Universität Heidelberg WS 07/08

1. Übungsblatt zur Vorlesung Theoretische Physik III (Quantenmechanik)

Abgabe der Lösungen und Besprechung der Präsenzaufgabe:
in den Übungen der 2. Semesterwoche (26.10.07)

Präsenzaufgabe P1: Fouriertransformation (4 Punkte)

Wir definieren die Fouriertransformierte $F[f]$ einer (geeigneten) Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ durch

$$F[f](k) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, f(x)\, e^{-ikx}.$$

a) Zeigen Sie

$$\begin{aligned} F[\lambda f + g] &= \lambda F[f] + F[g] \qquad (\lambda \in \mathbb{C}); \\ F[f'](k) &= ikF[f](k); \\ f(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi}\, F[f](k)\, e^{ikx}; \\ \int_{-\infty}^{\infty} dx\, f(x)\overline{g}(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi}\, F[f](k)\overline{F[g]}(k). \end{aligned}$$

Hinweis: Verwenden Sie die folgende, äußerst nützliche Darstellung der δ-Funktion:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk\, e^{ik(x-y)} = 2\pi\, \delta(x-y). \qquad ☺$$

b) Berechnen Sie $F[f]$ für

$$f(x) = e^{-\alpha x^2 + \beta x} \quad (\operatorname{Re}\alpha > 0); \quad f(x) = \Theta(y-x)\Theta(y+x); \quad f(x) = \delta(x-y).$$

Hierbei ist $\Theta(x)$ die Heaviside-Stufenfunktion:

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

c) Leiten Sie Gleichung ☺ her, indem Sie zeigen, dass für alle (geeigneten) Testfunktionen g gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dk\, e^{ikx}\, g(x) = 2\pi\, g(0).$$

Anleitung für einen "Physikerbeweis": Nehmen Sie dann an, dass sich die Reihenfolgen sämtlicher Grenzübergänge und Integrationen vertauschen lassen. Benutzen Sie das Ergebnis aus Teil b) für das k-Integral in den Grenzen von $-K$ bis K, substituieren Sie dann $t = Kx$, und berechnen Sie schließlich für $K \to \infty$ das t-Integral mit Hilfe von

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt\, \frac{\sin t}{t} = \pi.$$

d) Verwenden Sie die Ergebnisse aus a) und b), um einen alternative Lösungsweg für Aufgabe H1 d) mittels Fouriertransformation zu finden.

   Anleitung: Schreiben Sie $\psi_0(x)$ als Integral über die Fouriermoden $F[\psi_0](q)$, und betrachten Sie deren Zeitentwicklung. Um das q-Integral auszuführen und mit dem Ergebnis aus der Hausaufgabe zu vergleichen, substituieren Sie am besten $\kappa \equiv q - k$.

Aufgabe H1: Gaußsches Wellenpaket (10 Punkte)

Betrachten Sie ein Gaußschen Wellenpaket in einer Dimension: Die Wellenfunktion zum Zeitpunkt $t = 0$ sei

$$\psi_0(x) = N \exp\left(-\frac{x^2}{b^2} + ikx\right)$$

mit positiven reellen Konstanten N, b, k.

a) Geben Sie die Wahrscheinlichkeitsdichte im Ortsraum an, und bestimmen Sie die Normierung N, so dass die Gesamtwahrscheinlichkeit 1 beträgt.

b) Berechnen Sie die Erwartungswerte $\langle X \rangle$, $\langle X^2 \rangle$, $\langle P \rangle$ und $\langle P^2 \rangle$. Hierbei sind P und X der Impuls- und Ortsoperator, dargestellt durch

$$P = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}, \qquad X = x.$$

c) Berechnen Sie $(\Delta P)^2 = \langle P^2 \rangle - \langle P \rangle^2$ und $(\Delta X)^2 = \langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2$. Zeigen Sie damit, dass für ein Gaußsches Wellenpaket die Unschärferelation $\Delta P \Delta X \geq \hbar/2$ saturiert ist.

d) Berechnen Sie die Wellenfunktion $\psi_t(x)$ zur Zeit t mit dem Hamiltonoperator $H = P^2/2m$.

   Hinweis: Machen Sie den Ansatz

$$\psi_t(x) = N(t) \exp\left(-\frac{(x - a(t))^2}{b(t)^2} + ikx\right)$$

   mit (i.A. komplexen) Funktionen $a(t), b(t), N(t)$, die Sie aus der Schrödingergleichung bestimmen können.

e) Zeigen Sie, dass sich für die Wahrscheinlichkeitsdichte zur Zeit t wieder eine Gaußverteilung ergibt. Wie verhält sich deren Breite für $t \to \infty$? Was bedeutet dies physikalisch für ein zum Zeitpunkt $t = 0$ scharf lokalisiertes Teilchen (d.h. ein Wellenpaket mit kleinem b)? Kommentieren Sie im Hinblick auf die Dispersionsrelation für die Welle, die Sie aus Teil b) erhalten.