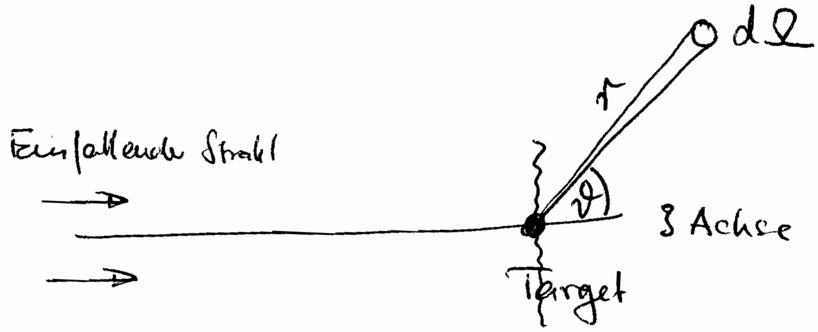
Einschub 9. Streuung am Zentralpotential

(~ Übungen!) Bornsche Reihe / Näherung

9.1 Wirkungsquerschnitt (erinnere Mechanik)



exp. n_T : Teilchen pro Flächeneinheit im Target ⊥ Einfallsrichtung

N_{ein} : pro Zeiteinheit auf Target auftreffende Teilchen

dN_{streu} : in Raumwinkel $d\Omega$ pro Zeiteinheit gestreute Teilchen

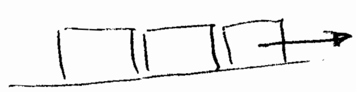
$$d\sigma_{theor.} = \frac{\vec{j}_{streu} \cdot d\vec{A}}{|j_{ein}|} \overset{!}{=}_{exp.} \frac{dN_{streu}}{N_{ein}\, n_T}$$

(! falls keine Vielfachstreuung und Strahl schmaler als Targetdimension)

theor. erstmal wieder wie bei 1-dim. Potentialstufe / kasten

Wellenberg durch ebene Welle $e^{i(\vec{k}\vec{x}-\omega t)}$ müssen am Ende im Prinzip superponieren! kein Überlapp der einzelnen Wellenberge

Hilfsbild:



$$|\vec{j}_{ein}| = \frac{\hbar k}{m} = v$$

$$\left(\vec{j}_{Wahrscheinlichkeitsstrom} = \frac{i\hbar}{2m}\left(\vec{\nabla}\psi^* \psi - \psi^* \vec{\nabla}\psi\right)\right)$$

(S. 15 Kap. 2.2.2)

d.h. Annäherung durch <u>stationäres</u> Problem:

9.2 Lösung der Schrödingergleichung mit Asymptotik ($r \to \infty$)
|| einlaufende ebene Welle + auslaufende Kugelwelle

Potential soll für große r verschwinden (oder $\leq \frac{1}{r^2} \ldots$)

→ <u>freie</u> Schrödinger-Gl. in Kugelkoordinaten

(vgl. Coulombproblem : $e_0 \to 0$)

$$\psi(\vec{x}) = \sum_{l,m} \frac{u_l(r)}{r} Y_{lm}(\vartheta,\varphi)\, c_{lm}$$

auch Übung mit 3-dim Kastenpotential

$$\text{mit} \quad u_l''(r) + \Big(\underbrace{\frac{2mE}{\hbar^2}}_{\text{def. } k^2} - \cancel{\frac{l(l+1)}{r^2}}\Big) u_l(r) = 0$$

$\to 0$ für $r \to \infty$

$$\boxed{u_l(r) \sim e^{\pm ikr}} \quad \text{für } r \to \infty$$

Bem. kommen später auf Entwicklung in l zurück!

$\frac{e^{ikr}}{r}$ ⇝ auslaufende Kugelwelle

$$\boxed{\psi(\vec{x}) \underset{r\to\infty}{\leadsto} e^{i\vec{k}\vec{x}} + f(\vartheta,\cancel{\varphi}) \frac{e^{ikr}}{r}}$$

$\vec{k}$ in 3-Richtung, Kugelkoordinaten in 3-Richtung

→ keine Abhängigkeit von Azimutwinkel φ

berechne mit auslaufendem Anteil von ψ $\left(\vec{\nabla} \to \frac{\partial}{\partial r} \ldots\right.$

$$\vec{j}_{\text{streu}} = \frac{\hbar k}{m} \frac{|f(\vartheta)|^2}{r^2} \frac{\vec{x}}{r} + O\left(\frac{1}{r^3}\right)$$

$$\vec{j}_{\text{stren}} \cdot d\vec{A} = \frac{\hbar k}{m} |f(\vartheta)|^2 d\Omega \quad , \quad |\vec{j}_{\text{ein}}| = \frac{\hbar k}{m}$$ (64)

