

Quantenmechanik

Michael G. Schmidt, WS 2007/8

1. Einführung: Welle-Teilchen Dualismus

1.1 Teilchen- und Wellenbild

Im bisherigen Kurs "Theor. Physik":

"Klassische Physik": (Modelle!)

Mechanik

- Bewegung von "Punktteilchen", Phasenraum $x-p$, kanonische Formalismus (Hamilton...);
Kräfte über Potential (i.a.), Reibung:
keine grundlegende Theorie über Kräfte (elug. Kräfte, Gravitationskräfte, elastische Kräfte)
- Kontinuumsmechanik: Zerlegung in infinitesimale Massenstücke, Superposition der Kräfte
→ Feldtheorie (Kraftfeld, Dichtefeld, Geschwindigkeitsfeld...)

Elektrodynamik

elektromagnetische Felder üben Kräfte auf geladenen Teilchen aus; Maxwell-Gleichungen, elug. Potentiale,
{Wellengleichung}: i.a. langreichweitige Kräfte (Potentialfall, aber siehe Telegraphengleichungen...)

Relativitätstheorie aus der Form der Maxwell gl.

→ relativistische Mechanik

Punktteilchen ist nicht wirklich Punktteilchen:
Wir sprechen in der klassischen Physik von makros-
kopischen Objekten (well, Elektronen / Protonen in

Beschleunigung und mikrosk. Obj., erfüllen relat. Bew. gl.;
"Rutherford'sche Streuformel"

! Physik im atomaren und subatomaren Bereich
("mikroskopisch") wird i.a. nicht durch klassische
Mechanik und klass. Elektrodynamik beschrieben

(i) elektromagnetische Wellen haben Korpuskelcharakter

Deutung des Photoelektrischen Effekts (1905 Einstein)



$$E = h\nu = \frac{h}{2\pi} \omega$$

$$h = 6,6 \cdot 10^{-34} \text{ Joule sec}$$

$$\sim 4 \cdot 10^{-15} \text{ eV sec}$$

"Planckscher
Wirkungsquant

$$(1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \frac{\text{Coul} \cdot \text{V}}{\text{A sec}})$$

$$\underbrace{\text{A sec}}_{\text{W sec} = \text{Joule}}$$

(ii) Teilchen, z.B. Elektronen zeigen bei Streuung

Interferenzerscheinungen, die für das Wellenbild

typischer Phänomene (Davisson, Germer 1927
(s.u. Streuung an Nickelkristallen))

Weder klassische Teilchen noch klassische Welle sind also (3)
für mikroskopische Objekte die adäquate Beschreibung.
Wir haben keinen Widerspruch: Experimente, wenn korrekt,
können sich nicht widersprechen!

Eine Formulierung dieses Sachverhalts finden wir in den
Axiomen der Quantenphysik - der Quantenmechanik im
Falle von nichtrelativistischen massiven Teilchen (Elektron, Proton...)
Es handelt sich selbstverständlich um eine "Erklärung"
durch Quantenphysik im Sinne der Naturwissenschaft
- die ersten Prinzipien können nicht bewiesen, werden
postuliert. Ihr Erfolg ruht nicht darin, ob einfache Postulate
zur Deutung und Voraussage einer - in diesem Teil nötigen -
Menge von experimentellen Resultaten führen.

Im Falle der elektr. Felder (\rightarrow "Photonen") und bei relati-
vistischen Teilchen! erfolgt eine Deutung in der Quanten-
feldtheorie (Quantentheorie für ∞ viele Freiheitsgrade)

Die Quantenphysik-Theorie kann nicht aus klassischer
Theorie abgeleitet werden, enthält aber den klassischen Fall
als Grenzfalle (" $\hbar \rightarrow 0$ ") Es ergeben sich gewisse Gren-
schänkungen durch das Korrespondenzprinzip (siehe Später im
Detail)

Wir betrachten demnächst zunächst die Quanten-
mechanik (QM) - bei der Quantenfeldtheorie kommen
keine fundamentalen Prinzipien, aber technische Erweiterungen hinzu.

