16. Zeitunabhängige Störungsrechnung (Bsp. $\vec{L}\cdot\vec{S}$-WW)

i.a. ist das Eigenwertproblem nicht exakt (analytisch) lösbar. Sei H_0-Eigenwertproblem gelöst – betrachte

$$\boxed{H = H_0 + \lambda H'}$$

$\lambda H'$: „kleine Störung" (in welchem Sinne? Matrixelemente klein?)

Annahmen • analytisch in λ bei $\lambda = 0$ ($\rightsquigarrow$ komplexe λ-Ebene) (fragwürdig, siehe Kap. „Pfadintegral")

16.1 H_0 ohne Entartung

sei
$$H_0 |n^0\rangle = E_n^0 |n^0\rangle$$
$$H |n\rangle = E_n |n\rangle$$
(betrachte diskretes Spektrum)

Analyt.
$$E_n = E_n^0 + \lambda E_n^1 + \lambda^2 E_n^2 + \dots$$
$$|n\rangle = |n^0\rangle + \lambda |n^1\rangle + \lambda^2 |n^2\rangle + \dots$$
$$\left(E_n^0 = E_{n'}^0 \rightsquigarrow |n^0\rangle = |n'^0\rangle \right)$$

einsetzen in
$$(H_0 + \lambda H')|n\rangle = E_n |n\rangle$$
$$(H_0 + \lambda H')(|n^0\rangle + \lambda |n^1\rangle + \lambda^2 |n^2\rangle + \dots)$$
$$= (E_n^0 + \lambda E_n^1 + \lambda^2 E_n^2 + \dots)(|n^0\rangle + \lambda |n^1\rangle + \dots)$$

λ^0 $\quad H_0|n^0\rangle = E_n^0|n^0\rangle$ ✓

λ^1 $\quad H_0|n^1\rangle + H^1|n^0\rangle = E_n^0|n^1\rangle + E_n^1|n^0\rangle \qquad (1)$

λ^2 $\quad H_0|n^2\rangle + H^1|n^1\rangle = E_n^0|n^2\rangle + E_n^1|n^1\rangle + E_n^2|n^0\rangle \qquad (2)$

Normieren $|n\rangle$ unüblich, $\langle n^0|n\rangle = 1$

$(\langle\bar{n}|\bar{n}\rangle = 1$ am Ende $)$

$$\langle n|n\rangle = \underbrace{\langle n^0|n^0\rangle}_{1} + \lambda\overbrace{(\langle n^0|n^1\rangle + \langle n^1|n^0\rangle)}^{=0 \text{ s.u.}}$$
$$+\lambda^2(\langle n^0|n^2\rangle + \langle n^2|n^0\rangle + \langle n^1|n^1\rangle) + \ldots \neq 1$$

$$\langle n^0|n\rangle = \underbrace{\langle n^0|n^0\rangle}_{1} + \lambda\langle n^0|n^1\rangle$$
$$+\lambda^2\langle n^0|n^2\rangle + \ldots = 1$$

$\lambda^1: \quad \sim \langle n^0|n^1\rangle = 0$

$\lambda^2: \quad \langle n^0|n^2\rangle = 0 \ldots$

λ^1 $\quad |n^1\rangle = \sum_{m\neq n}|m^0\rangle\underbrace{\langle m^0|n^1\rangle}_{c_m^1}$

Multipl. (1) mit $\langle n^0|$

$$\cancel{\langle n^0|H_0|n^1\rangle} + \langle n^0|H^1|n^0\rangle = \cancel{E_n^0\langle n^0|n^1\rangle}$$
$$+ E_n^1\underbrace{\langle n^0|n^0\rangle}_{1}$$

$$\boxed{E_n^1 = \langle n^0|H^1|n^0\rangle}$$

(1) · mit $\langle m^0|$ $\qquad m \neq n$

$$\langle m^0|H_0|n^1\rangle + \langle m^0|H^1|n^0\rangle$$

$$= E_n^0 \underbrace{\langle m^0|n^1\rangle}_{c_m} + E_n^1 \underbrace{\langle m^0|n^0\rangle}_{0}$$

$$\boxed{c_m^1 = \frac{\langle m^0|H^1|n^0\rangle}{E_n^0 - E_m^0}} \quad (n \neq m)$$

