10. Symmetrien und Erhaltungssätze

10.1 Symmetrien (schon in der Mechanik sehr wichtig!)

hier („aktiver Standpunkt"):

(i) mit $\psi(\vec{x})$ ist auch $\psi'(\vec{x}) = U_{sym}\psi(\vec{x})$ Lösung der Schrödinger-Gleichung, wobei nur der räumliche Teil betroffen sei, also $U_{sym.}$ zeitunabhängig. Wir bleiben im Ortsraum, da räumliche Sym. diskutiert werden sollen.

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = H\psi \longrightarrow i\hbar\frac{\partial}{\partial t}U_s\psi = \underline{U_s H\psi}$$

gelte also $$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi' = H\psi' \longrightarrow i\hbar\frac{\partial}{\partial t}U_s\psi = \underline{H U_s\psi}$$

hinreichende Bedingung $$\boxed{U_s H = H U_s}$$ oder $[H, U_s] = 0$

(ii) U_s ist unitär, da $(\psi', \psi') = (\psi, \psi)$ sein soll

$$(\psi', \psi') = (U_s\psi, U_s\psi) = (\psi,\psi)$$ mit U_s^+

$$\boxed{U_s^+ U_s = 1}$$

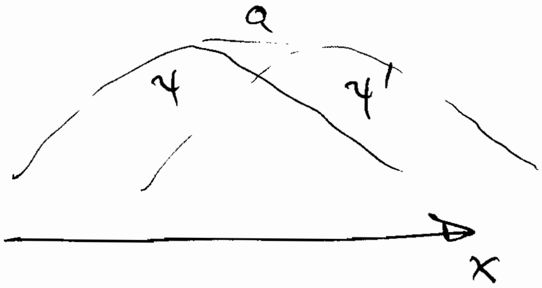
Die Observablen sind hermitesch, aber oft wird $U_s = e^{i\alpha A_s}$ mit hermiteschem A_s gelten, dann folgt $[H, A_s] = 0$ für den Erzeuger A_s der Sym.-Transformation

(iii) Operatoren O transformieren: $O \to O'$, sodaß

$$(\psi, \underline{O}\psi) = (\psi', O'\psi') = (U_s\psi, O' U_s\psi) = (\psi, \underline{U_s^+ O' U_s}\psi)$$

$$\to \quad \mathcal{O} = U_s^\dagger\, \mathcal{O}'\, U_s \quad \text{oder} \quad \boxed{\mathcal{O}' = U_s\, \mathcal{O}\, U_s^\dagger}$$

10.2 Translationen



$$\boxed{\psi'(\vec{x}\,') = \psi(\vec{x})} \qquad \vec{x}\,' = \vec{x} + \vec{a}$$

$$\psi'(\vec{x} + a) = \psi(\vec{x})$$

- $\psi'(\vec{x}) = \psi(\vec{x} - \vec{a}) = \psi(\vec{x}) \underbrace{- \vec{a}\cdot\vec{\nabla}\,\psi(\vec{x})}_{-\frac{i\vec{a}}{\hbar}\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}} + \dots$
- $\psi'(\vec{x}) = U_T\, \psi(x)$

$$= e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{a}\cdot\left(\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}\right)}\, \psi(\vec{x})$$

allgemeine Taylor-Entw. !

(erinnere $f(x+a) = e^{a\frac{d}{dx}} f(x)$)

d.h. $U_T = e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{a}\cdot\vec{P}}$

---

sei $\mathcal{O} = \mathcal{O}(X_{\text{operator}})$

$$U_T^\dagger\, \mathcal{O}'\, U_T = \mathcal{O} \quad ; \quad \mathcal{O}' = U_T\, \mathcal{O}\, U_T^\dagger$$

$$\stackrel{!}{=} e^{-i/\hbar\, \vec{a}\cdot\vec{P}}\, \mathcal{O}(\vec{X})\, e^{+i/\hbar\, \vec{a}\cdot\vec{P}}$$

$\vec{a}$ infin. !

$$\mathcal{O}' = \left(1 - i/\hbar\, \vec{a}\cdot\vec{P} ..\right) \mathcal{O} \left(1 + i/\hbar\, \vec{a}\cdot\vec{P} ..\right)$$

$$= \mathcal{O} - \frac{i}{\hbar}\vec{a}\,[\vec{P}, \mathcal{O}] = \mathcal{O} - \vec{a}\cdot\vec{\nabla}\mathcal{O}$$

$$= \mathcal{O}(\vec{x} - \vec{a})$$

gilt auch für bel. $\vec{a}$!
(hätten wir auch als Ausgangspunkt wählen können!)