$|d\vec{A}| = r^2 \Omega$

$$\boxed{d\sigma = |f(\vartheta)|^2 d\Omega \quad ; \quad \sigma_{\text{total}} = \int d\Omega \, |f(\vartheta)|^2 = 2\pi \int_0^\pi \sin\vartheta \, d\vartheta \, |f(\vartheta)|^2}$$

9.3 Bornsche Reihe

stat. Schrödinger-Gl. $\quad (\Delta + k^2)\psi(\vec{x}) = \frac{2m}{\hbar^2} V(r)\psi(\vec{x})$

$$\left(E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \right)$$

! betrachte rechte Seite als inhomogenen Teil, vgl. E-Dyn.

$$\rightarrow \boxed{\psi(\vec{x}) = \psi_0(\vec{x}) + \int d^3x' \, G(\vec{x}, \vec{x}') V(r')\psi(\vec{x}')}$$

$\uparrow$ Lsg. der freien Schröd. Gl. $\quad (\Delta + k^2)\psi_0(\vec{x}) = 0$

mit Greenscher Funktion $\quad G(\vec{x} - \vec{x}')$ (Translat. inv.!)

$$(\Delta + k^2) G(\vec{x} - \vec{x}') = \delta_3(\vec{x} - \vec{x}')$$

$$\Rightarrow G^{\pm}(\vec{x} - \vec{x}') = -\frac{1}{4\pi} \frac{e^{\pm ik|\vec{x} - \vec{x}'|}}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

$\ominus$ ein / $\oplus$ auslaufende Kugelwellen

Die obige Asymptotik (*) erfordert: (i) ψ_0 ist ebene Welle

(ii) auslaufende Kugelwelle

$\rightsquigarrow$ G^+

$$\Rightarrow \boxed{\psi(\vec x) = e^{ikx_3} - \frac{2m}{4\pi\hbar^2}\int \frac{e^{ik|\vec x-\vec x'|}}{|\vec x-\vec x'|}\, V(r')\,\psi(\vec x')\, d^3x'}$$

ist Integralgleichung für $\psi(\vec x)$, in der Asymptotik eingebaut ist.

<u>kurze Wdhl.</u>

$$(\Delta+k^2)\, G(\vec x) = \delta_3(\vec x)$$

F. Transf. von G, δ_3

$$\int \frac{d^3k'}{(2\pi)^3}\,(-\vec k'^2+k^2)\,\tilde g(\vec k')\, e^{i\vec k'\cdot\vec x} = \int \frac{d^3k'}{(2\pi)^3}\, e^{i\vec k'\cdot\vec x}$$

$$\rightarrow \quad \tilde g(\vec k') = \frac{1}{-\vec k'^2+k^2}$$

$$G(\vec x) = \int \frac{d^3k'}{(2\pi)^3}\,\frac{e^{i\vec k'\cdot\vec x}}{-\vec k'^2+k^2}$$

$$\overset{\vartheta,\varphi\text{-Int.}}{=} \frac{2\pi}{(2\pi)^3}\int_0^\infty \frac{k'^2\,dk'}{-k'^2+k^2+i\epsilon}\,\frac{\left(e^{ik'r}-e^{-ik'r}\right)}{ik'r}$$

! Integrationsweg bzw. ϵ-Vorschrift bei Umgehung des Pols $+i\epsilon$

$$= \frac{-i}{r}\,\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{iqr}\,q\,dq}{k^2-q^2+i\epsilon}$$

(nach $-k'$-Substitution)

Schließe in oberer Halbebene. $(r>0)$

$$= -\frac{1}{4\pi}\,\frac{e^{ikr}}{r}$$

<u>Bem.</u> auch $\Delta\frac{1}{r} = -4\pi\,\delta^3(\vec x)$, $\quad \frac{e^{ikr}}{r} = \frac{1}{r} + \frac{\overbrace{e^{ikr}-1}^{\text{regulär}}}{r}$

$$\rightarrow (\Delta+k^2)\,\frac{e^{ikr}}{r} = -4\pi\,\delta^3(\vec x) \qquad (\Delta \rightarrow \partial_r^2+\tfrac{2}{r}\partial_r)$$

$r \gg r'$: $\quad |\vec{x}-\vec{x}'| \approx r - \vec{x}'\cdot\frac{\vec{x}}{r} + O(\frac{1}{r})$

$$\rightarrow \psi(\vec{x}) \underset{r\to\infty}{\sim} e^{ikx_3} + f(\vartheta)\frac{e^{ikr}}{r}$$

$$\text{mit } f(\vartheta) = -\frac{2m}{4\pi\hbar^2}\int d^3x'\, V(r')\, e^{-ik\vec{x}'\cdot\overbrace{\frac{\vec{x}}{r}}^{=\vec{e}_r}}\psi(\vec{x}') \qquad \boxtimes$$

Obige Integralgleichung kann durch Iteration (Neumannsche Reihe) approximativ gelöst werden, wenn der Integralkern ausreichend genug ("klein") ist! (eine Spezialdisziplin der Math.!)