λ^2 Mult. (2) mit $\langle n^0|$:

$$\langle n^0|H^1|\underset{\text{s.o.}}{\underline{\underline{n^1}}}\rangle = E_n^2 \underbrace{\langle n^0|n^0\rangle}_{1} \quad (\text{mit } \langle n^0|n^1\rangle = 0)$$

$$\boxed{E_n^2 = \sum_{m \neq n} \frac{\langle n^0|H^1|m^0\rangle\langle m^0|H^1|n^0\rangle}{E_n^0 - E_m^0}} \quad \left(|n^1\rangle = \sum_{m \neq n} |m^0\rangle c_m^1\right)$$

negativ für Grundzustand!

mit $\langle m^0|$ $\quad (m \neq n)$

$$\underbrace{\langle m^0|H_0|n^2\rangle}_{E_m^0 \langle m^0|n^2\rangle} + \langle m^0|H^1|n^1\rangle = \underline{E_n^0} \langle m^0|n^2\rangle + E_n^1 \langle m^0|n^1\rangle$$

$$(E_n^0 - E_m^0) \underbrace{\langle m^0|n^2\rangle}_{c_m^2} = \sum_{m' \neq n} \frac{\langle m^0|H^1|m'^0\rangle\langle m'^0|H^1|n^0\rangle}{E_n^0 - E_{m'}^0}$$

$$- \sum_{m' \neq n} \langle n^0|H^1|n^0\rangle \underbrace{\langle m^0|m'^0\rangle}_{\delta_{mm'}} \frac{\langle m'^0|H^1|n^0\rangle}{E_n^0 - E_{m'}^0}$$

$$\langle m^0|n^2\rangle = \sum_{m'\neq n} \frac{\langle m^0|H'|m'^0\rangle\langle m'^0|H'|n^0\rangle}{(E_n^0-E_m^0)(E_n^0-E_{m'}^0)}$$

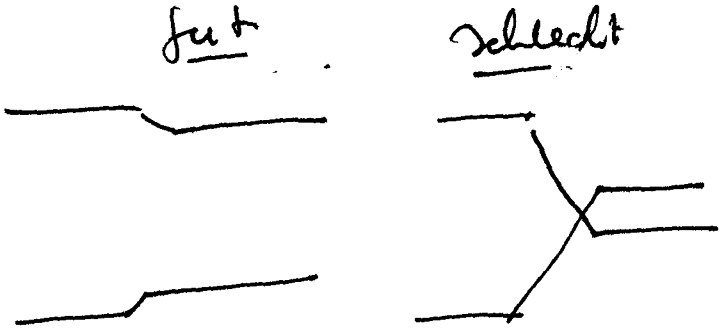
$$- \frac{\langle m^0|H'|n^0\rangle\langle n^0|H'|n^0\rangle}{(E_n^0-E_m^0)(E_n^0-E_m^0)}$$

(d.h. $m'\neq m$ in erstem Term!)

Bem. • Integrale für kontinuierliches Spektrum

• $\lambda H'_{mn}/(E_n^0-E_m^0) \ll 1$ "kleine Störung"?

für die Näherung



16.2 Ho mit Entartung

Anzahl der Freiheitsgrade ändert sich nicht!

$$H_0\,|n^0,\alpha\rangle = E_n^0\,|n^0,\alpha\rangle \qquad \alpha = 1,\dots k(n)$$

$$H\,|n,r\rangle = E_{n,r}\,|n,r\rangle \qquad r = 1,\dots k(n)$$

(Entartung eventuell aufgehoben)

$$E_{n,r} = E_n^0 + \lambda E^1_{n,r} + \dots$$

Ansatz

$$|n,r\rangle = \underbrace{\sum_\alpha c^{(r)}_{n\alpha}\,|n^0,\alpha\rangle}_{\propto \lambda^0\,!} + \lambda\,|n^1,r\rangle + \dots$$

$$(H_0 + \lambda H')\left(\sum_\alpha C_{n\alpha}^{(r)} |n^0,\alpha\rangle + \lambda |n^1,r\rangle + \dots\right)$$

$$= (E_n^0 + \lambda E_{n,r}^1 + \dots)\left(\sum_\alpha C_{n\alpha}^{(r)} |n^0,\alpha\rangle + \lambda |n^1,r\rangle + \dots\right)$$

