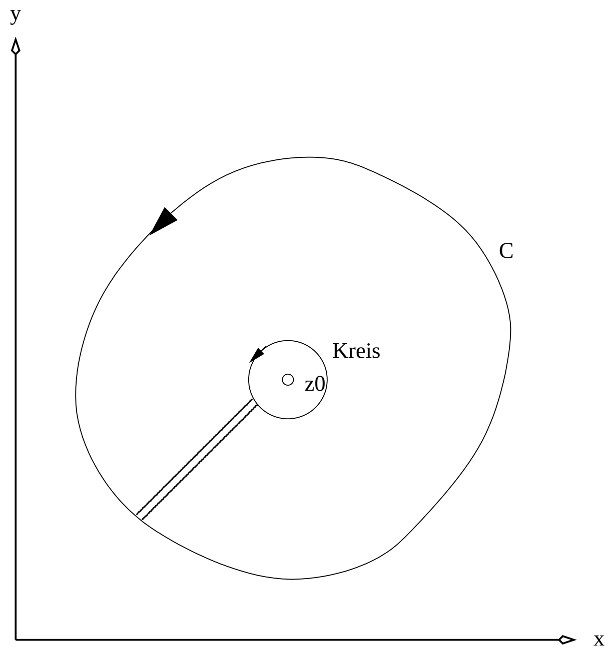
also

$$\boxed{\oint f(z)dz = 0} \tag{15.2}$$

Das bedeutet, das Integral einer holomorphe Funktion $f(z)$ über eine geschlossene Kurve ist identisch 0. Das von der Kurve umrandete Gebiet muss allerdings einfach zusammenhängend sein, d. h. es darf keine Singularitäten (Pole, Schnitte) enthalten.

Ein Beispiel einer Funktion mit Pol bei z_0 ist $f(z) = \frac{c}{(z-z_0)^n}$ mit $c \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$; eine Funktion mit Schnitt ist z. B. $f(z) = \sqrt{z - z_0}$.

Nun verwenden wir den Satz von Cauchy, um den Residuensatz herzuleiten. Dazu bilden wir das Integral $\oint f(z)dz$ entlang einer Kurve, die einen Pol z_0 einschließt:



Man zieht dazu die Kurve auf einen kleinen Kreis um z_0 zusammen: das eingeschlossene Gebiet ist singularitätenfrei und man kann sich eine geschlossene Kurve, gebildet aus C, dem (negativ gewählten) entgegengerichtetem Kreis und zwei Verbindungslinien, denken.

$$\oint_C f(z)dz = \oint_{\text{Kreis}} f(z)dz = \int d(re^{i\phi})\frac{1}{re^{i\phi}} = i\int_0^{2\pi} d\phi \frac{re^{i\phi}}{re^{i\phi}} = 2\pi i$$

Enthält das Gebiet N Pole bei $z = z_i$ derart, dass $f(z) = \Pi_i \frac{c_i}{z-z_i}$ gilt, so erhält man den Residuensatz:

$$\boxed{\oint f(z)dz = \sum_{i=1}^{N} 2\pi c_i} \tag{15.3}$$

15.2. Die Greensfunktionen der Wellengleichung mit Quelle

Wir gehen von der Wellengleichung mit Stromquelle aus:

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vec{A}(\vec{r},\,t) = \vec{J}(\vec{r},\,t)$$

Hierbei fordern wir, dass

$$\vec{A}(\vec{r},\,t) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int d^3k\,\vec{a}(\omega,\vec{k})\,e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})}$$

und

$$\vec{J}(\vec{r},\,t) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int d^3k\,\vec{j}(\omega,\vec{k})\,e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})}$$

gilt (vgl. Abschnitt 14.3, hier in 3 Dimensionen). Setzen wir diese Funktionen in obige Wellengleichung ein und vergleichen die Fourierkoeffizienten $\vec{a}(\omega,\vec{k})$ und $\vec{j}(\omega,\vec{k})$, dann erhalten wir die Beziehung

$$\left(-\frac{(i\omega)^2}{c^2} + (i\vec{k})^2\right)\vec{a}(\omega,\vec{k}) = \vec{j}(\omega,\vec{k}) \quad\Longrightarrow\quad \vec{a}(\omega,\vec{k}) = \left(\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \vec{k}^2\right)^{-1}\vec{j}(\omega,\vec{k})\,,$$

wobei der Ausdruck $\left((\frac{\omega}{c})^2 - \vec{k}^2\right)^{-1}$ die Fourier-Transformation der Greensfunktion darstellt, siehe auch Abschnitt 13.5. Daraus ergibt sich wieder die Greensfunktion

$$G(\vec{r},t) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int d^3k\,\frac{e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})}}{\left((\frac{\omega}{c})^2 - \vec{k}^2\right)}$$

und wir erhalten

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \int dt\,d^3\vec{r}\,G(\vec{r}-\vec{r}\,',\;t-t')\,\vec{J}(\vec{r}\,',\;t')\,,$$

also wie im Falle der Elektrostatik eine Faltung (vgl. Abschnitt 12.4).

