1. Übungsblatt zur Elektrodynamik, Sommersemester '06

Prof. M. G. Schmidt, J. Braun

28. April 2006

Abgabe am **Freitag, den 05.05.2006** in der Vorlesung

1\. 1. **(Präsenzübung I: Satz von Stokes, 1+1 Punkte)**

(a) Berechnen Sie für das Vektorfeld

$$\vec{w}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} -x_2(x_1^2 + x_2^2) \\ x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ x_1 x_2 x_3 \end{pmatrix}$$

das Linienintegral

$$\oint_{\partial\mathcal{F}} d\vec{s} \cdot \vec{w}(\vec{x})$$

längs des in der $x_1 - x_2$-Ebene liegenden Kreises um den Koordinatenursprung mit dem Radius R.

(b) Verifizieren Sie den Satz von Stokes durch Berechnung des Berechnung des Flächenintegrals

$$\int_{\mathcal{F}} d\vec{f} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{w}(\vec{x}))\,.$$

Hier bezeichne $\mathcal{F}$ die Fläche, die von dem in der $x_1 - x_2$-Ebene liegenden Kreis eingeschlossen wird.

1\. 2. **(Präsenzübung II: Vektorrelationen, 1+1 Punkte)** Zeigen Sie für konstante Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ die folgenden Beziehungen:

(a) 'bac-cab-Regel': $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$

(b) $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c})$

(c) $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = 0$

Bitte beachten Sie, daß diese Aufgabe zur Übung von Komponenten- und Vektorschreibweise dient. Beweisen Sie die Teilaufgabe (a) ausschließlich mittels der der Komponentenschreibweise. Die Aufgaben (b) und (c) sollen sowohl mittels der Komponentenschreibweise als auch mittels der Vektorschreibweise gelöst werden. Es ist erlaubt, die Lösung der Teilaufgabe (a) zur Lösung der Teilaufgaben (b) und (c) zu verwenden. **Zur (indizierten) Komponentenschreibweise:** Man schreibe die Vektoren in ihren Komponenten a_i, b_i und c_i. Das Vektorprodukt kann dann mit Hilfe des vollständig antisymmetrischen Levi-Civita-Tensors ϵ_{ijk} in Komponenten geschrieben werden als $(\vec{a} \times \vec{b})_k = a_i b_j \epsilon_{ijk}$. Um die volle Punktzahl zu erhalten müssen für (b) und (c) beide Lösungen (Komponenten- und Vektorschreibweise) abgegeben werden.

1\. 3. **(Vektoranalysis, 4 Punkte)** Sei $f(\vec{x})$ ein stetig diff'bares Skalarfeld und $\vec{w}(\vec{x})$ ein stetig diff'bares Vektorfeld. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) **(1 Punkte)** $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} f(\vec{x}) = 0$

(b) **(1 Punkte)** $\vec{\nabla} \times (f(\vec{x})\vec{w}(\vec{x})) = f(\vec{x})\vec{\nabla} \times \vec{w}(\vec{x}) - \vec{w}(\vec{x}) \times \vec{\nabla} f(\vec{x})$

(c) **(1 Punkte)** $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{w}(\vec{x})) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{w}(\vec{x})) - \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}\vec{w}(\vec{x})$

(d) **(1 Punkte)** $\vec{\nabla} \times (\vec{a}\mathrm{e}^{i\vec{k}\vec{x}}) = -(\vec{a} \times \vec{k})\,\mathrm{e}^{i\vec{k}\vec{x}}$ (Die Vektoren $\vec{a}, \vec{k}$ seien unabhängig von x_i.)

Bitte beachten Sie, daß diese Aufgabe sowohl mittels der (indizierten) Komponentenschreibweise als auch mittels der Vektorschreibweise gelöst werden soll. Für den Nabla-Operator $\vec{\nabla}$ schreibe man $\frac{\partial}{\partial x_i} \equiv \partial_i$. Lösungen der Aufgabe 1.2. dürfen zur Bearbeitung der Aufgabe selbstverständlich verwendet werden.

1. 4. **(δ-Distribution, 8 Punkte)**

   (a) **(4 Punkte)** Zeigen Sie für die zwei angegebenen Folgen, daß sie für $\epsilon \to 0$ gegen die δ-Distribution $\delta(x)$ konvergieren:

$$\delta_\epsilon(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\epsilon}{x^2 + \epsilon^2} \, ; \quad \delta_\epsilon(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\epsilon}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4\epsilon}} \tag{1}$$

   (b) **(2 Punkte)** Für eine Funktion $g(x)$ mit **einfachen** Nullstellen x_n beweise man

$$\delta(g(x)) = \sum_n \frac{1}{|g'(x_n)|} \delta(x - x_n)$$

   (c) **(1 Punkt)** Was folgt aus (b) für $\delta(\lambda x)$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$?

   (d) **(1 Punkte)** Berechnen Sie speziell die folgenden Integrale:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \mathrm{e}^{-x^2} \delta(3x - 6) \quad \text{und} \quad \int_0^{+\infty} dx \mathrm{e}^{-\sqrt{x}} \delta(x^2 - 1)$$

1. 5. **(elektrischer Fluß/Gauss'scher Satz, 4 Punkte)** Berechnen Sie die elektrische Feldstärke $\vec{E}$ für die folgenden Ladungsveteilungen:

   (a) **(2 Punkte)** homogen geladener, unendlicher langer und 'unendlich dünner' Draht mit einer Ladung λ pro Längeneinheit

   (b) **(2 Punkte)** homogen geladener, unendlich langer Zylinder mit Radius R und Flächenladungsdichte ρ. Berechnen Sie in diesem Fall die Feldstärke innerhalb und ausserhalb des Zylinders.

   Hinweis: Betrachten Sie den Fluß von $\vec{E}$ und verwenden Sie den Gauss'schen Satz. Wählen Sie geeignete Koordinaten für die Lösung der Aufgabe.