Üb. abstrakte Schreibweise: Translationen

$$|\psi\rangle \xrightarrow{\vec a} |\psi'\rangle = U_{\vec a}|\psi\rangle$$

$$|\vec x\rangle \xrightarrow{a} |x+\vec a\rangle = U_{\vec a}|\vec x\rangle$$

$$\langle \vec x|\psi\rangle = \langle \vec x+\vec a|\psi'\rangle$$

$$\langle \vec x-\vec a|\psi\rangle = \langle \vec x|\psi'\rangle = \langle \vec x|U_{\vec e}|\psi\rangle$$

$$\overset{\text{inf.}}{=} \int d\vec x' \langle \vec x|\mathbb{1}+\frac{i}{\hbar}\vec e\cdot\vec P|\vec x'\rangle\langle \vec x'|\psi\rangle$$

$$= \langle \vec x|\psi\rangle - \frac{i}{\hbar}\vec e\,\langle \vec x|\vec P|\vec x'\rangle\,\langle x'|\psi\rangle$$

$$\delta(\vec x-\vec x')\,\frac{\hbar}{i}\vec\nabla$$

$$\psi'(\vec x) = \psi(\vec x) - \frac{i}{\hbar}\vec e\cdot\frac{\hbar}{i}\vec\nabla\,\psi(\vec x)$$

z.B. $\quad \mathcal{O} = H_{frei} = \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m}$, mit $\psi(x)$ ist auch $\psi(x+a)$ Lsg. der Schr. Gl.

$$H' = H \quad \text{wegen} \quad [H, U_T] = 0$$

infin. $\quad [\vec{P}, H_{frei}] = 0 \quad$ Translationssymmetrie

$$\boxed{\frac{d}{dt}(\psi, \vec{P}\psi) = -\frac{1}{i\hbar}(\psi, [H, \vec{P}]\psi) = 0}$$

Impulserhaltung!

(wie in Mechanik ⇝ Noether-Theorem.

$\vec{P}$ sind "Erzeugende" der Translationen

10.3 Drehungen

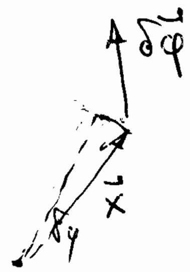
$$\vec{x}' = D\vec{x}$$

$D^T D = D D^T = 1$
orthogonale 3×3 Matrix
mit $\det D = +1$

infin. $\quad \vec{x}' = \vec{x} + \delta\vec{\varphi} \times \vec{x}$

$$\boxed{\psi'(\vec{x}') = \psi(\vec{x})}$$

$$\psi'(\vec{x}) = \psi(D^{-1}(\vec{x}))$$



$$\overset{\text{infin.}}{=} \psi(\vec{x} - \delta\vec{\varphi} \times \vec{x})$$

$$= \psi(\vec{x}) - (\delta\vec{\varphi} \times \vec{x}) \cdot \vec{\nabla}\psi(\vec{x})$$

$$= \psi(\vec{x}) - \delta\vec{\varphi} \cdot \underbrace{(\vec{x} \times \vec{\nabla})}_{\frac{i}{\hbar}\vec{x} \times \vec{P}}\psi(\vec{x})$$

$$= \left(1 - \frac{i\,\delta\vec{\varphi}}{\hbar}\,\underbrace{(\vec{x} \times \vec{P})}\right)\psi(\vec{x})$$

Drehimpulsoperator $\vec{L}$ (auch nach Korrespondenzprinzip.