λ^1

$$H_0 |n^1,r\rangle + \sum_\alpha C_{n\alpha}^{(r)} H' |n^0,\alpha\rangle =$$

$$E_{n,r}^1 \underbrace{\sum_\alpha C_{n\alpha}^{(r)} |n^0,\alpha\rangle}_{\text{"}|n^0,r\rangle\text{"}} + E_n^0 |n^1,r\rangle$$

sind orthogonal (bzw. orthogonalisiert falls weiter entartet)

Multipl. mit $\langle n^0,r'|$: $\langle n^0,r|n'$

$$\langle n^0,r'|H_0|n^1,r\rangle + \langle n^0,r'|H'|n^0,r\rangle$$

$$= E_{n,r}^1 \delta_{rr'} + \cancel{E_n^0 \langle n^0,r'|n^1,r\rangle}$$

kürzt

$\Rightarrow$ H' diagonal in den $\langle n^0,r|$

$\langle n^0,\alpha'|H'|n^0,\alpha\rangle$ ist eine hermitesche Matrix im k-dim. Raum, läßt sich diagonalisieren $\longrightarrow$ wähle eine solche neue Basis $|n^0,r\rangle$, in dieser Basis ist obige Gleichung konsistent

$$\boxed{E_{n,r}^1 = \text{"}H'_{rr}\text{"}}$$

$|n^1,r\rangle$ ist in dieser Ordnung unbestimmt, Bestimmung aus λ^2-Ordnung

Wir benötigen also Basis, in der H' (zumindest im Unterraum "n") diagonal ist: (121

ein Operator A vertausche mit H_0, H' (diese aber nicht notwendigerweise untereinander): wähle simultane E.V. $|f\rangle$ zu A, H_0: dies sei ein vollst. System von vertauschenden Operatoren, Entartung also aufgehoben

(i)
$$A|f\rangle = \lambda|f\rangle$$
$$A\,H'|f\rangle = H'A|f\rangle = \lambda H'|f\rangle$$

(ii)
$$H_0|f\rangle = E^0|f\rangle$$

im entarteten U.R.:
($|f\rangle, |f'\rangle$ im U.R.) zu E^0

$$\langle f'|H_0\,H'|f\rangle = E^0\langle f'|H'|f\rangle$$

(i)+(ii) $\Rightarrow$ $H'|f\rangle$ ist nicht (i.a.) im Unterraum, aber der Anteil im Unterraum entspricht der diagonalen Wirkung von H'

!

$H'|f\rangle$ hat gleiche "E.W." im Unterraum zu A, H_0 wie $|f\rangle$ (keine Entartung!)

$$\boxed{H'|f\rangle \sim c|f\rangle \text{ im Unterraum}}$$

Bem. falls kein vollständiger Satz von vertauschbaren Op. → nehme weiteren Op. B hinzu etc.

16.3 Spin-Bahn-Kopplung

$$H' = \frac{1}{2m^2c^2}\,\frac{1}{r}\, e\, \frac{d\phi(r)}{\partial r}\, \vec{L}\cdot\vec{S} \qquad \text{"klein"}$$

$\phi = -\frac{e}{r}$

Vollständige Satz vertauschbarer Operatoren

$\underbrace{H}, \vec{J}^2, J_3, \vec{L}^2, \vec{S}^2$ → simultane Eigenvektoren

auch H_0

H' vertauscht (wie H_0) mit $\underbrace{\vec{J}^2, J_3, \vec{L}^2, \vec{S}^2}_{\text{unser vorheriges "A"}}$

→ ist diagonal im Eigenraum

zu diesen "A" und H_0 (siehe S. 121)

wir umgehen so die Diagonalisierung ("Säkularproblem")

(aber erinnere: es gibt i.a. Übergangselemente in den "Hauptquantenzahlen" von H_0!)

hier $\vec{L}\cdot\vec{S} = \frac{1}{2}\left(\vec{J}^2 - \vec{L}^2 - \vec{S}^2\right)$

$$\boxed{E'} = \langle n, j, m, l, s | H' | n, j, m, l, s\rangle$$

$$= \frac{\hbar^2 e^2}{4m^2c^2}\left(j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)\right) \times \langle n, j, m, l, s | \frac{1}{r^3} | n, j, m, l, s\rangle$$

m unabhängig

$$\underbrace{\langle n, j, m, l, s | \frac{1}{r^3} | n, j, m, l, s\rangle}_{\left(\frac{1}{r^3}\right)^{n,l}}$$

