10. Übungsblatt zur Elektrodynamik, Sommersemester '06

Prof. M. G. Schmidt, J. Braun

30. Juni 2006

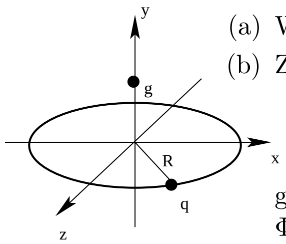
Abgabe am **Freitag, den 07.07.2006** in der Vorlesung

10. 1. **(Präsenzübung: Diracs Ladungsquantisierung und magnetischer Monopol, 1+1 Punkte)** Wenn wir die Existenz von magnetischen Monopolen zulassen, dann modifizieren sich die Maxwellgleichungen wie folgt:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \tfrac{1}{c}\tfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \tfrac{4\pi}{c}\vec{j}_e\,, \qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 4\pi\rho_m\,, \qquad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\tfrac{1}{c}\tfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \tfrac{4\pi}{c}\vec{j}_m\,, \qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho_e\,.$$

Hierbei bezeichnen $\rho_{e/m}$ und $\vec{j}_{e/m}$ die elektrischen/magnetischen Ladungs- und Stromdichten. Betrachten Sie nun folgendes Problem (siehe Skizze):

Ein magnetischer Monopol mit magnetischer Ladung g bewege sich auf der y-Achse 'auf einer Schiene' mit der Geschwindigkeit $\vec{v} = v\,\vec{e}_y$. In der x-z-Ebene befinde sich ein Ring mit Radius R. Darauf befindet sich eine elektrische Ladung q, die sich auf dem Ring frei bewegen kann.



(a) Wie lautet das Faraday'sche Induktionsgesetz, wenn magnetische Monopole existieren?

(b) Zeigen Sie, daß für den Gesamtimpuls auf die elektrische Punktladung q

$$P_\phi = \int_{-\infty}^{\infty} dt\; qE_\phi = -\frac{2\,qg}{Rc}$$

gilt. Machen Sie vom Faraday'schen Induktionsgesetz Gebrauch und nehmen Sie an, daß $\Phi_m(t \to -\infty) = \Phi_m(t \to \infty)$ gilt. (Φ_m bezeichne hierbei den magnetischen Fluß durch den Ring.)

(c) Was impliziert das Ergebnis aus Teilaufgabe 10.1.(b), wenn Sie annehmen daß der Gesamtdrehimpuls auf die elektrische Ladung quantisiert sei, d. h. $|\vec{L}| = n\hbar$.

10. 2. **(elektromagnetische Welle im Medium, 6 Punkte)** Betrachten Sie eine elektromagnetische Welle mit

$$\vec{E} = \vec{E}_0(\vec{r})\,\mathrm{e}^{-i\omega t} \quad \text{und} \quad \vec{B} = \vec{B}_0(\vec{r})\,\mathrm{e}^{-i\omega t}$$

in einem Medium bestehend aus freien Elektronen. Die Elektronendichte sei n_e.

(a) **(1.5 Punkte)** Berechnen Sie die Stromdichte, die im Medium durch das elektrische Feld erzeugt wird. Vernachlässigen Sie die Wechselwirkung zwischen den Elektronen und den Effekt des Magnetfeldes! Für welche Geschwindigkeiten v der Elektronen ist die Vernachlässigung des Einflusses des Magnetfeldes zulässig, wenn Sie annehmen, daß $|\vec{E}| \sim |\vec{B}|$?

(b) **(3.5 Punkte)** Geben Sie die Differentialgleichung für die Ortsabhängigkeit der elektromagnetischen Welle mit Frequenz ω in solch einem Medium an. Gehen Sie dazu von den Maxwell-Gleichungen aus. Geben Sie die Differentialgleichung sowohl für das elektrische als auch das magnetische Feld an! (**Hinweis:** Nehmen Sie zur Vereinfachung an, daß die I. Maxwellgleichung homogen ist, d. h. $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$. Berücksichtigen Sie aber die in Teilaufgabe (a) berechnete Stromdichte in den Maxwellgleichungen.)

(c) **(1 Punkte)** Leiten Sie aus der Lösung von Teilaufgabe (b) die notwendige und hinreichende Bedingung an die Elektronendichte ab, die erfüllt sein muß, damit sich die elektromagnetische Welle im Medium unbegrenzt ausbreiten kann.

10. 3. **(Kugelwellen, 6 Punkte)**

(a) **(2 Punkte)** Zeigen Sie, daß jede Funktion der Form

$$F(\vec{r}, t) = f(\vec{e}\vec{r} - ct)$$

mit einer beliebigen (zweimal diff'baren) Funktion f und einem Einheitsvektor $\vec{e}$ die homogene Wellengleichung erfüllt.

(b) **(2 Punkte)** Prüfen Sie nach, daß die Funktion $\mathrm{e}^{i(kr\pm\omega t)}/r$ eine Lösung der homogenen Wellengleichung ist. Wie ist das physikalisch zu interpretieren? (Es sei $k = |\vec{k}|$ und $r = \vec{r}$.)

(c) **(2 Punkte)** Machen Sie analog zu Teilaufgabe (b) entsprechende Ansätze für die Potentiale $\vec{A}$ und ϕ. Geben Sie Lösungen für $\vec{A}$ und ϕ in der Lorenz-Eichung an!

Bitte wenden!

10. 4. **(beschleunigte Ladungen, 6 Punkte)**

(a) **(2.5 Punkte)** Berechnen Sie den Poynting-Vektor des Strahlungsfeldes einer beschleunigten Ladung e mit Hilfe der in der Vorlesung abgeleiteten Ausdrücke für das elektrische und magnetische Strahlungsfeld (nicht-relativistische Näherung):

$$\vec{E}_{\mathrm{str.}} = \frac{e}{c^2 R^3}\left[\left(\vec{R}\dot{\vec{v}}\right)\vec{R} - R^2\dot{\vec{v}}\right] \qquad \text{und} \qquad \vec{B}_{\mathrm{str.}} = \frac{e}{c^2 R^2}\left[\dot{\vec{v}} \times \vec{R}\right] .$$

Nehmen Sie $\dot{\vec{v}} \parallel \vec{e}_z$ an!

(b) **(1 Punkt)** Berechnen Sie ausgehend vom Ergebnis aus Teilaufgabe (a), die abgestrahlte Leistung!

(c) **(1 Punkt)** Was ergibt sich für die abgestrahlte Leistung, wenn $\dot{\vec{v}}$ für ein Teilchen mit Masse m und Ladung e durch (die Lorentzkraft)

$$\dot{\vec{v}} = \frac{e}{m\,c}\vec{v} \times \vec{B}_{\mathrm{ext.}} \quad \text{mit} \quad \vec{v} \perp \vec{B}_{\mathrm{ext.}}$$

gegeben ist. Hierbei sei $\vec{B}_{ext}$ ein externes Magnetfeld, in dem sich das Teilchen bewege.

(d) **(1.5 Punkte)** Berechnen Sie klassisch die Energieabstrahlung eines Elektrons, das in einem Wasserstoffatom auf der ersten Bohr'schen Bahn um den Kern kreist. Nehmen Sie dabei an, daß sich das Elektron mit konstanter Winkelgeschwindigkeit bewegt!