Das Problem bei dieser Greensfunktion ist die Singularität des Integranden $\frac{1}{\left((\frac{\omega}{c})^2 - \vec{k}^2\right)}$ bei $\vec{k}^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2$, wir benötigen hier also eine Integrationsvorschrift. Für eine Lösung dieses Problems verweisen wir auf die Elektrodynamik-Vorlesung und wenden uns wieder einfacheren Themen zu.

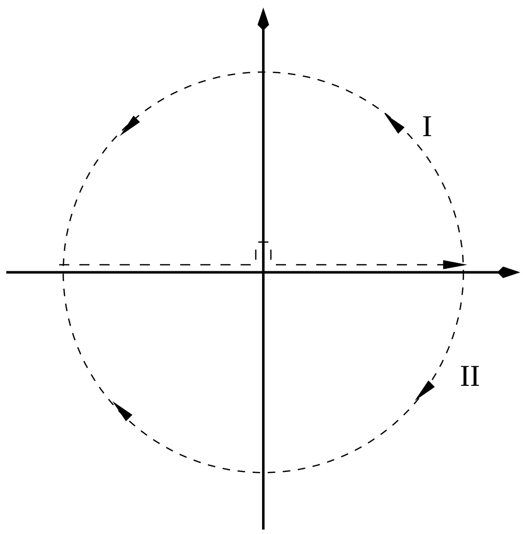
15.3. Anwendungen des Satzes von Cauchy und das Residuensatzes

15.3.1. Integration über Singularitäten

Im Abschnitt 13.5 hatten wir ein Integral der Form $\int_0^\infty dx\frac{sin(x)}{x}$ zu berechnen, wir haben damals ohne Begründung als Ergebnis $\frac{\pi}{2}$ verwendet. Hier folgt nun die Begründung:

$$\int_0^\infty dx\frac{sin(x)}{x} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} dx\,\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2ix} = \frac{1}{4i}\int_{-\infty}^{\infty} dz\,\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{z}$$

Wir integratieren also über die reelle Achse. Nun muss man allerdings erklären, wie man das Integral um $z=0$ berechnet. Die reelle Funktion $\frac{sin(x)}{x}$ ist bei $x=0$ nicht singulär! Wir zerlegen daher die komplexe Ebene entlang der reellen Achse in die obere und die untere Halbebene.



Der Beitrag bei $z = 0$ errechnet sich zu

$$dz\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{z} = dz\frac{(1 + iz + \dots) - (1 - iz + \dots)}{z} = dz\frac{2iz}{z} = 2i\,dz\,,$$

ist also infinitesimal. Beachtet man, dass $e^{iz} \to 0$ für $Im(z) \to \infty$ bzw. $e^{-iz} \to 0$ für $Im(z) \to -\infty$ gilt, können wir das Integral einfach aufteilen.

(i) Wir integrieren zuerst über die obere Halbebene, also entlang I: $\oint_{\mathrm{I}} dz\frac{e^{iz}}{z}$. Man schließt den Integrationsweg in der oberen Halbebene. Das Integral über den Halbkreis mit Radius R geht für $R \to \infty$ gegen 0. Da der Integrationsweg geschlossen ist und der Pol bei $z = 0$ außerhalb der von I umrandeten Fläche liegt, ist das Integral identisch 0.[12]

(ii) Jetzt schließt man den Integrationsweg in der unteren Halbebene, der Pol ist diesmal enthalten: $\oint_{\mathrm{II}} dz\frac{e^{-iz}}{z}$. Daher liefert der Residuensatz unter Berücksichtigung der „falschen“ Integrationsrichtung $\oint_{\mathrm{II}} dz\frac{e^{-iz}}{z} = -2\pi i$.

Somit kann man nun das Integral berechnen und erhält, wie behauptet

$$\int_0^\infty dx\frac{sin(x)}{x} = \frac{1}{4i}(-1)(-2\pi i) = \frac{\pi}{2}\,.$$

