

2. Übungsblatt zur Elektrodynamik, Sommersemester '06

Prof. M. G. Schmidt, J. Braun

5. Mai 2006

Abgabe am Freitag, den 12.05.2006 in der Vorlesung

2. 1. (**Präsenzübung: Divergenz & krummlinige Koordinaten, 1+1 Punkte**) Welche Form hat die Divergenz eines Vektorfeldes $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$ in beliebigen krummlinigen, lokal orthogonalen Koordinaten (q_1, q_2, q_3) ? Leiten Sie das Ergebnis aus der Definition der Divergenz als Grenzwert des Integrals über den Fluss durch die Oberfläche eines kleinen Volumen aus ab:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \oint_{\partial \Delta V} \vec{A} \cdot d\vec{S}.$$

(Grundlagen zu krummlinigen Koordinaten finden Sie z. B. im Vorlesungsskript von Prof. M. G. Schmidt, http://www.thphys.uni-heidelberg.de/~schmidt/MathMeth__Sommer05/Skript.pdf)

2. 2. (**Rotation & krummlinige Koordinaten, 6 Punkte**) In den Präsenzübung haben Sie gelernt, wie man die Form der Divergenz in beliebigen krummlinigen, lokal orthogonalen Koordinaten berechnet. Leiten Sie nun die Form der Rotation $\vec{\nabla} \times \vec{A}$ aus der Definition

$$\vec{n} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta F} \oint_{\partial \Delta F} \vec{A} \cdot d\vec{r}$$

ab.

Anmerkung(en): Der Vektor \vec{n} sei normiert und stehe senkrecht auf dem Flächenelement ΔF . Das Wegelement in allgemeinen lokal orthogonalen Koordinaten ist

$$d\vec{r} = \sum_{k=1,2,3} h_k \vec{e}_k dq_k$$

wobei die Richtung der Einheitsvektoren durch die Ableitungen $\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_k}$ vorgegeben ist.

2. 3. (**Ladungsverteilung, 2 Punkte**) Bestimmen Sie die Ladungsverteilung, die durch das Potential

$$\phi(\vec{r} = (x, y, z)) = -\lambda \ln(x^2 + y^2)$$

bestimmt wird. (λ sei konstant)

2. 4. (**Atommodell, 4 Punkte**) Gegeben sei das Potential (q sei die Ladung, α sei eine Konstante, die mit dem (inversen) Bohr'schen Radius verknüpft ist und es sei $r = |\vec{r}|$)

$$\phi(\vec{r}) = \frac{q}{r} \left(1 + \frac{\alpha r}{2}\right) e^{-\alpha r}.$$

Man bestimme die Ladungsverteilung $\rho(\vec{r})$. Welche Gesamtladung ist im Raum vorhanden?

2. 5. (**Elektrisches Feld, 6 Punkte**)

- (a) (**3 Punkte**) In der Vorlesung haben Sie gelernt, daß das **statische** elektrische Feld rotationsfrei ist, also $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$. Benutzen Sie diese Eigenschaft des Feldes, um zu zeigen, daß an einer geladenen Oberfläche mit Flächenladungsdichte σ für die tangentielle Komponente des elektrischen innerhalb und außerhalb

$$E_{\text{innen}}^{\parallel} = E_{\text{außen}}^{\parallel}$$

gilt.

- (b) (**3 Punkte**) Zeigen Sie nun unter Verwendung von $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\sigma$, daß für die Normalkomponenten des (statischen) elektrischen Feldes an der geladenen Oberfläche folgender Zusammenhang gilt:

$$E_{\text{außen}}^{\perp} - E_{\text{innen}}^{\perp} = 4\pi\sigma.$$



CHARLES
AUGUSTIN
DE COULOMB

Aus SZABO:

Die Geschichte der
mechanischen Prinzipien.

Charles Augustin de Coulomb wurde am 14. Juni 1736 im südfranzösischen Angoulême in einer wohlhabenden Familie geboren. Nach dem Studium der Mathematik und der Naturwissenschaften in Paris wählte er den Militärberuf. Als Offizier des technischen Dienstes leitete er die Festungsbauarbeiten auf der Insel Martinique, wo er neun Jahre verbrachte.

