11. Übungsblatt zur Vorlesung Theoretische Physik III (Quantenmechanik)

Abgabe der Lösungen und Besprechung der Präsenzaufgabe:
in den Übungen der 12. Semesterwoche (18.01.08)

Aufgabe H22: Kronig-Penney-Modell (5 Punkte)

Gegeben sei ein eindimensionales periodisches Potenzial mit Periode l, also $V(x) = V(x+l)$.

a) Beweisen Sie das *Blochsche Theorem*: Es existiert eine Basis aus Energieeigenzuständen, deren Wellenfunktionen die Form $\psi_\kappa(x) = e^{-i\kappa x} u_\kappa(x)$ mit periodischen Funktionen $u_\kappa(x) = u_\kappa(x+l)$ annehmen.

   Hinweis: Der Satz von der simultanen Diagonalisierbarkeit kommutierender Operatoren gilt nicht nur für hermitesche Operatoren. Wenden Sie ihn hier auf den unitären Translationsoperator $T(l)$ (siehe Aufgabe H16) und den Hamiltonoperator an.

Betrachten Sie nun ein Teilchen mit Energie E im Bereich $0 < E < V_0$ in folgendem Potenzial der Periode $l = a + b$:

$$V(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq a \\ V_0, & a < x < a+b \end{cases}$$

(periodisch fortgesetzt für alle $x \in \mathbb{R}$). Dies ist ein einfaches eindimensionales Modell für ein Elektron in einem Festkörper: Im Abstand $a + b$ befinden sich die positiv geladenen Ionen des Kristallgitters, getrennt durch Potenzialwälle der Höhe V_0 und der Breite b. Das Energiespektrum weist nun eine Bandstruktur auf, in der gewisse Energiebereiche erlaubt und andere verboten sind.

b) Zeigen Sie: Für die Energie gilt die Bedingung

$$-1 \leq \cos(ka)\cosh(qb) + \frac{q^2 - k^2}{2qk}\sin(ka)\sinh(qb) \leq 1,$$

   wobei

$$k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}, \qquad q = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar}.$$

c) Betrachten Sie den Grenzfall

$$b \to 0, \qquad V_0 \to \infty, \qquad V_0 b = \text{const.}$$

   und Energien $E \ll V_0$. Zeigen Sie

$$-1 \leq \cos(ka) + \gamma\frac{\sin(ka)}{ka} \leq 1,$$

   wobei $\gamma = mabV_0/\hbar^2$. Bestimmen Sie die erlaubten Bereiche für ka graphisch für $-4\pi \leq ka \leq 4\pi$ und $\gamma = 5$.

Aufgabe H23: Dreidimensionaler harmonischer Oszillator (5 Punkte)

Das Potenzial des dreidimensionalen harmonischen Oszillators ist

$$V = \frac{m\omega^2}{2} r^2, \qquad \text{mit } r = |\mathbf{x}|.$$

a) Die zugehörige Schrödingergleichung separiert in kartesischen Koordinaten. Geben Sie die möglichen Energieeigenwerte an, und bestimmen Sie den Entartungsgrad des n-ten Energieeigenzustandes.

b) Da es sich um ein Zentralpotenzial handelt, separiert die Schrödingergleichung auch in Kugelkoordinaten, wobei als Lösungen des Winkelanteils bereits die Kugelflächenfunktionen $Y_l^m(\theta, \phi)$ bekannt sind:

$$\psi(r, \theta, \phi) = R(r)\, Y_l^m(\theta, \phi).$$

Es bleibt die Bestimmung des Radialteils $R(r)$. Stellen Sie die Radialgleichung auf, und diskutieren Sie die Grenzfälle $r \to 0$ und $r \to \infty$ mit dem Ansatz

$$u(r) = r\, R(r) = r^\delta\, e^{-\gamma r^2}\, g(r)$$

(hierbei sei $g(0) \neq 0$ und $|g(r)|$ nicht zu schnell anwachsend oder abfallend für $r \to \infty$). Bestimmen Sie δ und γ.

c) Stellen Sie eine Bestimmungsgleichung für $g(r)$ auf.

d) Begründen Sie, dass mit dem Ansatz

$$g(r) = \sum_n a_n r^n$$

die Potenzreihe bei einem endlichen n abbrechen muss. Bestimmen Sie damit das Energiespektrum und die jeweilige Entartung, und vergleichen Sie mit a).

Aufgabe H24: Landau-Niveaus (5 Punkte)

Betrachten Sie ein Elektron (dessen Spin zu vernachlässigen ist) in einem konstanten Magnetfeld in z-Richtung, $\mathbf{B} = (0, 0, B)$.

a) Zeigen Sie, dass das Vektorpotenzial gewählt werden kann als $\mathbf{A} = (0, Bx, 0)$.

b) Zeigen Sie, dass der Hamiltonoperator

$$H = \frac{1}{2m} \left(\mathbf{P} + \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2$$

sowohl mit der y- als auch mit der z-Komponente des Impulsoperators kommutiert. Die Eigenzustände von H können daher mit dem Separationsansatz $\psi(x, y, z) = f(x) g(y) h(z)$ bestimmt werden. Geben Sie g und h an. Wir wollen $h(z)$ so wählen, dass der Eigenwert zu P_z gerade 0 ist.

c) Leiten Sie eine Eigenwertgleichung für $f(x)$ her, und führen Sie diese auf die Eigenwertgleichung des harmonischen Oszillators zurück.

d) Lesen Sie das Energiespektrum ab. Die aus der Gleichung für f resultierenden Energieniveaus heißen *Landau-Niveaus*.