Die QM ist heute ein theoretisch abgeschlossenes Gebäude und kann axiomatisiert werden. Hier bevorzugen wir ein induktives Vorgehen, werden also die Axiome eher abschließend formulieren.

Heute ist die QM in der Atom-Kern-Elementarteilchenphysik, in der Chemie, in der statistischen Mechanik von grundlegender Bedeutung. In den letzten 20 Jahren hat sich gezeigt, daß die sog. "Gedankenexperimente" der QM in Labor realisiert werden können - dies schlägt sich auch in unseren Texten zur QM nieder.

1.2 Grundlegende Experimente + Deutungen

(- hier ganz kurz, das war der Gegenstand der Ex-Physik Vorlesungen)

1.2.1) "Teilchen" :

- Elektron (Kathodenstrahlung) J.J. Thomson 1817
... Ph. Lenard HD
- Atomkern (Rutherford 1911)
 $r \sim 10^{-13} - 10^{-12}$ cm
- Brownsche Molekularbewegung (Einstein 1905) bestätigt atomare Hypothese
Avogadro'sche Zahl (Perrin 1908)

"elung. Wellen"

Spektrum ... Licht... 1895 Röntgenstrahl.
1912 Beugung an Kristallen

1.2.2) Licht als Korpuskel

(H. v. Laue)

a) Hohlraumstrahlung schwarze Körper

Max Planck (1900) erhält Interpolationsformel zwischen (5)
 Rayleigh-Jeans (kleine ν) und Wienscher Formel (große ν)
 (durch raffinierte Betrachtung von harmonischen Oszillatoren mit $E_n = h\nu n$
 in der Wandlung ^{in therm. Gleichgewicht} mit der Strahlung eine bessere Begründung)

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1} \quad \text{Planck'sche Strahlungsformel}$$

Begriff des Photons mit $E = h\nu$ fehlt auf Einstein zurück

Erinnere: $\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1.054 \cdot 10^{-27} \text{ erg sec}$, h : Plancksches Wirkungsquantum

1907 Einstein } spez. Wärme für kleine Temperaturen
 1911 Debye } von Festkörpern bei Benutzung eines diskreten
 (Oszillator) Spektrums

b) Photoeffekt

1905 Albert Einstein (26 Jahre alt!!)
 theor. Deutung

- (in einem Jahr)
- Rel.-Th.
 - Brownsche Teil.
 - Photoeffekt



γ : Photon mit $E = h\nu$ (Lichtgeschwindigkeit)

$$\frac{1}{2} m v^2 = h\nu - W$$

Abtöscarbeit

Geschwindigkeit der Elektronen hängt nicht von
 der Intensität der Strahlung ab, sondern nur von
 der Frequenz (Farbe) (Lenard 1902)
 Emittierte Zahl der Elektronen \sim Intensität

c) Compton-Effekt

1924 Compton, Debye: Stoß masseloser Photonen



Frequenzverschiebung $\Delta\lambda = 4\pi \left(\frac{\hbar}{mc} \right) \sin^2 \frac{\theta}{2}$

Photon: $E = pc = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$ (6) (E, pc) 4-vector
 $\sim p = \frac{h}{\lambda} = \hbar k$ $E^2 = \vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4$

$E = \hbar \omega, p = \hbar k$ für Wellen $e^{i(\omega t - kx)}$

"De Broglie Wellenlänge" $\lambda = \frac{h}{p}$

"Compton Wellenlänge" $\lambda_c = \frac{h}{mc}$

1.2.3) Materie als Welle

- 1927 exp. Davisson, Germer: Interferenz bei Elektronenstreuung an Nickelkristallen (.. Gerichte über Levard...)

- Diskrete Energieniveaus im Atom aus Spektroskopie (wenn man "Farbe" und Energie der "Photonen" zusammenbringt.)