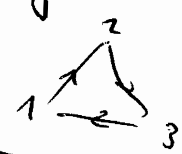
"erzeugt" Drehungen

endliche Drehungen: setze aus infinitesimalen Drel. zusammen

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} e^x$$

$$\psi'(x) \approx \left(1 - \frac{i\vec{\varphi}}{\hbar n}(\vec{x}\times\vec{P})\right)^n \psi(x) \longrightarrow \underbrace{\exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\vec{\varphi}\cdot\vec{L}\right\}}_{U_D\ \text{(unitär)}}\psi(x)$$

$$\vec{L} = \hbar\vec{M} \qquad M_1 = \frac{1}{i}\left(x_2\frac{\partial}{\partial x_3} - x_3\frac{\partial}{\partial x_2}\right)$$ und zyklisch



$$[L_1, L_2] = i\hbar L_3$$

$$\boxed{[L_i, L_k] = i\hbar\,\epsilon_{ikl}L_l}$$

auch für 3x3 Matrizen in der Mechanik $D_{3\times3} = \exp(i\vec{\varphi}\vec{M}_{3\times3})$ (s.u.)

$$\vec{L}^2 = L_1^2 + L_2^2 + L_3^2 \quad , \quad [\vec{L}^2, L_i] = 0$$

Unschärferelation $\quad \Delta L_1\,\Delta L_2 \geq \frac{1}{2}\hbar|\langle L_3\rangle|$

$\vec{L}^2, L_3$ lassen sich simultan messen!
o.B.d.A.

Drehinvariant: z.B. der Schrödingergleichung für Zentralpotentiale
$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(r)$$

mit $\psi(\vec{x})$ und $\psi'(\vec{x})$ bzg. $\xrightarrow{\text{s.o.}}$ $\boxed{U_D^+ H U_D = H}$

bzw. infin. $\boxed{[\vec{L}, H] = 0}$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\langle\vec{L}\rangle = \vec{0}\ , \text{ Drehimpulserhaltung}$$

Invarianz führt wieder auf einen erweiterten Satz vertauschbarer Operatoren.

11. Drehimpulsdarstellungen

11.1 Lie-Algebra

hermitesche Matrix!

$$[L_i, L_k] = \hbar i L_l \epsilon_{ikl}$$

$$[M_i, M_k] = i\,\epsilon_{ikl}\, M_l$$

Strukturkonstante

Math. oftmals ohne i!

(i) gilt für 3×3 Matrizen: $M_i^{3\times 3} = \frac{-1}{i}\epsilon_i = i\,\epsilon_i$

Matrix mit Elementen ϵ_{ikl}

$$+(\delta\vec\varphi \times \vec x)_l = +\epsilon_{ikl}\,\delta\varphi_i\, x_k = +\delta\varphi_i\,\epsilon_{ikl}\,x_k$$

$$= -\delta\varphi_i\,\epsilon_{ilk}\,x_k$$

Matrixmultipl.

„große" Drehung:

$$\vec x' = \exp\{\tfrac{i}{i}\underbrace{\vec\varphi\times}_{i\left(\frac{-1}{i}\varphi_i\,\epsilon_i\right)}\}\,\vec x = \exp\{i\varphi_i M_i\}\,\vec x$$

↑ Matrix!

Bem. habe i herausgezogen um herm. Op. zu bekommen!

(ii) gilt für Operatoren im Raum der Zustandsfunktionen (~ Hilbert-Raum)

... nicht mehr endlich dimensional!

bilde:

$$M_\pm := M_1 \pm i M_2$$

$$[M_3, M_\pm] = \pm M_\pm \quad , \quad [\vec M^2, M_\pm] = 0 \quad (*)$$

nützlich bei der Berechnung der E.V. und E.W. von M^2, M_3

<u>Anm.</u> ex. E.V. $\psi_{\lambda,\mu}$ mit

$$\vec{M}^2 \psi_{\lambda,\mu} = \lambda \psi_{\lambda,\mu}$$

$$M_3 \psi_{\lambda,\mu} = \mu \psi_{\lambda,\mu}$$

(rechne nach $\vec{M}^2 = M_+ M_- + M_3^2 - M_3$ (**)
$= M_- M_+ + M_3^2 + M_3$ üb.)

