12. Übungsblatt zur Vorlesung Theoretische Physik III (Quantenmechanik)

Abgabe der Lösungen und Besprechung der Präsenzaufgabe:
in den Übungen der 13. Semesterwoche (25.01.08)

Aufgabe H25: Aharanov-Bohm-Effekt (5 Punkte)

Elektronen aus einer Quelle bei $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ treffen auf eine Wand mit einem Doppelspalt, hinter der ein Schirm aufgestellt ist. Zwischen den beiden Spalten ist entlang der x_3-Achse eine unendlich lange Spule parallel zu den Spalten angebracht, die ein auf das Innere des Spule beschränktes Magnetfeld erzeugt. Der Radius der Spule sei R; sie sei sei derart abgeschirmt, dass die Elektronen nicht in das Magnetfeld eindringen können.

a) Sei $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ und $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$. Zeigen Sie, dass das Vektorpotenzial $\mathbf{A}$, gegeben durch $\mathbf{A}_>$ für $r > R$ und durch $\mathbf{A}_<$ für $r < R$ mit

$$\mathbf{A}_>(\mathbf{x}) = -\frac{B}{2}\frac{R^2}{r^2}\mathbf{x} \times \mathbf{e}_3,$$
$$\mathbf{A}_<(\mathbf{x}) = -\frac{B}{2}\mathbf{x} \times \mathbf{e}_3,$$

das Magnetfeld für diese Versuchsanordnung beschreibt.

b) Berechnen Sie

$$\Phi_C = \int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}$$

für einen Kreisweg C in der (x_1, x_2)-Ebene. Der Kreismittelpunkt sei $(0, 0)$ und der Radius r_0.

Man kann zeigen, dass Φ_C für beliebige geschlossene Kurven C ausserhalb der Spule nur von der Umlaufzahl der Kurve um die x_3-Achse abhängt.

c) Zeigen Sie, dass in einfach zusammenhängendes Gebieten

$$\psi_B(\mathbf{x}) = \exp\left(-\frac{ie}{\hbar c}\int_{\mathbf{x}_0}^{\mathbf{x}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}\right)\psi_0(\mathbf{x})$$

eine Lösung der Schrödingergleichung mit Magnetfeld ist, wenn $\psi_0(\mathbf{x})$ eine Lösung der Schrödingergleichung ohne Feld ist.

d) Schlussfolgern Sie, dass sich das Interferenzmuster auf dem Schirm ändert, wenn das Magnetfeld in der Spule ein- und ausgeschaltet wird.

Aufgabe H26: Addition von Drehimpulsen (5 Punkte)

Betrachten Sie die Kopplung eines Spin-1-Teilchens mit einem Spin-1/2-Teilchen. Es seien $\mathbf{\Sigma}$ und $\mathbf{S}$ die jeweiligen Spinoperatoren; die zugehörigen normierten Eigenzustände seien $\{|\pm1\rangle\,, |0\rangle\}$ bzw. $\left\{\left|\pm\frac{1}{2}\right\rangle\right\}$. Bestimmen Sie die (korrekt normierten) gemeinsamen Eigenzustände von $\mathbf{J}^2$ und J_3 sowie die zugehörigen Eigenwerte. Hierbei ist

$$\mathbf{J} = \mathbf{S} + \mathbf{\Sigma} \equiv \mathbf{S} \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes \mathbf{\Sigma}$$

der Gesamtdrehimpuls.
Anleitung: Bestimmen Sie zunächst, wie in der Vorlesung vorgeführt, den Zustand mit größtmöglichem J_3-Eigenwert. Konstruieren Sie daraus dann die restlichen J_3-Eigenzustände mit gleichem $\mathbf{J}^2$ mit Hilfe des Absteigeoperators $\mathbf{J}_-$. Eigenzustände mit anderem $\mathbf{J}^2$-Eigenwert erhalten Sie aus der Orthogonalitätsbedingung.

Aufgabe H27: Gestörter harmonischer Oszillator (4 Punkte)

Ein geladenes Teilchen im Oszillatorpotenzial in einer Dimension wird zusätzlich einem homogenen elektrischen Feld ausgesetzt. Das Potenzial ist

$$V = \frac{m\omega^2}{2}x^2 - eEx.$$

a) Bestimmen Sie das Energiespektrum exakt.

b) Berechnen Sie das Energiespektrum störungstheoretisch zu führender nichtverschwindender Ordnung, indem Sie den eEx-Term als kleine Störung auffassen. Vergleichen Sie mit a).