"Bornsche Reihe"

$$\psi^{(n)}(\vec{x}) = -\frac{2m}{4\pi\hbar^2}\int d^3x'\,\frac{e^{ik|\vec{x}-\vec{x}'|}}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\,V(r')\,\psi^{(n-1)}(\vec{x}')$$

$$\text{mit} \quad \psi^{(0)}(\vec{x}) = e^{ikx_3}$$

"Bornsche Näherung": breche nach der ersten Stufe ab, setze in den Ausdruck $\boxtimes$ $\psi^{(0)}$ ein!

$$\Rightarrow f(\vartheta) = -\frac{2m}{4\pi\hbar^2}\int d^3x'\, V(r')\, e^{ik\vec{x}'\cdot(\vec{e}_3-\vec{e}_{\vec{x}})}$$

$$\vartheta = \sphericalangle(\vec{e}_3, \vec{e}_{\vec{x}})$$

(falls nicht zentralsym. Potential $\Rightarrow$ auch φ-Abh. $f(\vartheta,\varphi)$)

bis hierher allgemein!

Wähle $\vec{x}'$-Kugelkoord. um $(\vec{e}_3-\vec{e}_x)$-Richtung!

$$f(\vartheta) = -\frac{2m}{4\pi\hbar^2}\int_0^\infty dr'\, r'^2\, 2\pi\int_{-1}^{+1} d\cos\vartheta'\, e^{ikr'|\vec{e}_3-\vec{e}_{\vec{x}}|\cos\vartheta'}\, V(r')$$

$(\vartheta' \neq \vartheta!)$

$$f(\vartheta) = -\frac{m}{\hbar^2}\,\frac{g}{k\sin\vartheta/2}\int_0^\infty dr'\,\cancel{r'}\,\frac{e^{-\mu r'}}{\cancel{r'}}\,\underbrace{\sin\left(2kr'\sin\vartheta/2\right)}_{\frac{e^{2ikr'\sin\vartheta/2}-e^{-2ikr'\sin\vartheta/2}}{2i}}$$

$$\int_0^\infty dr'\,e^{-(\mu \mp 2ik\sin\vartheta/2)r'}$$

$$= +\frac{1}{(\mu \mp 2ik\sin\vartheta/2)}\cdots$$

$$f(\vartheta) = -\frac{m}{\hbar^2}\,\frac{g}{\cancel{k\sin\vartheta/2}}\,\frac{1}{2i}\underbrace{\left\{\frac{1}{\mu-2ik\sin\vartheta/2}-\frac{1}{\mu+2ik\sin\vartheta/2}\right\}}_{\frac{4i\cancel{k\sin\vartheta/2}}{\mu^2+4k^2\sin^2\vartheta/2}}$$

$$= -\frac{2mg}{\hbar^2}\,\frac{1}{4k^2\sin^2\vartheta/2+\mu^2}$$

(nach ϑ'-Integration)

$$\boxed{f(\vartheta) = -\frac{m}{\hbar^2}\,\frac{1}{k\sin\frac{\vartheta}{2}}\int_0^\infty dr'\,r'\,V(r')\,\sin\left(2kr'\sin\vartheta/2\right)}$$

da $|\vec{e}_3 - \vec{e}_{\hat{x}}|^2 = 2(1-\cos\vartheta)$
$= 4\sin^2\vartheta/2$

7.6 "Yukawa"-Potential $g\,e^{-\mu r}/r$ (für Kernkräfte ...)

$$f_{Yuk.}(\vartheta) = -\frac{2mg}{\hbar^2}\,\frac{1}{4k^2\sin^2\vartheta/2 + \mu^2}$$ (nach simpler exp-Integration)

Coulomb-Potential im Limes $\mu \to 0$, $g = Z_1 Z_2 e^2$
(ist aber langreichweitig, paßt also, genauer besehen, nicht in unsere Betrachtung) ($\rightsquigarrow$ kein S-Matrix-Theorie)

$$f_{Coul.}(\vartheta) = \pm\frac{Z_1 Z_2 e^2 m}{2\hbar^2 k^2}\,\frac{1}{\sin^2\vartheta/2}$$

$$\rightsquigarrow \quad \frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{4E}\right)^2 \frac{1}{\sin^4\vartheta/2}$$ "Rutherford Wqu."

kein Unterschied zu klassischer Formel
– das nennt man Glück!
– die Coulomb-Kräfte sind so "einfach"!?

Bem. $\frac{1}{r}$ Potential ist langreichweitig, Wellen verhalten sich für große r nicht wirklich wie "freie" Wellen
($\rightsquigarrow$ Korrektur zu "Streuphasen", Exp. Bestätigung (Interferenzterme))