(*) p.72

$$\vec{M}^2 (M_\pm \psi_{\lambda,\mu}) = M_\pm \vec{M}^2 \psi_{\lambda,\mu} = \lambda M_\pm \psi_{\lambda,\mu}$$

$$M_3 (M_\pm \psi_{\lambda,\mu}) = M_\pm M_3 \psi_{\lambda,\mu} \pm M_\pm \psi_{\lambda,\mu}$$
$$= (\mu \pm 1) M_\pm \psi_{\lambda,\mu}$$

nun $\lambda \geq \mu^2$ da $(\psi, \vec{M}^2 \psi) = \underbrace{(\psi, M_3^2 \psi)}_{} + \text{pos.}$

d.h. (wieder!) $M_\pm$ - Reihe muß <u>abbrechen</u>

- $M_+ \psi_{\lambda,l} = 0$ mit $M_3 \psi_{\lambda,l} = l \psi_{\lambda,l}$

(**) s.o. $\rightsquigarrow \vec{M}^2 \psi_{\lambda,l} = (M_3^2 + M_3) \psi_{\lambda,l} = l(l+1) \psi_{\lambda,l}$

d.h. $\lambda = l(l+1)$

- $M_- \psi_{\lambda,l'} = 0$
$\vec{M}^2 \psi_{\lambda,l'} = (M_3^2 - M_3) \psi_{\lambda,l'} = l'(l'-1) \psi_{\lambda,l'}$
d.h. $\lambda = l'(l'-1)$

wobei l', l um ganze Zahlen differieren:

$l(l+1) = l'(l'-1) \to l' = -l$, dann $l - l' = 2l$ ganz

"Darstellungen" (Module) durch l charakterisiert, wobei $2l$ ganz
$l = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2} \ldots$ (oft hier $l \to j$)

Den infin. Drehungen sind Matrizen $(2l+1)(2l+1)$ zugeordnet (hermitesch). Es handelt sich um irreduzible Darstellungen, der Darstellungsraum kann nicht weiter eingeschränkt werden, ist völlig durch Drehungen verbunden.

speziell $l = 1$: 3×3 Matrizen: gibt die üblichen Drehungen in 3-Dim. (sphärische Basis)

11.2 Kugelkoordinaten:

(für Drehungen natürlich)

$$x_1 = r \sin\vartheta \cos\varphi$$
$$x_2 = r \sin\vartheta \sin\varphi$$
$$x_3 = r \cos\vartheta$$

orthogon. krummlinige Koordinaten

$$\vec{e}_r = \underbrace{\underbrace{b_r^{-1}}_{1} \frac{\partial \vec{r}}{\partial r}}_{= (\sin\vartheta\cos\varphi, \sin\vartheta\sin\varphi, \cos\vartheta) = \frac{\vec{r}}{r}}, \quad \vec{e}_\vartheta = \overbrace{\underbrace{b_\vartheta^{-1}}_{\frac{1}{r}} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \vartheta}}^{(\cos\vartheta\cos\varphi, \cos\vartheta\sin\varphi, -\sin\vartheta)}, \quad \vec{e}_\varphi = \overbrace{\underbrace{b_\varphi^{-1}}_{\frac{1}{r\sin\vartheta}} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi}}^{(-\sin\varphi, \cos\varphi, 0)}$$

$$\vec{\nabla} \to (\vec{e}_r \cdot \vec{\nabla}, \vec{e}_\vartheta \cdot \vec{\nabla}, \vec{e}_\varphi \cdot \vec{\nabla}) = \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\vartheta}, \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)$$

$$\vec{M} = \frac{1}{i}\vec{r} \times \vec{\nabla} = \frac{1}{i} r (\vec{e}_r \times \vec{\nabla}) = \frac{1}{i} r \left(\vec{e}_\varphi \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\vartheta} - \vec{e}_\vartheta \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)$$