Bereits während seines Aufenthaltes auf Martinique beschäftigte er sich nebenbei mit wissenschaftlichen Arbeiten auf dem Gebiet der technischen Mechanik, hauptsächlich mit einigen Problemen der Statik. Im Jahre 1776 kehrte er nach Frankreich zurück. Hier beteiligte er sich an einem Wettbewerb, den die Französische Akademie der Wissenschaften mit dem Ziel der Vervollkommnung von Navigationseinrichtungen ausgeschrieben hatte. Coulomb löste das gestellte Problem erfolgreich, studierte außerdem den Magnetismus ausführlicher, insbesondere die Abhängigkeit der Eigenschaften der Magneten von der Temperatur.

Für seine erfolgreiche Neukonstruktion des Kompasses und andere Arbeiten wurde er 1782 zum Mitglied der Akademie ernannt. Obwohl er auch weiterhin im Militärdienst verblieb, hatte er so doch größere Möglichkeiten zum Experimentieren und wurde in der wissenschaftlichen Welt bekannt.

Im Jahre 1784 veröffentlichte Coulomb eine Arbeit über die Abhängigkeit des Torsionsmoments eines Drahtes von dessen Durchmesser, Länge und Torsionswinkel sowie von einer konstanten Größe, die von den physikalischen Eigenschaften des Drahtmaterials abhängig ist.

Gleichzeitig beschrieb er auch ein Verfahren zur Messung kleiner Kräfte mit Hilfe der sog. Drehwaage, die später „Coulombsche Waage“ genannt wurde.

In den Jahren 1785 bis 1789 veröffentlichte er sieben grundlegende Arbeiten auf dem Gebiet der Elektrizität und des Magnetismus. Die Drehwaage verwendete Coulomb auch für die Messung der Kraft, mit der zwei elektrische Punktladungen aufeinander einwirken. Wie er ermittelte, ist diese

Kraft dem Produkt der Ladungen direkt proportional und dem Quadrat ihrer Abstände umgekehrt proportional. Diese erste quantitative Beziehung in der Elektrizitätslehre überprüfte Coulomb auch nach einem anderen Verfahren.

Coulomb entdeckte weiterhin, daß sich die elektrische Ladung in den Körpern nicht entsprechend ihrer chemischen Zusammensetzung aufteilt, sondern bei einer wechselseitigen Berührung infolge der elektrischen Abstoßungskräfte von einem auf den anderen Körper übergeht. Ebenso klärte er auf, daß die elektrische Feldstärke in einem Punkt in der Nähe der Oberfläche eines geladenen Leiters der Flächenladungsdichte auf dem Leiter proportional ist.

Neben seiner wissenschaftlichen Tätigkeit bekleidete Coulomb auch öffentliche Ämter: Er nahm eine bedeutende Stelle im Ministerium für Unterrichtswesen ein und hatte die Funktion des Generalinspektors für Gewässer und Quellen. Später jedoch fiel er bei den höheren Regierungsstellen in Ungnade und gab die öffentliche Tätigkeit auf. Als im Jahre 1789 die Französische Revolution ausbrach, zog er sich auf sein Gut bei Blois zurück, wo er sich ganz der wissenschaftlichen Arbeit widmete. Im gleichen Jahr erschien sein bedeutendstes Werk, in dem er die Vorstellung von der Existenz zweier Elektrizitätsarten auch auf den Magnetismus ausdehnte und ein Gesetz formulierte, nach dem die Wirkung zwischen den Magnetenpolen der Wirkung zwischen zwei elektrischen Punktladungen analog ist.

Coulomb hat mit seinen wissenschaftlichen Arbeiten in die Fachgebiete Elektrizität und Magnetismus exakte quantitative Methoden eingeführt und die Prinzipien der Newtonschen Mechanik auch auf die Elektrizität und den Magnetismus angewendet. Seine Drehwaage wurde in den empfindlichsten elektrischen Meßgeräten, aber auch in anderen Gebieten der Physik erfolgreich eingesetzt. Nach dem Machtantritt Napoleons erhielt Coulomb seine Ämter wieder zurück, die er bis an sein Lebensende bekleidete. Er starb am 23. August 1806 in Paris.

Aus BRECH: Guten Tag, Herr Ampère!