6. Übungsblatt zur Vorlesung Theoretische Physik III (Quantenmechanik)

Abgabe der Lösungen und Besprechung der Präsenzaufgabe:
in den Übungen der 7. Semesterwoche (30.11.07)

Präsenzaufgabe P6: Lineare Algebra (3 Punkte)

Sei $V \cong \mathbb{C}^n$ ein komplexer Vektorraum und sei $\langle \cdot | \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt, d.h. für $f, g, h \in V$ und $\alpha \in \mathbb{C}$ gilt

$$\langle f | g \rangle = \langle g | f \rangle^* \tag{1}$$

$$\langle f | \alpha g + h \rangle = \alpha \langle f | g \rangle + \langle f | h \rangle \tag{2}$$

$$\langle f | f \rangle \geq 0 \text{ und } \langle f | f \rangle = 0 \text{ nur wenn } f = 0. \tag{3}$$

Im Folgenden benutzen wir die Diracsche Bra-Ket-Schreibweise, d.h. wir schreiben $| f \rangle$ statt f, $\langle f |$ statt $f^\dagger$ und $| f \rangle \langle g |$ statt $f \otimes g^\dagger$. Sei $\{| e_1 \rangle, \ldots, | e_n \rangle\}$ eine Orthonormalbasis von V.

a) Was ist $\langle e_i | e_j \rangle$? Was sind die Matrixeinträge von $| e_i \rangle \langle e_j |$ und $\sum_{i=1}^n | e_i \rangle \langle e_i |$ in dieser Basis?

b) Zeigen Sie: Die Entwicklungskoeffizienten eines beliebigen Vektors $| x \rangle \in V$, $| x \rangle = \sum_{i=1}^n c_i | e_i \rangle$, sind gegeben durch $c_i = \langle e_i | x \rangle$. Es gilt $\langle x | x \rangle = \sum_{i=1}^n c_i^* c_i$.

c) Sei $A : V \to V$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie: Hat A bezüglich $\{| e_1 \rangle, \ldots, | e_n \rangle\}$ die Matrix (a_{ij}), so hat die hermitesch adjungierte Abbildung $A^\dagger$ die Matrixelemente $(A^\dagger)_{ij} = a_{ji}^*$.

d) Sei $| e_i' \rangle = U | e_i \rangle$ mit einer unitären Abbildung U. Zeigen Sie, dass auch $\{| e_1' \rangle, \ldots, | e_n' \rangle\}$ eine Orthonormalbasis ist, und stellen Sie U durch die $| e_i' \rangle$ und die $\langle e_i |$ dar.

e) Sei $A = A^\dagger$ selbstadjungiert. Zeigen Sie: $\exp(iA)$ ist unitär. (Die Exponentialfunktion für Matrizen ist hierbei durch ihre Potenzreihe definiert.)

Aufgabe H10: Drehimpuls und Unschärferelation (4 Punkte)

Betrachten Sie nochmals den Drehimpulsoperator $\mathbf{L} = \mathbf{X} \times \mathbf{P}$.

a) Zeigen Sie, dass $[L_i, L_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} L_k$.

b) Geben Sie die Unschärferelation für gleichzeitige Messungen von L_1 und L_2 an. Wie groß ist die minimale Unschärfe für gebundene Zustände ψ_{nlm} im Wasserstoffatom?

Aufgabe H11: Zweikörperproblem (6 Punkte)

Betrachten Sie nochmals das Wasserstoffatom, diesmal, indem Sie die Bewegung des Protons mit berücksichtigen. Seien $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2$ und $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2$ die Orts- und und Impulsoperatoren für das Proton und das Elektron, und m_1 bzw. m_2 die Elektronen- bzw. Protonenmasse. Der Hilbertraum des Systems ist das Produkt der beiden Einteilchen-Hilberträume, $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$. Wir können $\mathbf{X}_1$ als Operator auf $\mathcal{H}$ auffassen, indem wir $\mathbf{X}_1$ mit $\mathbf{X}_1 \otimes \mathbb{1}$ identifizieren, und entsprechend für die anderen Operatoren.

a) Geben Sie den Hamiltonoperator an.

b) Bestimmen Sie die Ortsoperatoren $\mathbf{X}_s$ und $\mathbf{X}_r$ für die Schwerpunkts- und Relativkoordinate. Berechnen Sie die zugehörigen Impulsoperatoren $\mathbf{P}_s$ und $\mathbf{P}_r$.

c) Drücken Sie den Hamiltonoperator durch die neuen Orts- und Impulsoperatoren aus. Bestimmen Sie die allgemeine Form einer Lösung der Schrödingergleichung in dieser Basis, und geben Sie die zugehörige Energie an.

   Hinweis: Verwenden Sie die bekannten Lösungen für das Coulombproblem und das freie Teilchen.

Aufgabe H12: Delta-Funktions-Potenzial (6 Punkte)

Betrachten Sie ein Teilchen in einer Dimension im Potenzial

$$V(x) = -\frac{D\,\hbar^2}{m}\,\delta(x) \qquad (D > 0).$$

Dieses Potenzial hat einen gebundenen Zustand (mit negativer Energie). Finden Sie dessen normierte Wellenfunktion im Ortsraum und seinen Energieeigenwert.

Hinweise: Die Wellenfunktion sollte bei $x = 0$ stetig sein. Die Energie können Sie bestimmen, indem Sie die Schrödingergleichung von $-\epsilon$ bis ϵ integrieren und dann $\epsilon \to 0$ betrachten.