$$= \frac{1}{i} \left\{ \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial\vartheta} - \begin{pmatrix} \cot\vartheta \cos\varphi \\ \cot\vartheta \sin\varphi \\ -1 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial\varphi} \right\}$$

$$M_\pm = M_1 \pm i M_2 = \frac{1}{i} e^{\pm i\varphi} \left(\pm \frac{\partial}{\partial\vartheta} + i \cot\vartheta \frac{\partial}{\partial\varphi} \right)$$

$$M_3 = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial\varphi}$$

$$\vec{M}^2 = \frac{1}{\sin\vartheta} \frac{\partial}{\partial\vartheta} \left(\sin\vartheta \frac{\partial}{\partial\vartheta} \right) - \frac{1}{\sin^2\vartheta} \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$$

wirken (wie erwartet) nur auf Winkel ϑ, φ

$$M_3 f(\vartheta,\varphi) = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial\varphi} f(\vartheta,\varphi) = \mu f(\vartheta,\varphi)$$

$$\rightsquigarrow f(\vartheta,\varphi) = \frac{e^{i\mu\varphi}}{\sqrt{2\pi}} \tilde{f}(\vartheta)$$

soll eindeutige Funktion sein $\rightsquigarrow$ μ ganz

$f(\vartheta,\varphi)$: Kugelflächenfunktionen

$$\vec{M}^2 Y_{\ell m}(\vartheta,\varphi) = \ell(\ell+1) Y_{\ell m}(\vartheta,\varphi)$$

$$M_3 Y_{\ell m}(\vartheta,\varphi) = m Y_{\ell m}(\vartheta,\varphi) \qquad m = -\ell, \dots +\ell$$

Normierung $\left(M_+ \psi_{\ell(\ell+1),m} , M_+ \psi_{\ell(\ell+1),m} \right)$

$$= (\psi, M_- M_+ \psi) = (\psi, (\vec{M}^2 - M_3^2 - M_3)\psi)$$

$$= (\psi,\psi) \underbrace{\left(\ell(\ell+1) - m^2 - m \right)}_{(\ell+m+1)(\ell-m)}$$

Phasenkonvention

$L_+ \psi_{\ell,m} = N_{\ell m} \psi_{\ell,m+1}$

positiv

$$M_\pm Y_{l,m} = \{(l \pm m+1)(l \mp m)\}^{1/2} Y_{l,m\pm 1}$$

$$\int \underset{\overset{\shortparallel}{d\varphi\, d\cos\vartheta}}{d\Omega}\; Y^*_{lm}(\vartheta,\varphi)\, Y_{l'm'}(\vartheta,\varphi) = \delta_{l,l'}\,\delta_{m,m'}$$

Orthonormal!

Vollständigkeit

$$\sum_{l,m} Y_{l,m}(\vartheta,\varphi)\, Y^*_{lm}(\vartheta',\varphi') = \text{"}\delta_2(\Omega)\text{"}$$
$$= \delta(\varphi-\varphi')\,\delta(\cos\vartheta - \cos\vartheta')$$

$$\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\varphi} Y_{ll} = l\, Y_{ll} \quad \sim \quad Y_{ll} = f(\vartheta)\, e^{il\varphi}$$

$$e^{i\varphi}\left(\frac{\partial}{\partial\vartheta} + i\cot\vartheta\,\frac{\partial}{\partial\varphi}\right) Y_{ll} = 0$$

$$\sim \frac{df}{d\vartheta} - l\,\underbrace{\cot\vartheta}_{\frac{d\sin\vartheta}{d\vartheta}/\sin\vartheta}\, f = 0 \quad ; \quad \ln f = l \ln\sin\vartheta + \text{const.}$$

$$f(\vartheta) = c\,(\sin\vartheta)^l$$

... dann Absteigen.

