2. Übungsblatt zur Vorlesung Theoretische Physik III (Quantenmechanik)

Abgabe der Lösungen und Besprechung der Präsenzaufgabe:
in den Übungen der 3. Semesterwoche (2.11.07)

Präsenzaufgabe P2: Hamilton-Jacobi-Gleichung (3 Punkte)

Gegeben sei ein klassisches mechanisches System mit N Freiheitsgraden. Die verallgemeinerten Koordinaten seien $\mathbf{q} = (q_1, \ldots, q_N)$ und die kanonischen Impulse $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_N)$. Die Hamiltonfunktion sei $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$. Eine *kanonische Transformation* ist eine Abbildung $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \rightarrow (\mathbf{Q}, \mathbf{P})$ auf ein neues System von verallgemeinerten Koordinaten und Impulsen, die das Hamiltonschen Prinzip mit der transformierten Hamiltonfunktion $K(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t)$ erfüllen:

$$0 = \delta \int dt\ (\mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{q}} - H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)) = \delta \int dt\ \left(\mathbf{P} \cdot \dot{\mathbf{Q}} - K(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t)\right).$$

a) Zeigen Sie: Eine Funktion $F(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t)$ (eine *erzeugende Funktion*) definiert eine kanonische Transformation durch die Relationen

$$\mathbf{p} = \frac{\partial F}{\partial \mathbf{q}}, \qquad \mathbf{Q} = \frac{\partial F}{\partial \mathbf{P}}, \qquad K = H + \frac{\partial F}{\partial t}.$$

Sei also $S(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t)$ eine Lösung der Differenzialgleichung

$$H\left(\mathbf{q}, \frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}}, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \qquad \text{(Hamilton-Jacobi-Gleichung)},$$

dann ist die mit S als erzeugender Funktion erhaltene Hamiltonfunktion K identisch null und die Bewegungsgleichungen sind damit trivial ($\mathbf{P}$ und $\mathbf{Q}$ sind konstant).

b) Zeigen Sie: Es gilt mit der Lagrangefunktion L

$$\frac{dS\left(\mathbf{q}(t), \mathbf{P}, t\right)}{dt} = L\left(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), t\right).$$

Damit ist, wie in der Vorlesung gezeigt, S bis auf eine Konstante gleich der Wirkung:

$$S\left(\mathbf{q}(t), \mathbf{P}, t\right) = \int^t dt'\ L\left(\mathbf{q}(t'), \dot{\mathbf{q}}(t'), t'\right).$$

c) Betrachten Sie eine Lösung $\psi(\mathbf{x}, t)$ der zeitabhängigen Schrödingergleichung zu beliebigem Potenzial in drei Dimensionen. Wir definieren die reellen Funktionen $S(\mathbf{x}, t)$ und $A(\mathbf{x}, t)$ durch

$$\psi(\mathbf{x}, t) = A(\mathbf{x}, t) \, \exp\left(\frac{i}{\hbar} S(\mathbf{x}, t)\right).$$

Zeigen Sie: Auf Gebieten, auf denen A nicht verschwindet, erfüllt S die Hamilton-Jacobi-Gleichung für die entsprechende klassische Hamiltonfunktion bis auf Terme der Ordnung $\hbar^2$ (vgl. Eikonalnäherung aus der Vorlesung).

Aufgabe H2: Tunneleffekt (8 Punkte)

Gegeben sei das eindimensionale Potenzial

$$V(x) = \begin{cases} V_0, & 0 \leq x \leq a \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

mit $V_0 > 0$. Betrachten Sie nun eine von links (negative x) einfallende ebene Welle mit Energie $E < V_0$. Bestimmen Sie die Wellenfunktion in den drei Bereichen (I) $x < 0$, (II) $0 \leq x \leq a$ und (III) $x > a$ unter Berücksichtigung der Grenzbedingungen, wie in der Vorlesung für die Potenzialstufe vorgeführt. Wie groß ist die Tunnelwahrscheinlichkeit? Was ergibt sich im klassischen Grenzfall $\hbar \to 0$?

Aufgabe H3: Kastenpotenzial (6 Punkte)

Gegeben sei das eindimensionale Potenzial

$$V(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq a \\ \infty, & \text{sonst} \end{cases}$$

Finden Sie alle (korrekt normierten) Lösungen der Schrödingergleichung. Überlegen Sie sich dafür zunächst, welche Randbedingungen die Wellenfunktion bei $x = 0$ und $x = a$ erfüllen muss. Welche Energien sind möglich?