Die zugehörige Wirkung S_{cl} berechnen wir zu (98

$$S_{cl} = \frac{m}{2} \frac{(x_b - x_a)^2}{t_b - t_a}$$

$S = \int dt \frac{m}{2} \dot{x}^2$

$e^{i S_{cl}/\hbar}$ ist gerade der e-Faktor im obigen Resultat ⊗

Woher kommt der Vorfaktor?
Wir entwickeln die Wirkung um die klassische Lösung

$$x(t) = x_{cl}(t) + \delta x(t) \quad \text{mit} \quad \delta x(t_a) = \delta x(t_b) = 0$$

$$S = S_{cl} + \int dt \frac{\delta S}{\delta x(t)}\bigg|_{x_{cl}} \delta x(t) + \frac{1}{2}\int dt\, dt' \frac{\delta^2 S}{\delta x(t)\, \delta x(t')}\bigg|_{x_{cl}} \delta x(t)\, \delta x(t').$$ ⊗

in unserem Beispiel bricht die Reihe beim quadrat. Glied ab! – und $\frac{\delta S}{\delta x}\Big|_{x_{cl}} = 0$, weil das die klass. Bew. Gl. gibt.

Wir müssen also den Beitrag von "$\frac{1}{2}\frac{\delta^2 S}{\delta x^2}\Big|_{x_{cl}} (\delta x)^2$" auswerten, also ein Gaußsches Integral!
Dazu muß man das Pfadintegral wieder diskretisieren.
Der erste Beitrag S_{cl} gibt gerade den exponentiellen Faktor im Endresultat S. 97.
Der Vorfaktor ist (durch einfaches Einsetzen $x = x_{cl} + \delta x$)

$$F_0(t_b - t_a) = \int \mathcal{D}\delta x(t) \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int_{t_a}^{t_b} dt \frac{m}{2}(\delta \dot{x})^2\right\}$$

Bem.: obige Schreibweise für "lokales" $\mathcal{L} = \frac{m}{2}\dot{x}^2(t)$ etwas „akademisch"

$$F_0^{(N)}(t_b - t_a) = \frac{1}{(2\pi\hbar i \Delta t/m)^{1/2}} \prod_{n=1}^{N-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\,\delta x_n}{(2\pi\hbar i \Delta t/m)^{1/2}} \exp\left\{\frac{i}{\hbar} A^{(N)}_{\text{fluct.}}\right\}$$

diskretisiert

mit $$A^{(N)}_{\text{flu}} = \frac{m}{2}\Delta t \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{\delta x_n - \delta x_{n-1}}{\Delta t}\right)^2$$

$(\delta x_N = 0!)$!

$$= \frac{m}{2}(\Delta t)^{-1}\, \delta x_i \underbrace{M_{ik}}\, \delta x_k \qquad i,k = 1,\dots N-1$$

mit symmetrischer Matrix

M_{ik} läßt sich diagonalisieren durch eine orthogonale Transformation, dann die Fresnel-Integrale ausführen – dies gibt ein (Produkt der Eigenwerte)$^{-1/2}$, das sich als $\det^{-1/2}$ schreiben läßt. (Übung)

$$\boxed{\prod \int \dots = (\det M)^{-1/2}}$$

(kann man in der det M „zurück" drehen!)

es bleibt also diese Determinante zu berechnen

$\underline{N=2}$ $(\delta x_2 = 0)$

$$A^{(2)}_{\text{flu}} = \frac{m}{2}(\Delta t)^{-1}\left(\delta x_1^2 + \delta x_1^2\right) \rightarrow M_{11} = 2$$

$\det M = 2$

$\underline{N=3}$ $(\delta x_3 = 0)$

$$A^{(3)}_{\text{flu}} = \frac{m}{2}(\Delta t)^{-1}\left(\delta x_2^2 + (\delta x_2 - \delta x_1)^2 + \delta x_1^2\right)$$