oder $\quad Y_{l0}$: $\quad \vec{M}^2 Y_{l0} = \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta}\right) Y_{l0}$

$$= l(l+1)\, Y_{l0} \sim P_l(\cos\vartheta)$$

Diff. gl. für Legendre-Polynom

$$P_l(z) = \frac{1}{2^l l!}\left(\frac{d}{dz}\right)^l (z^2-1)^l \;;\quad \int_{-1}^{+1} dz\, P_{l'}(z)\, P_l(z) = \frac{2\delta_{ll'}}{2l+1}$$

Bem.

anderer Zugang: betrachte homogene Polynome vom Grade l : $x_1^{m_1} x_2^{m_2} x_3^{m_3}$

mit $m_1 + m_2 + m_3 = l$

führe sphärische Koordinaten ein

$$x_\pm = (x_1 \pm i x_2)/\sqrt{2} = r \sin\vartheta \frac{(\cos\varphi \pm i \sin\varphi)}{\sqrt{2}} = \frac{r e^{\pm i\varphi}}{\sqrt{2}} \sin\vartheta$$

$$x_3 = x_3 = r\cos\vartheta$$

dann $= r^l Y_{lm} = r^l \,\mathrm{Norm.}\, \underbrace{P_l^m}_{\text{beigeordnete Legendre funktionen}} e^{im\varphi}$

Beispiele. ($\to$ Computer-Ausdruck ?!)

$$Y_{00} = \left(\frac{1}{4\pi}\right)^{1/2} ; \quad Y_{10} = \left(\frac{3}{4\pi}\right)^{1/2} \cos\vartheta$$

s-Orbital

$$\underbrace{Y_{1\pm1} = \mp \left(\frac{3}{8\pi}\right)^{1/2} e^{\pm i\varphi} \sin\vartheta \ \ldots}_{\text{sind Vektor!}}$$

p-Orbitale

$Y_{2,0}, Y_{2\pm1}, Y_{2\pm2} = \ldots$ d-Orbitale ..Tensoren..

$r\,Y_{10} = N \underbrace{r\cos\vartheta}_{x_3}$, $r\,Y_{1\pm1} = N r \sin\vartheta\, e^{\pm i\varphi}$ ... !

sind orthonormal.

Verhalten unter Spiegelungen : $x_i \to - x_i$

$$Y_{lm} \to (-1)^l Y_{lm}$$

11.3 Halbzahlige Darstellungen, Spin

speziell $l = \boxed{s = 1/2}$ (allgemeiner: (Gesamt) Drehimpuls oft als j bezeichnet)

"Spin"

$s = 1/2$, $m_s = \pm 1/2$ ← "Spinoren"

$\vec{S}^2 |\uparrow\rangle = \hbar^2 \frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1)|\uparrow\rangle$, $S_3|\uparrow\rangle = \hbar\frac{1}{2}|\uparrow\rangle$

$\vec{S}^2 |\downarrow\rangle = \hbar^2 \frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1)|\downarrow\rangle$, $S_3|\downarrow\rangle = -\hbar\frac{1}{2}|\downarrow\rangle$

$\underbrace{(\uparrow), \quad (\downarrow)}$

↓ später ausführlicher!

abstrakte Vektoren $|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle$ bzw. $|+\rangle, |-\rangle$

$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ in Basis

$S_+ = \hbar \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $S_- = \hbar \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$

$S_3 = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$

$\vec{S} = \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}$,

↑ Pauli-Spinmatrizen

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

$$[\sigma_i, \sigma_k] = 2i\sigma_l \epsilon_{ikl}, \qquad \det \sigma_i = -1$$

$$\left.\begin{aligned} \sigma_i \sigma_k &= \delta_{ik} \mathbb{1} + i\epsilon_{ikl}\sigma_l \\ (\vec{\sigma}\cdot\vec{a})(\vec{\sigma}\cdot\vec{b}) &= \vec{a}\cdot\vec{b}\,\mathbb{1} + \vec{\sigma}\cdot(\vec{a}\times\vec{b}) \end{aligned}\right\} \quad (*)$$

"Wellenfunktion" für das Elektron (hat Spin 1/2! ...)