$= l$ for $j = l + 1/2$

$-(l+1)$ for $j = l - 1/2$

Ortsraum-Darstellung

$$\langle \vec{x} \mid n, j = l \pm 1/2, m_j, l \rangle$$

$$= R_{nl}(r) \left(\alpha_\pm Y_{l\, m_j - 1/2}(\vartheta, \varphi) + \beta_\pm Y_{l\, m_j + 1/2}(\vartheta, \varphi) \right)$$

mit C.G. Koeff. $\alpha_\pm, \beta_\pm$ (hier $\alpha_\pm = \pm \beta_\mp$ ⇝ Schwabl)

und: $|\alpha_\pm|^2 + |\beta_\pm|^2 = 1$

$\frac{1}{r^3}$ ist diagonal in den $m_l = m_j \mp 1/2$; obiges Matrixelement: m_j unabhängig, m_l unabhängig

für Coulomb-pot:

$$\left\langle \frac{1}{r^3} \right\rangle_{nl} = \frac{1}{a^3 n^3 l (l + 1/2)(l+1)} = \ldots$$

mit "Bohr radius" $a = \frac{\hbar^2}{m e^2} \sim 0.5 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{cm}$

$$\langle H' \rangle = E' = \frac{mc^2 \alpha^4}{4 n^3 l (l + 1/2)(l+1)} \begin{pmatrix} l \\ -l-1 \end{pmatrix}$$

for $j = l \pm 1/2$

$l \neq 0$!

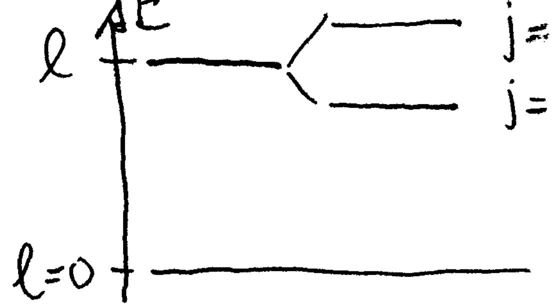
betrachte Ausdruck Korr. für $l = 0$! ($j = 1/2$), dann $E' = 0$

$\left(\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} \approx \frac{1}{137} \ldots \right)$

erhalte "Feinstrukturaufspaltung" (s. S. 124!)

Abzählen:

$$(2l+1) \cdot 2 = \underbrace{2(l + 1/2) + 1}_{j_+} + \underbrace{2(l - 1/2) + 1}_{j_-}$$



Bem. Es gibt weitere Korrekturen

Dirac gl.:

(i) relativistische Korrektur (zusammen mit $\vec{L}\cdot\vec{S}$ Term $\Rightarrow$ "Feinstruktur")

(ii) Darwin Term ("Zitterbewegung" $V(\vec{x}+\delta\vec{x})$)

(iii) Lambshift (Quantenfeldtheorie)

(iv) Hyperfeinaufspaltung - Wechselwirkung des Elektrons mit dem Kernspin

zu (i)

$$E = (\vec{p}^{\,2}c^2 + m^2c^4)^{1/2} = mc^2 + \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} - \frac{1}{8}\frac{(\vec{p}^{\,2})^2}{m^3c^2} + \dots$$

ausführlich: Schwabl

$$\Delta E^{rel.} = -\frac{1}{2mc^2}\left(H_0 + \frac{e^2}{r}\right)^2 = H_1 \quad \text{mit} \quad H_0 = \frac{p^2}{2m} - \frac{e^2}{r}$$