- Niels Bohr (1912-14): Bohrsches Atommodell
 "stationäre" Kreisbahnen...
 $\oint p dq = 2\pi n \hbar$

- Franck / Hertz Experiment (Kathodenstrahl in Quecksilberdampf) (1913)

- Louis de Broglie (1923) $p = \frac{h}{\lambda} = \hbar k$ stehende Welle

- Stern / Gerlach (1927): paramagnetischer Atomstrahl in einem stat. inhomogenen Feld.
 Drehimpulsquantisierung \sim "Spin"

1.3 Väter der Quantenmechanik

(Theor. Physik!)

(7)

Niels Bohr (1885 - 1962)

Bohrsches Atommodell, Komplementarprinzip

1912 u. folgenden Jahre in Rutherford'scher Arbeitgruppe

Luis V. de Broglie (1892 - 1987)

1923 Welle-Teilchen-Dualismus beim Elektron

Erwin Schrödinger (1887 - 1961)

Wellenmechanik 1926

Werner Heisenberg (1901 - 1976)

Matrixmechanik 1925

Max Born (1882 - 1970)

Wahrscheinlichkeitinterpretation

Wolfgang Pauli (1900 - 1958)

Pauli Prinzip; wichtig in der Diskussion

Paul Dirac (1902 - 1984)

Spin-Magn. Moment des Elektrons, Dirac-Gl.

! → Arnold Sommerfeld (1868 - 1951)

Lehrer von Heisenberg, Pauli und vieler anderer...

→ Übungsblätter

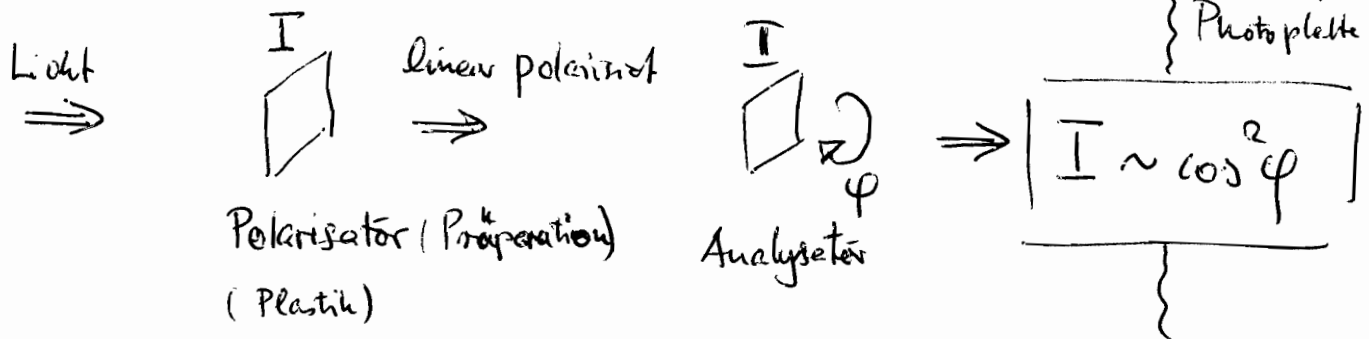
mit Hinweisen

1.4 Welle-Teilchen-Dualismus: Wahrscheinlichkeitsinterpretation (8)

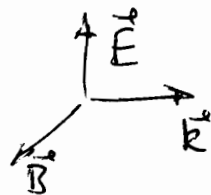
Superpositionsprinzip (Themat. formalisiert)

vgl. Feynman III (and better...?) für ausführliche Entwicklung in dieser Richtung mit "gedankenexperiment" (heute: real!) } Photoplatte

(i) Licht hat körnige Struktur



Im Wellenbild (E-dy.) klar :



Korpuskeln ("Photonen")

schwächen in unregelmäßiger Folge die Photoplatte bei $\varphi \neq 0$ und $I \sim \cos^2 \varphi$ nach Mittelung über hinreichend viele Photonen; keine "gefalteten" Photonen: Wahrscheinlichkeit für Absorption $\sim \sin^2 \varphi$, Rest kommt durch ($\sim \cos^2 \varphi$)

Photonen sind nach I in einem bestimmten "Polarisations"-zustand, dieser wird durch II ("Messung") verändert falls $\varphi \neq 0$