Stern-Gerlach-Exp.

$$\psi_+(\vec{x},t)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \psi_-(\vec{x},t)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

(Pauli) "χ_+" "χ_-"

Schrödinger Gl. (siehe nächstes Kapitel!) enthält ein H mit zusätzlicher 2×2 Struktur!

Drehung von Spinoren (erinner: Hintereinanderausf. von infin. Drehungen)

$$e^{\frac{i}{\hbar}\vec{S}\cdot\vec{\varphi}}\ \chi = e^{i\frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{\varphi}}{2}}\ \chi$$

$$e^{i\frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{\varphi}}{2}} = \underline{\mathbb{1}} + i\frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{\varphi}}{2} + \underline{\frac{\left(i\frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{\varphi}}{2}\right)^2}{2!}} + \frac{\left(i\frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{\varphi}}{2}\right)^3}{3!} + \dots$$

$$= \left(\cos\frac{\varphi}{2}\right)\mathbb{1} + i\left(\sin\varphi/_2\right)\frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{\varphi}}{\varphi} \qquad \varphi = |\vec{\varphi}|$$

Benutze (*)
vorige Seite

$$(\vec{\sigma}\cdot\vec{\varphi})^2 = \varphi^2 \dots$$

Drehung um 2π gibt $-\mathbb{1}$!

deshalb keine Realisierung durch Kugelfunktionen!

$$\vec{\varphi} = \varphi\,\vec{e}_3 : \qquad \begin{pmatrix} \cos\varphi/_2 + i\sin\varphi/_2 & 0 \\ 0 & \cos\varphi/_2 - i\sin\varphi/_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\varphi/_2} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi/_2} \end{pmatrix}$$

11.4 Drehungen um 2π sollten keiner Drehung entsprechen ("1")
bei halbzahligem Spin : $\longrightarrow -1$!

$\rightsquigarrow$ Begriff der $\boxed{\text{Überlagerungsgruppe}}$:

bisher sprachen wir von Erzeugenden $\Rightarrow$ Lie Algebra

Bei Darstellungen der Überlagerungsgruppe: Eindeutigkeit der Matrizen auch für endliche Gruppenelemente

bei orthogonalen Transf. "SO(3)"

$$\vec{x}\,' = \underset{3\times 3}{O}\,\vec{x}$$

betrachte $\vec{\sigma}\cdot\vec{x}$: $x_i = \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\,\sigma_i\,\vec{\sigma}\vec{x}$ $\qquad \vec{\sigma}\vec{x} = \begin{pmatrix} x_3 & x_1 - i x_2 \\ x_1 + i x_2 & -x_3 \end{pmatrix}$

$$\boxed{\det \vec{\sigma}\cdot\vec{x} = -\vec{x}^{\,2}}$$

Nehme unitäre 2×2 Matrizen U mit $\det U = 1$ (sonst irrel. Parameter)

$$U^{+}\,\vec{\sigma}\cdot\vec{x}\,U = \vec{\sigma}\cdot\vec{x}\,'$$ gibt orthogon. Transf. von $\vec{x}$:

(i) $\det(U^{+}\vec{\sigma}\cdot\vec{x}\,U) = \det U^{+}\det\vec{\sigma}\cdot\vec{x}\,\det U = \det\vec{\sigma}\vec{x}$

(ii) $(U^{+}\vec{\sigma}\cdot\vec{x}\,U)^{+} = U^{+}\vec{\sigma}\cdot\vec{x}\,U = (\vec{\sigma}\cdot\vec{x}\,')^{+} \overset{!}{=} \vec{\sigma}\cdot\vec{x}\,'$

$\rightsquigarrow \vec{x}\,'$ reell !

"SU(2)" :
"special unitary transf." $\quad U = e^{i\vec{\sigma}\cdot\vec{\varphi}/2}$

nun sind 2×2 Matrizen nicht eindeutige! Darstellung dieser SU(2),
also auch die übrigen bisher behandelten ganz- und halbzahligen Darstellungsmatrizen