$$\Delta E_{nlm} = \langle nlm | H_1 | nlm \rangle$$

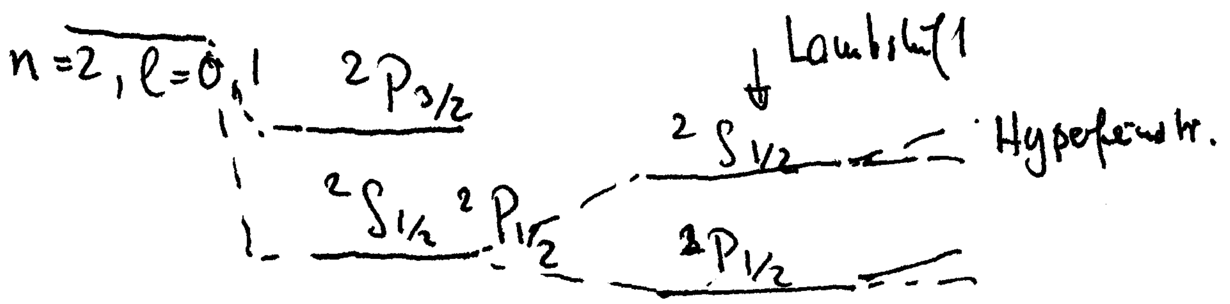
$$= -\frac{mc^2\alpha^2}{2n^2}\frac{\alpha^2}{n^2}\left(\frac{n}{l+1/2} - 3/4\right)$$

$$Ry = \frac{mc^2\alpha^2}{2}$$

$$a_{Bohr} = \frac{\hbar^2}{me^2} \qquad \alpha = \frac{e^2}{\hbar c}$$

$$\langle H_1 + H^{Spin-Bahn} \rangle_{n,\, j=l\pm 1/2,\, l}$$

$$= \frac{mc^2\alpha^2}{2n^2}\frac{\alpha^2}{n^2}\left\{3/4 - \frac{n}{j+1/2}\right\}$$



16.4 Schursches Lemma

(Beobachtung: hatten M-Unabhängigkeit!)

sei $[H, J_\pm] = [H, J_3] = 0$, H selbstadjungiert

$\rightarrow$ H ist ein Vielfaches der Einheitsmatrix in irreduziblen Unterräumen der Lie Algebre:

$H = \lambda \mathbb{1}$ in irr. Unterraum

Bew. ex. simultaner Eigenvektor $|\psi\rangle$ zu H, $\vec{J}^2$, J_3

$$H J_\pm |\psi\rangle = J_\pm H |\psi\rangle = \lambda J_\pm |\psi\rangle$$

Auf/Absteiger! (erhalte so den gesamten irred. Unterraum)

$\rightarrow$ $H = \lambda \mathbb{1}$ in dem aus $|\psi\rangle$ konstruierten irreduz. Unterraum

16.5 (Ritzsches) Variationsverfahren

$$\frac{\langle \phi | Q | \phi \rangle}{\langle \phi | \phi \rangle} = \bar{Q}(\phi)$$ sei Extremum (Minimum) bzgl. $|\phi\rangle$

$\rightarrow$ $Q|\phi\rangle = \bar{Q}|\phi\rangle$, $|\phi\rangle$ ist E.V. mit E.W $\bar{Q}$.

In der praktischen Anwendung sucht man ein Minimum für eine Klasse von $|\phi\rangle$ ("trial functions" $\langle x|\phi\rangle$)

Bew. sei $\delta \bar{Q} \overset{\text{Def.}}{=} 0$ (Extremum)

$$\underbrace{\langle \phi | Q | \phi \rangle - \langle \phi | \bar{Q} | \phi \rangle} = 0 \quad \left(\begin{matrix}\text{Def.}\\ \text{von } \bar{Q}\end{matrix}\right)$$

$$\rightarrow \langle \delta\phi | Q - \bar{Q} | \phi \rangle + \langle \phi | Q - \bar{Q} | \delta\phi \rangle$$

$$- \langle \phi | \underbrace{\delta \bar{Q}(\phi)}_{=0} | \phi \rangle = 0 \qquad (1)$$

gilt für alle $\delta\phi$, also auch für $\delta_1 \phi = i\delta\phi$

$$\rightarrow -i \langle \delta\phi | Q - \bar{Q} | \phi \rangle + i \langle \phi | Q - \bar{Q} | \delta\phi \rangle - \cancel{\ldots} = 0 \qquad (2)$$

(1) + (2)

$$\langle \delta\phi | Q - \bar{Q} | \phi \rangle = 0 \quad \forall \langle \delta\phi |$$

$$\curvearrowright (Q - \bar{Q}) | \phi \rangle = 0, \text{ d.h. } | \phi \rangle \text{ EV.}$$

qed

häufig: $Q = H$: $\boxed{\bar{H}(\phi) \geq E_0}$,

da mit $|\phi\rangle = \sum_n C_n |n\rangle$, $H|n\rangle = E_n |n\rangle$

$$\bar{H}(\phi) = \sum_n |C_n|^2 E_n \Big/ \sum |C_n|^2 \geq E_0 \text{ wenn } E_n \geq E_0$$

$\Uparrow$

$\boxed{\text{beste Näherung liefert tiefsten Energiewert}}$

Bem.