15.3.2. Fourier-Transformation der Gauß'schen Glockenkurve

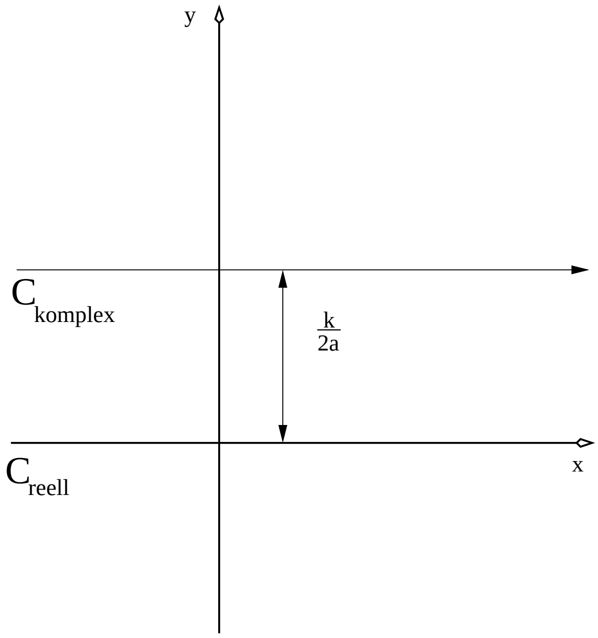
Die zugrundeliegende Funktion ist $f(x) = e^{-\alpha x^2}$, welche wir nun transformieren:

$$\begin{aligned}\widetilde{f}(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-\alpha x^2} e^{-ikx} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-\left(\alpha x^2 + ikx\right)} \qquad (15.4)\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-\alpha\left(x^2 + \frac{ikx}{\alpha} + \left(\frac{ik}{2\alpha}\right)^2 - \left(\frac{ik}{2\alpha}\right)^2\right)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\alpha\left(\frac{k}{2\alpha}\right)^2} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-\alpha\left(x + \frac{ik}{2\alpha}\right)^2}\end{aligned}$$

[12]Das Gebiet ist einfach zusammenhängend!

Nun gehen wir für die Berechnung des übriggebliebenen Integrals unter Verwendung von $\bar{z} = z + \frac{ik}{2\alpha}$ zum Komplexen über:

$$\int_{C_{\text{reell}}} dz\, e^{-\alpha\left(z+\frac{ik}{2\alpha}\right)^2} = \int_{C_{\text{komplex}}} d\bar{z}\, e^{-\alpha\bar{z}^2} = \int_{C_{\text{reell}}} d\bar{z}\, e^{-\alpha\bar{z}^2} + \oint_{C_{\text{Rechteck}}} d\bar{z}\, e^{-\alpha\bar{z}^2} \tag{15.5}$$



Da in dem Gebiet, das durch die reelle Achse C_{reell} und durch die um $\frac{k}{2\alpha}$ verschobene komplexe Achse C_{komplex} festgelegt ist, keine Singularitäten auftreten ist das Integral über die Rechtecksfläche nach dem Satz von Cauchy identisch 0. Daher können wir wieder in das Reelle übergehen.

$$\int_{C_{\text{reell}}} dz\, e^{-\alpha\left(z+\frac{ik}{2\alpha}\right)^2} = \int_{C_{\text{reell}}} d\bar{z}\, e^{-\alpha\bar{z}^2} = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-\alpha x^2} = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} \tag{15.6}$$

Durch Einfügen von Gleichung (15.6) in Gleichung (15.4) sieht man, dass die Fouriertransformierte einer Gauß-Funktion wieder eine Gaußfunktion ist:

$$\widetilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{2\alpha}} e^{\frac{-k^2}{4\alpha}}$$

Abbildungsverzeichnis

Literatur

[1] M. G. Schmidt: Mathematische Ergänzungen zur Physik I (B. Hemmerling et al.: Eds.), http://www.thphys.uni-heidelberg.de/˜weinstoc/MathMeth/Tex/Kap1-6.ps.gz

[2] C. B. Lang, N. Pucker: Mathematische Methoden in der Physik, Spektrum Verlag

[3] M. L. Boas: Mathematical Methods in the Physical Sciences, New York: John Wiley & Sons

[4] S. Grossmann: Mathematische Einführung für die Physik, Teubner Studienbücher

[5] G. Berendt, E. Weimar: Mathematik für Physiker Band I/II Band II: Elemente der mathematischen Physik, weiterführend), Weinheim: Physikverlag

[6] H. Fischer, H. Kaul: Mathematik für Physiker, Teubner Studienbücher

[7] S. Flügge: Mathematische Methoden der Physik I/II (anspruchsvoll), Berlin, Heidelberg, New York: Springer

[8] G. Heber: Mathematische Hilfsmittel der Physik, Zimmermann-Neufang

[9] J. Honerkamp, H. Römer: Grundlagen der klassischen Theoretischen Physik (Springer Studienreihe, Lehrbuch der klassischen Theoretischen Physik auf „einfachem", jedenfalls kurzem Weg), Berlin, Heidelberg, New York: Springer

[10] P. Bamberg, S. Sternberg: A course in mathematics for students of physics I/II (Einführung in die moderne math. Sprache an elementaren Beispielen), Cambridge University Press

[11] M. R. Spiegel: Vector analysis, Schaum-Reihe