4. Übungsblatt zur Elektrodynamik, Sommersemester ’06

Prof. M. G. Schmidt, J. Braun

19. Mai 2006

Abgabe am **Freitag, den 26.05.2006** in der Vorlesung

4. 1. **(Präsenzübung: Poissongleichung, Photonenmasse und Funktionentheorie, 1+1 Punkte)** In der Vorlesung haben Sie die Poissongleichung kennengelernt. Im Folgenden sollen Sie eine modifizierte Version davon untersuchen:

$$\left(\Delta - m^2\right)\phi(\vec{x}) = -4\pi\delta(\vec{x})\,,$$

wobei $m \in \mathbb{R}$.

(a) Zeigen Sie, daß

$$\phi(\vec{x}) = 4\pi \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{\mathrm{e}^{i\vec{p}\cdot\vec{x}}}{p^2+m^2}$$

die oben angegebene modifizierte Poissongleichung löst. Beachten Sie, daß $p^2 = \vec{p}\cdot\vec{p}$ ist. Nutzen Sie aus, daß die δ-Distribution im Fourier-Raum folgende Darstellung besitzt:

$$\delta(\vec{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\mathrm{e}^{i\vec{p}\cdot\vec{x}}$$

(b) Berechnen Sie das Integral für $\phi(\vec{x})$ mit Hilfe des Residuensatzes! Interpretieren Sie das Ergebnis: Was erhält man für $m \to 0$? Welche Auswirkungen hätte es, wenn die Photonen tatsächlich eine Masse m besitzen würden?
Anleitung: Um das Integral zu berechnen, gehen Sie am besten zu Kugelkoordinaten über: Legen Sie die z-Achse des Koordinatensystems in Richtung des Vektors $\vec{x}$ und führen Sie dann die Winkelintegrationen durch. Den Residuensatz benötigen Sie erst, wenn Sie die Integration in radialer Richtung durchführen. Der Residuensatz lautet

$$\oint dz f(z) = 2\pi i \sum_i \mathrm{Res}_{z=z_i} f(z) \qquad \text{mit} \qquad \mathrm{Res}_{z=a} f(z) = \lim_{z\to a}(z-a)f(z)$$

wobei über einen geschlossenen Weg in der komplexen Ebene integriert wird. Der angegebene Ausdruck zur Berechnung des Residuums gilt nur, wenn $f(z)$ bei $z = a$ einen Pol erster Ordnung hat.

4. 2. **(Multipolentwicklung, 5 Punkte)** Gegeben sei die Ladungsdichteverteilung

$$\rho(\vec{r}) = \frac{q}{64\pi a_B^3}\left(\frac{r}{a_B}\right)^2 \sin^2(\theta)\,\mathrm{e}^{-r/a_B}\,.$$

Die konstante a_B gibt dabei die atomare Längenskala an. Berechnen Sie das zu dieser Ladungsdichteverteilung gehörige Potential mittels (sphärischer) Multipolentwicklung!
Anmerkungen: Beschränken Sie sich auf eine ’Fernfeldentwicklung’ (d. h. Entwicklung das Potentials ’außerhalb’ der Ladungsverteilung, also für $r > r'$)! Berechnen Sie aber **alle** Terme dieser Entwicklungsreihe!

4. 3. **(Green’scher Satz und Earnshaw Theorem, 6 Punkte)**

(a) **(3 Punkte)** Beweisen Sie, daß im ladungsfreien Raum der Wert des elektrostatischen Potentials $\phi(\vec{r})$ an einem Aufpunkt $\vec{r}$ gleich dem Mittelwert des Potentials über jede Kugeloberfläche mit Mittelpunkt $\vec{r}$ ist.
Anleitung: Verwenden Sie den Green’schen Satz mit $\psi_1 = \phi$ und $\psi_2 = \frac{1}{|\vec{r'}-\vec{r}|}$.

(b) **(3 Punkte)** Beweisen Sie das **Earnshaw Theorem**, welches besagt, daß eine beliebige Anordnung von endlich vielen Punktladungen sich nicht in einem **stabilen** Gleichgewicht befinden kann.
Hinweis: Untersuchen Sie die Frage, ob sich eine beliebig herausgegriffene Punktladung Q_k am Ort $\vec{R}_k$ in einem Minimum des Potentials aller anderen Punktladungen befinden kann. Führen Sie die Annahme, daß sich die Punktladung Q_k in einem (lokalen) Minimum befindet mit Hilfe des Ergebnisses aus Teilaufgabe 4.3.(a) zum Widerspruch!

4. 4. **(Spiegelladung I, 7 Punkte)** Betrachten Sie eine leitende geerdete Kugel mit Radius R. Der Mittelpunkt der Kugel befinde sich im Koordinatenursprung. Im Abstand a ($a > R$) vom Ursprung befinde sich eine Punktladung q.

(a) **(3 Punkte)** Berechnen Sie das elektrostatische Potential dieser Versuchsanordnung für $|\vec{r}| > R$!
Hinweise: Überlegen Sie sich, wie die Randbedingung für das Potential auf der Kugeloberfläche lautet! Überlegen Sie sich weiterhin, welches Potential sich ergeben würde, wenn sich auf der Symmetrieachse der Versuchsanordnung eine weitere Punktladung im Abstand $a' < R$ vom Ursprung mit Ladung q' befinden würde. Um zur Lösung der Aufgabe zu gelangen, müssen Sie sich nun nur noch überlegen, wie Sie q' und a' zu wählen haben, damit die Randbedingung erfüllt ist!

(b) **(2 Punkte)** Berechnen Sie die Ladungsdichteverteilung auf der Kugeloberfläche!