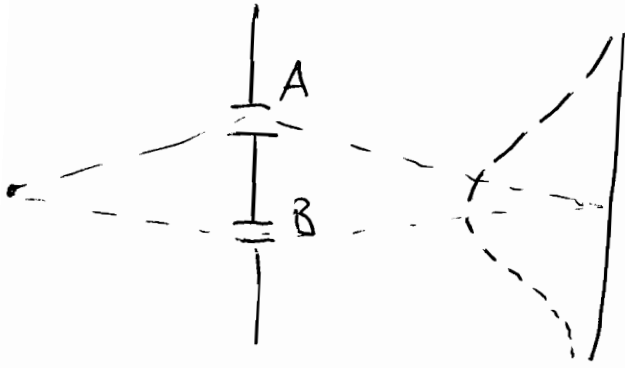
I bei Elektronen: zwei versch. "Polarisationen" \rightsquigarrow Spin
 \rightsquigarrow Stern-Gerlach-Expt. im Magnetfeld \rightarrow Feynman III!

2 Freiheitsgrade

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

\hookrightarrow Drehung $\varphi \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}$
 (aktiv/passiv)

(ii) Youngscher Doppelspaltversuch (für Licht, Elektronen, Neutronen)⁹



Interferenz von Wellenfängen

(heute!)
ILL-Grenoble

Teildurchbild: statistisch ankommend Teilchen schwärts Photoplatte, nicht determiniert, ob durch A oder B angekommen ^(*)

halbe erst A, dann B für Zeit Δt zu; vergleichen mit Interferenzmittel nach Δt ; wir wissen Resultat aus Optik/E-dgyn.

$$I = |A_1(x) + A_2(x)|^2 \neq |A_1(x)|^2 + |A_2(x)|^2$$

! lineare Superposition der Amplituden I_1 I_2

Wir wollen eine Wahrscheinlichkeitsinterpretation

$A_{1,2}(x) \rightarrow \psi_{1,2}(x)$ mit $|\psi_{1,2}(x)|^2$ Wahrscheinlichkeitsdichte

sollten dann auch eine lineare Superposition für die Wahrscheinlichkeitsamplituden $\psi_{1,2}$ haben

^(*) Hinweis: Das System "welches" jeder Versuch, Teilchenbahn!
A oder B festlegen über Unschärferelation (hier Ort/Interferenzphänomen) \rightarrow vgl. Heisenberg, Feynman..

(iii) Wahrscheinlichkeitsamplitude $-\psi(i)$ mit $W_i = |\psi(i)|^2$ (10)
 diskrete Zustände ($i=1, 2$ (Polarisation), etc.)

$-\psi(\vec{x})$ mit $W = |\psi(\vec{x})|^2 d^3x$ (*)

Das einzelne Objekt ist in einem Zustand, dieser ist probabil
 nur durch Messung (durch Messapparat) an Gesamtheit ("Ensemble")
 von identisch präparierten Objekten feststellbar.

$\psi_A(\vec{x}, t)$, $\psi_B(\vec{x}, t)$ seien die zwei Zustandsfunktionen (Bau
 über A/B) in obigen Beispiel, dann bei Öffnen von A und B

$$\psi(\vec{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{N}} (\psi_A(\vec{x}, t) + \psi_B(\vec{x}, t)) \quad \text{SUPERPOSITION}$$

← Norm

Obiges $W = |\psi(\vec{x}, t)|^2 \rightarrow$ Interferenz
 habe

allgemeine Eigenschaften einer Wahrscheinlichkeitsverteilung (hier in \mathbb{R}_3)

1) $W(V) \geq 0$, $W(\emptyset) = 0$

2) $W(V_1 + V_2) = W(V_1) + W(V_2)$ für $V_1 \cap V_2 = \emptyset$

3) $W(\mathbb{R}_3) = 1$ (Normierung)

hier: $W(V) = \int_V d^3x |\psi(\vec{x})|^2$ mit $\int_{\mathbb{R}_3} \dots = 1$
 siehe (*)