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$\det M = 3$

$\underline{N=4}$ $(\delta x_4 = 0)$ $\longrightarrow$ $\det M = 4$ ... etc $A^{(N)}$ mit $\det M = N$

wir erhalten also schließlich

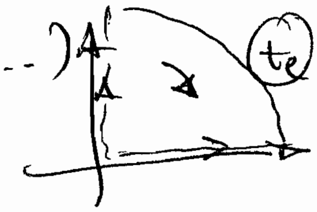
$$F_0^{(N)}(t_b-t_a) = \frac{1}{\Big(2\pi\hbar i\,\underbrace{\frac{\Delta t\cdot N}{m}}_{(t_b-t_a)/m}\Big)^{1/2}}$$

also genau den Vorfaktor von S. 97!

<u>Bem.</u> Falls man müde wird, die i's in den Fresnel-integralen mitzuschleppen: "<u>Wick rotation</u>"

führe <u>imaginäre</u> Zeit ein ("euklidische Zeit")

$t_e = i t$ und drehe die "Integration" in der t_e-Ebene (Cauchy..)



gibt

$$F_0^{(N)}(t_{e_a}-t_{e_b}) = \frac{1}{(2\pi\hbar\Delta t_e/m)^{1/2}} \times \prod_{n=1}^{N-1}\int \frac{d\,\delta x_n}{(2\pi\hbar\,\Delta t_e/m)^{1/2}} \exp\left\{-\frac{m}{2}\frac{1}{\Delta t_e}\sum_{n=1}^{N}\dots\right\}$$

nur ein gaußscher Integral!

Die gleichen Rechnungen mit Gauß/Fresnel integralen kann man für den Harmonischen Oszillator durchführen

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega x^2$$

– das Ablesen des E_n-Spektrums und der Eigenfunktionen ist allerdings mühevoll!

Die Grundzustandsenergie ergibt sich aus der Feynman-Kac Formel – hier im "Euklidischen" geschrieben (zur Übung!)

$$\lim_{T_e\to\infty} \frac{\ln\langle x'(T_e)|x(-T_e)\rangle}{(-2T_e)} = E_0/\hbar$$

da

$$G(x',T_e,x,-T_e) = \sum_n \underbrace{\langle x'|E_n\rangle}_{\psi_n(x')} \overbrace{\langle E_n|e^{-\frac{1}{\hbar}H(2T_e)}|E_n\rangle}^{e^{-\frac{1}{\hbar}E_n(2T_e)}} \underbrace{\langle E_n|x\rangle}_{\psi_n^*(x)}$$

allgemeiner kann man (mühevoll) $\psi_n(x)$ und die E_n durch Vergleich mit der Feynman Pfadint.-formel ablesen.

Aber: schon die Behandlung des einfachen Wasserstoff-Atoms ist sehr schwierig! (→ Kleinert, Duru, Frustration von Feynman ...)

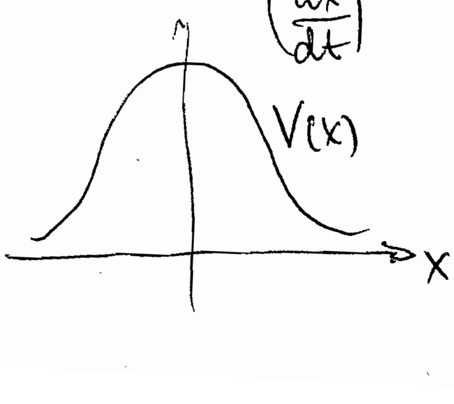
Trotzdem: die Feynman-Schreibweise ist sehr intuitiv und lädt zu heuristischen Überlegungen ein.
(relativistische Mechanik ~ "Worldline-Formalismus" mit Anwendungen in der QFT)