(c) **(2 Punkte)** Berechnen Sie die Kraft zwischen Ladung und Kugel!

James Clerk Maxwell

Maxwell wurde am 13.Juni 1831 in Edinburg geboren und starb am 5.November 1879 in Cambridge.

Sein Vater war ein Gutsbesitzer und Sonderling, an dem Maxwell mit großer Liebe hing.; er ließ dem Knaben nach dem Tod der Mutter, deren Familie den Namen Maxwell trug, die beste Schulbildung zuteil werden. Maxwell studierte drei Jahre Mathematik und Physik in Edinburgh und schloß 1854 in Cambridge sein Studium ab. Ein Jahr später legte er hier seine erste Arbeit vor, die schon auf die späteren **Maxwellschen Gleichungen** zielte.

1856 erhielt Maxwell eine Professur in Aberdeen; von 1860 an wirkte er für fünf Jahre am King's College in London. Ähnlich wie Hermann von Helmholtz beschäftigte Maxwell sich mit der **Physiologie des Farbensehens** und baute die Dreifarbentheorie von Thomas Young weiter aus. Epochemachend waren Maxwells Arbeiten zur **Elektrodynamik**, wo er die intuitiven Vorstellungen Michael Faradays in eine mathematisch strenge Form brachte und die **Feldphysik** begründete.

Vollendet wurden die **Maxwellschen Gleichungen** 1862 im Philosophical Magazine unter dem Titel **'On Physical Lines of Force'** veröffentlicht. In der Einführung des Verschiebungsstromes ging Maxwell über **Faraday** hinaus; nach Maxwell muß ein sich änderndes elektrisches Feld in einem Kondensator wie ein elektrischer Strom magnetische Wirkungen zeigen. Gerade diese Annahme führte zur Möglichkeit transversaler elektromagnetischer Wellen. Über die mathematisch errechnete Fortpflanzungsgeschwindigkeit schrieb Maxwell 1864:

"This velocity is so nearly that of ligh, that it seems we have strong reason to conclude that light itself (including radiant heat, and other radiation if any) is an electromagnetic disturbance in the form of wave propagated through the electromagnetic field according to electromagnetic laws."

1873 legte Maxwell in dem zweibändigen **'Treatise'** eine Zusammenfassung aller bisherigen Arbeiten vor; die **Maxwellschen Gleichungen** erschienen dabei in einer komplizierteren Form; erst Heinrich Hertz und **Oliver Heaviside** griffen auf die ursprüngliche Fassung zurück. Es dauerte Jahrzehnte bis die **Maxwellschen Gleichungen** voll verstanden und anerkannt wurden. Dann aber bildete **'Maxwellsche Elektrodynamik'** zusammen mit der **'Newtonschen Mechanik'** das stolze Gebäude der klassischen Physik. Ludwig Boltzmann, der selbst viel zur Einführung der **Maxwellschen Gleichungen** beitrug, stellte in hoher Anerkennung der Leistung Maxwells seiner 'Vorlesungen über Maxwells Theorie' als Motto das **Goethe-Wort** voran:

"War es ein Gott, der diese Zeichen schrieb ?"

Auch auf dem **Gebiete der kinetischen Gastheorie** leistete Maxwell Bahnbrechendes. Er griff die Ansätze von **August Karl König** und Rudolf **Clausius** auf; während diese nur die mittlere Geschwindigkeit der Moleküle betrachtet hatten, stellte Maxwell die Frage nach der individuellen Geschwindigkeit des einzelnen Teilchens. Er fand die heute sogenannte **Maxwellsche Geschwindigkeitsverteilung** und begründete damit zugleich die **statistische Physik**. Auf Ludwig Boltzmann wirkten diese Abhandlungen wie eine Offenbarung, und in der Folge haben beide Forscher durch Parallelarbeit, einander anregend und kritisierend das neue Gebiet aufgebaut. Als Wegbereiter der **kinetischen Gastheorie** war Maxwell auch ein überzeugter Anhänger der Atomistik. In einer programmatischen Rede vor der British Association for the Advancement of Science äußerte er 1871 seine Überzeugung, daß die Atome absolut unveränderliche Gegebenheiten darstellen, und leitete daraus die Forderung nach atomaren Standards für die Grundeinheit der Masse, der Länge und der Zeit ab.

1865 legte Maxwell aus gesundheitlichen Gründen sein Lehramt am King's College nieder. Sein Gutsbesitz in Schottland sicherte ihm finanzielle Unabhängigkeit. Frei von den akademischen Verpflichtungen setzte er seine Forschungen als Privatgelehrter fort und verfaßte die umfangreichen Manuskripte seiner Anfang der siebziger Jahre erschienenen Werke. Eine Berufung nach St.Andrews, an die älteste schottische Universität, lehnte er ab. Als aber die Universität Cambridge einen Lehrstuhl für Experimentalphysik neu gründete und, erstmalig für England, mit einem großen Unterrichtslaboratorium ausstattete, nahm Maxwell diese auch für die britische Wissenschaft insgesamt wichtige Aufgabe an. In Großbritannien hatte es bis dat nur ein physikalisches Unterrichtslaboratorium gegeben, das von William Thomson (Lord Kelvin) im schottischen Glasgow. Der Bau und die Einrichtung des nach dem Hauptgeldgeber benannten Cavendish Laboratory nahm viel Zeit in Anspruch; mit ihm begründete aber Maxwell eine moderne Ausbildung und die berühmte Experimentalphysik in Cambridge.

Quelle: Armin Hermann 'Lexikon - Geschichte der Physik A-Z', Aulis-Verlag Deubner & Co KG 1978