

### 13. ÜBUNGSBLATT ZUR VORLESUNG THEORETISCHE PHYSIK III (QUANTENMECHANIK)

Abgabe der Lösungen und Besprechung der Präsenzaufgabe:  
in den Übungen der 14. Semesterwoche (01.02.08)

#### Präsenzaufgabe P11: Bornsche Näherung (2 Punkte für Mitarbeit)

- a) Berechnen Sie die Streuamplitude  $f(\theta, \phi)$  in erster Bornscher Näherung für Streuung am Potenzial

$$V(r, \theta, \phi) = -V_0 e^{-r/r_0}, \quad \text{wobei } V_0 > 0.$$

*Hinweis:*

$$\int_0^\infty dx x e^{-x} \sin qx = \frac{2q}{(1+q^2)^2}. \quad \text{☺}$$

- b) Wenn noch Zeit ist: Beweisen Sie Gleichung ☺.

#### Aufgabe H28: Stark-Effekt (7 Punkte)

Ein Wasserstoffatom im 1. angeregten Zustand, also  $n = 2$ , wird einem konstanten elektrischen Feld  $\mathbf{E} = (0, 0, E)$  ausgesetzt.

- a) Geben Sie das Potenzial an.
- b) Im Wasserstoffatom gibt es für  $n = 2$  einen Zustand mit  $l = 0$  (2s-Zustand) und drei Zustände mit  $l = 1$  (2p-Zustände). Ohne äußeres elektrisches Feld hätten diese Zustände gleiche Energie, das  $n = 2$ -Niveau wäre also 4-fach entartet. Fassen Sie das äußere elektrische Feld als Störung auf, und bestimmen Sie die Matrixelemente der Störung in diesem Entartungsraum.
- c) Diagonalisieren Sie die Störungsmatrix, um die Aufspaltung der Energieniveaus in 1. Ordnung Störungstheorie zu erhalten.

*Anleitung:* Zeigen Sie zunächst, dass für das Störpotenzial  $W$  gilt:  $[L_3, W] = 0$ . Folgern Sie, dass nur solche Matrixelemente  $\langle \psi_{nlm} | W | \psi_{n'l'm'} \rangle$  von 0 verschieden sein können, für die  $m = m'$  ist. Schreiben Sie dann die Störung in Kugelkoordinaten, und benutzen Sie die bekannten Wellenfunktionen  $\psi_{2lm}$ , um auch diese Matrixelemente zu berechnen.

### Aufgabe H29: Ritzsches Variationsverfahren und Heliumatom (7 Punkte)

Das Ritzsche Variationsverfahren ist ein Näherungsverfahren, das auch dann angewendet werden kann, wenn ein System nicht durch eine kleine Störung eines exakt löslichen Problems darstellbar ist. Besonders praktisch ist es oft zur Abschätzung von Grundzustandsenergien. Die Idee ist dabei, die Grundzustandswellenfunktion durch eine (von einem oder mehreren Parametern abhängige) Testfunktion anzunähern und die Energie dann bezüglich der Parameter zu minimieren.

- a) Sei  $H$  ein Hamiltonoperator mit Eigenwerten  $E_n$ , wobei  $E_0$  die Grundzustandsenergie bezeichnet. Sei  $|\phi^{(z)}\rangle$  eine Schar von normierten Zuständen, nicht notwendigerweise Eigenzuständen von  $H$ , die von einem Parameter  $z$  abhängt. Zeigen Sie:

$$E_0 \leq \langle \phi^{(z)} | H | \phi^{(z)} \rangle.$$

Betrachten Sie nun als Anwendung den Hamiltonoperator des Heliumatoms (wobei wir die Spins vernachlässigen):

$$H = \frac{\mathbf{P}_1^2}{2m} + \frac{\mathbf{P}_2^2}{2m} - \frac{2e^2}{|\mathbf{X}_1|} - \frac{2e^2}{|\mathbf{X}_2|} + \frac{e^2}{|\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2|}$$

Der letzte Term kommt durch die Coulombabstoßung der beiden Elektronen zustande. Machen Sie den Ansatz

$$|\phi^{(z)}\rangle = |\phi_1^{(z)}\rangle |\phi_2^{(z)}\rangle$$

mit den beiden 1-Teilchen-Wellenfunktionen

$$\phi_i^{(z)}(\mathbf{x}_i) = A(z) e^{-z|\mathbf{x}_i|/a} \quad (i = 1, 2).$$

Hierbei ist  $a = \hbar^2/mc^2$  der Bohrsche Radius.

- b) Bestimmen Sie die Normierung  $A(z)$ .
- c) Minimieren Sie das Matrixelement  $\langle \phi^{(z)} | H | \phi^{(z)} \rangle$  bezüglich  $z$ , um eine Abschätzung für die Grundzustandsenergie zu erhalten.  
(Ergebnis:  $E_0 = -\frac{729}{256} \frac{mc^4}{\hbar^2} = -77.5$  eV.)

*Anmerkung:* Der experimentelle Wert ist  $E_0 = -79.0$  eV. In 1. Ordnung Störungstheorie (wenn man die Wechselwirkung der Elektronen miteinander als Störung betrachtet) erhält man lediglich  $E_0 = -74.8$  eV.