13.4 Besonders elegant: die Behandlung des Tunnelns

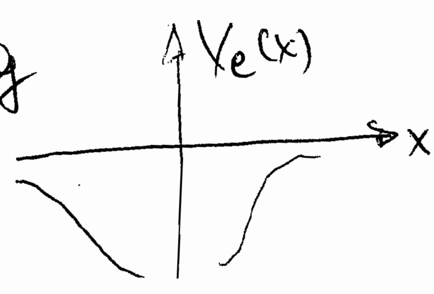
$$e^{i\int_{t_a}^{t_b} dt\,\left(\frac{m}{2}\underbrace{\dot x^2}_{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2} - V(x)\right)} \;\underset{\text{euclid.}}{\Longrightarrow}\; e^{-\int_{t_{4a}}^{t_{4b}} dt_4\,\left(\frac{m}{2}\underbrace{\dot x_e^2}_{\left(\frac{dx}{dt_4}\right)^2} + V(x)\right)}$$

$t_4 = it$

reell nach Wick-Drehung



$\Longrightarrow$

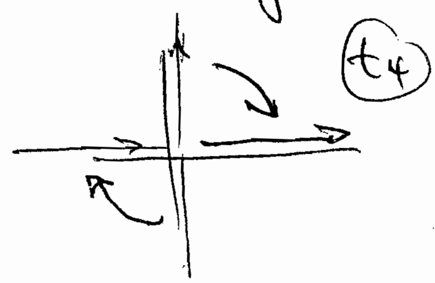


$\frac{\delta S_e}{\delta x} = 0$ gibt die Bewegungsgleichung in der euklidischen Zeit

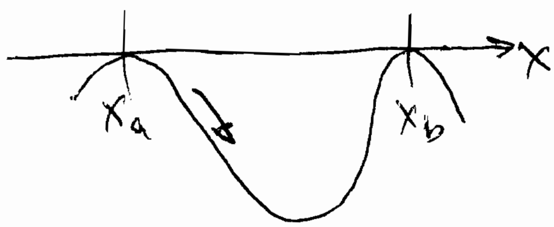
$$\boxed{m\ddot{x}_e = -\frac{d}{dx_e} V_e} \qquad \left(\mathcal{L}_e = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - \underbrace{(-V)}_{V_e}\right)$$

mit $x_e(t_{4_{a,b}}) = x_{a,b}$

$t_{4_a} \to -\infty$, $t_{4_b} \to +\infty$ damit Wick-Drehung o.k.



einfache Verhältnisse



Punktmasse "balanciert" bei x_a für $t_4 \to -\infty$, rolle dann durch die Mulde und komme bei $t_4 \to +\infty$ bei x_b an (Energiesatz gilt!)

Die Lösung ("Instanton") hat eine Wirkung $S_e^{\text{extr.}}$, wir bekommen den Tunnelfaktor $e^{-S_e/\hbar}$. Fluktuationen um diese Lösung (quadratisch) geben Gaußsche Integrale (Determinante$^{-1/2}$! s.o.)

Bem. Problem Nicht-Gaußsche Integrale z.B.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{-\alpha x^2 - \beta x^4} \qquad \text{"}\beta \text{ klein"?!}$$

Γ entwickle nach β

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{-\alpha x^2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\beta^n}{n!} x^{4n}$$

$$\overset{?}{=} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \lambda^n \frac{1}{n!} \underbrace{\Gamma(2n+\tfrac{1}{2})}$$

$\Gamma(n) = (n-1)!$

$$\frac{\Gamma(2n+\frac{1}{2})}{n!} \simeq \underline{4^n n!}$$

Stirling
$n! \sim \sqrt{2\pi n}\, e^{n \ln n - n} \dots$

divergent!

singulär bei $\lambda = 0$

$\to$ "Borel Resummierung"

$$Z(\beta) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \beta^n \quad \text{divergent}$$

Bilde
$$\Rightarrow F(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n!} t^n \qquad \text{konvergent !?}$$

$$\to Z(\beta) = \int_0^{\infty} dt\, e^{-t} F(t\beta)$$

ist fortzusetzen (analytisch)

(prüfe durch t-Integr. der Summanden nach)