1. Angeregter Zustand: $|\phi\rangle = \underset{\text{trial state}}{|\phi_1\rangle} - \underset{\text{(Grundzustandsnäherung)}}{|\phi_0\rangle}\langle \phi_0 | \phi_1 \rangle$

, also mit $\langle \phi | \phi_0 \rangle = 0$, $|\phi_1\rangle$ wird variiert!

17. Kombinierte $\vec{L}\cdot\vec{S}$-Kopplung u. Magnetfeld

17.1 $$H = \underbrace{H_{00} + H_{SB}}_{H_0} + \underbrace{\frac{\mu_B}{\hbar}\left(\vec{L} + 2\vec{S}\right)\cdot\vec{B}}_{H'} \qquad \mu_B = \frac{\hbar e}{2mc}$$

$$\boxed{\text{"}\langle H' \rangle \ll \langle H_{SB} \rangle\text{"}}$$

"anomaler Zeeman Effekt"

$$H_0 |n,l,s,j,m_j\rangle \approx \left(E_{n0} + \Delta E_{nlsj}\right)|n,l,s,j,m_j\rangle$$

(1. Ordnung der Störungsrechnung in H_{SB}:
H_0 ist nicht exakt diagonal in n!)

haben noch m_j - Entartung

$\vec{B} = B_3 \vec{e}_3$

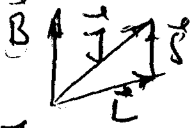
$$\Delta E'_{nlsjm_j} = \langle n,l,s,j,m_j | \frac{\mu_B}{\hbar}(\underbrace{J_3}_{\hbar m_j} + S_3) B_3 | n,l,s,j,m_j\rangle$$

$$\langle n,l,s,j,m_j | S_3 | n,l,s,j,m_j\rangle = ?$$

(auch → Übergang zu m_l, m_s - Basis ... Rechnerei!)

eleganter: beweise

$$\langle \alpha,j,m_j | S_3 \vec{J}^2 | \alpha,j,m_j\rangle = \langle \alpha,j,m_j | (\vec{S}\cdot\vec{J}) J_3 | \alpha,j,m_j\rangle$$



(i) gilt für $m_j = j$:

$$\langle S_3 \hbar^2 (j(j+1)) \rangle = \langle \left(\tfrac{1}{2}(S_+ J_- + S_- J_+) + S_3 J_3\right) J_3 \rangle$$ auf $m_j = j$

mit $[S_+, J_-] = [S_+, S_-] = 2 S_3 \hbar$

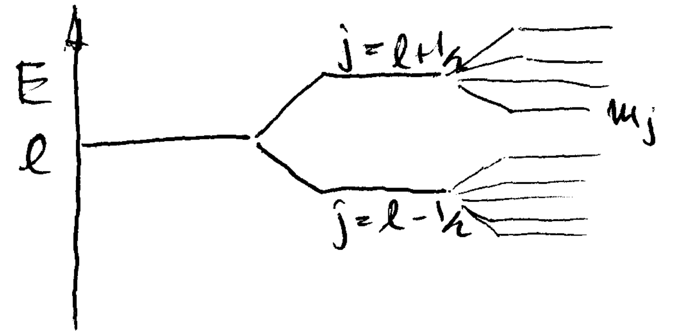
(ii) dann für <u>alle</u> m_j gleichzeitig nach $\boxed{\text{Wigner-Eckart-Theorem}}$

: $S_3 \vec{J}^2$ und $(\vec{S}\cdot\vec{J})\, J_3$ sind beides <u>Vektoroperator</u> (s.u.)

$$\rightsquigarrow \Delta E'_{nlsjm_j} = \mu_B B_3 m_j g$$

mit $g = \left(1 + \dfrac{\frac{1}{2}\left(j(j+1)+s(s+1)-l(l+1)\right)}{j(j+1)}\right)$ (mit $\vec{S}\cdot\vec{J} = \frac{1}{2}\left(\vec{J}^2+\vec{S}^2-\vec{L}^2\right)$ aus $(\vec{J}-\vec{S})^2 = \ldots$

$$= \frac{3}{2} + \frac{\frac{1}{2}\frac{3}{2} - l(l+1)}{2j(j+1)}$$ "Landé-Faktor"



$g = \dfrac{2l+2}{2l+1}$ bei $j = l + 1/2$

$g = \dfrac{2l}{2l+1}$ bei $j = l - 1/2$

17.2 Paschen-Back-Effekt

$$H = \underbrace{H_{00} + \frac{\mu_B}{\hbar}(\vec{L}+2\vec{S})\cdot\vec{B}}_{H_B} + H^{\vec{L}\cdot\vec{S}}$$

$$\boxed{\text{"}\langle H_B\rangle \gg \langle H^{\vec{L}\cdot\vec{S}}\rangle\text{"}}$$

$|n,l,m_l,s,m_s\rangle$ sind exakte E.V. zu H_0 bei konst. $\vec{B} = B_3\vec{e}_3$

$$H_B|n,l,m_l,s,m_s\rangle = \left\{E_n + \mu_B(m_l+2m_s)B_3\right\}|n,l,m_l,s,m_s\rangle$$

$2m_s = \pm 1 \rightarrow$ <u>Entartung</u> bei $\underbrace{m_l + 1}_{m_s=+\frac{1}{2}} = \underbrace{m_l' - 1}_{m_s=-1/2}$

also $\underline{m_j = m_l + 1/2}$, $m_j' = m_l' - 1/2$
$\underline{= m_l + 3/2}$

$\vec{L}\cdot\vec{S}$ ändert nicht m_j : $[\vec{L}\cdot\vec{S}, \vec{J}]=0$

ist diagonal in J-Basis

$$\vec{L}\cdot\vec{S} = \frac{1}{2}\,\underbrace{(L_+ S_- + L_- S_+)}_{\text{vermittelt nicht zwischen entarteten Zuständen } (\Delta m_\ell = 2)} + L_3 S_3$$

Störenergie der Spin-Bahn-Kopplung für <u>entartete</u> Zustände

$$E' = \overline{\left(\frac{a}{r^3}\right)}^{n\ell} \hbar^2 m_\ell m_s$$ gibt Aufhebung der Entartung

bis auf Fall $m_\ell = +1,\ m_s = -\frac{1}{2}$

$m_\ell' = -1,\ m_s' = +\frac{1}{2}$

$\sim m_j = \pm 1/2$ Zust.

17.3 Wigner-Eckart Theorem

$$\boxed{\langle j, m, \alpha | \underline{\underline{T^{j'}_{m'}}} | j'', m'', \beta \rangle = \overbrace{\langle j, m | j', m', j'', m'' \rangle}^{\begin{pmatrix} j & | & j' & j'' \\ m & | & m' & m'' \end{pmatrix}} \frac{1}{\sqrt{2j''+1}} \times \langle j \alpha \| T^{j'} \| j'' \beta \rangle}$$

Clebsch Gordan

"reduziertes Matrixelement": m unabhängig

gilt für $\boxed{\text{Tensoroperatoren}}$

$$U(R) \underline{\underline{T^j_m}}(x) \underset{\underset{U^\dagger(R)}{\parallel}}{U^{-1}}(R) = \sum_{m'} T^{j}_{m'} \overset{(R^{-1}x)}{} D^j_{m'm}(R)$$

infin.

$$[T^j_m, J_k] = \sum_{m'} T^j_{m'} J^j_{m'm}$$

R: orthogonale Transf. Drehungen

Beweis (Hinweis)

$$\underbrace{\langle j, m, \alpha | T^{j'}_{m'} | j'', m'', \beta \rangle}_{\text{transformiert wie } \underline{\text{Produktdarstellung}}\ j' \otimes j''} = \underbrace{\langle j, m, \alpha | U^\dagger}\ \underbrace{U(R) T^{j'}_{m'} U^\dagger}_{\text{transformierter Operator}}\ \underbrace{U(R) | j'', m'', \beta \rangle}$$

$$j' \otimes j'' = \sum \oplus \tilde{j}$$

$$\langle j, m, \alpha | \tilde{j}, \tilde{m}, \beta, T \rangle$$

$$= \delta_{j\tilde{j}} \, \delta_{m\tilde{m}} \, f(j, \cancel{m})$$

- keine m-Abhängigkeit nach Schurschem Lemma, $(O_p = 1!)$
- bzw. durch Wirkung von Auf/Absteigern