4th Exercise Sheet: Electrodynamics, Summer Term '06

Prof. M. G. Schmidt, J. Braun

May 19, 2006

Submission on **May 26, 2006** during the lecture

4. 1. **(Präsenzübung: Poisson's equation, photon mass and complex function theory, 1+1 marks)** The Poisson's equation was introduced in the lecture. In the following, you have to discuss a modified version of the Poisson's equation:

$$\left(\Delta - m^2\right)\phi(\vec{x}) = -4\pi\delta(\vec{x})\,,$$

where $m \in \mathbb{R}$.

(a) Prove that

$$\phi(\vec{x}) = 4\pi \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{\mathrm{e}^{i\vec{p}\cdot\vec{x}}}{p^2 + m^2}$$

is a solution of the modified Poisson's equation. Note that $p^2 = \vec{p}\cdot\vec{p}$. In order to solve this exercise, it is convenient to use the representation of the Dirac delta distribution in Fourier space:

$$\delta(\vec{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \mathrm{e}^{i\vec{p}\cdot\vec{x}}\,.$$

(b) Perform the integration for $\phi(\vec{x})$ by means of the residue theorem! Discuss the result: What do you get for $\phi(\vec{x})$ in the limit $m \to 0$? What would be the consequences if the photons were massive?
Instructions: In order to calculate the integral, it is convenient to use spherical coordinates: Choose the z-axis of the coordinate system to be in the direction of the vector $\vec{x}$ and then perform the integration over the angles. Finally, you need the residue theorem to perform the integration in radial direction. The residue theorem is given by

$$\oint dz f(z) = 2\pi i \sum_i \mathrm{Res}_{z=z_i} f(z) \qquad \text{with} \qquad \mathrm{Res}_{z=z_i} f(z) = \lim_{z\to z_i} (z - z_i) f(z)\,,$$

where the integration is performed over a closed line (in the counterclockwise direction) in the complex plane, and the sum is over the residues of $f(z)$ inside that line. The formula for the calculation of the residue is only valid if $f(z)$ has a pole of first order (simple pole) at $z = z_i$.

4. 2. **(multipole expansion, 5 marks)** Consider the charge density distribution

$$\rho(\vec{r}) = \frac{q}{64\pi a_B^3} \left(\frac{r}{a_B}\right)^2 \sin^2(\theta)\, \mathrm{e}^{-r/a_B}\,.$$

The atomic length scale is given by the constant a_B. Calculate the potential by means of a (spherical) multipole expansion!
Remarks: You only have to use the formula for the multipole expansion which is valid outside of the charge distribution, i. e. for $r > r'$. But note that you have to calculate all terms of the series!

4. 3. **(Green's law and Earnshaw's theorem, 6 marks)**

(a) **(3 marks)** Prove that the value of the electrostatic potential at a test point $\vec{r}$ is equal to the average of a potential taken over any spherical surface with central point $\vec{r}$. **Instructions:** Use Green's law with $\psi_1 = \phi$ and $\psi_2 = \frac{1}{|\vec{r}' - \vec{r}|}$.

(b) **(3 marks)** Prove **Earnshaw's theorem**: There is no stable configuration of a finite number of point charges. **Hint:** Consider one arbitrary point charge Q_k ($k \in \{1, ..., N\}$) of a configuration of all point charges and prove by means of the result of 4.3.(a) that the assumption that the point charge Q_k is located in a (local) minimum is wrong!

4. 4. **(mirror charges I, 7 marks)** Consider a charged grounded ball with radius R. The central point of this ball is located at the origin of the coordinate system. A point charge q is located outside of the ball with distance a ($a > R$) from the origin of the coordinate system.

   (a) **(3 marks)** Calculate the electrostatic potential of this test arrangement! **Hints:** Which value does the potential take on the surface of the ball? Put another point charge q' on the symmetry axis of the test arrangement with distance $a' < R$ from the origin of the coordinate system? Can you choose q' and a' such that the boundary condition for potential on the surface of the ball is fulfilled?

   (b) **(2 marks)** Calculate the charge density distribution of surface of the ball!

   (c) **(2 marks)** Calculate the force between the point charge and the ball!

James Clerk Maxwell

Maxwell wurde am 13.Juni 1831 in Edinburg geboren und starb am 5.November 1879 in Cambridge.

Sein Vater war ein Gutsbesitzer und Sonderling, an dem Maxwell mit großer Liebe hing.; er ließ dem Knaben nach dem Tod der Mutter, deren Familie den Namen Maxwell trug, die beste Schulbildung zuteil werden. Maxwell studierte drei Jahre Mathematik und Physik in Edinburgh und schloß 1854 in Cambridge sein Studium ab. Ein Jahr später legte er hier seine erste Arbeit vor, die schon auf die späteren **Maxwellschen Gleichungen** zielte.

1856 erhielt Maxwell eine Professur in Aberdeen; von 1860 an wirkte er für fünf Jahre am King's College in London. Ähnlich wie Hermann von Helmholtz beschäftigte Maxwell sich mit der **Physiologie des Farbensehens** und baute die Dreifarbentheorie von Thomas Young weiter aus. Epochemachend waren Maxwells Arbeiten zur **Elektrodynamik**, wo er die intuitiven Vorstellungen Michael Faradays in eine mathematisch strenge Form brachte und die **Feldphysik** begründete.

Vollendet wurden die **Maxwellschen Gleichungen** 1862 im Philosophical Magazine unter dem Titel **'On Physical Lines of Force'** veröffentlicht. In der Einführung des Verschiebnungsstromes ging Maxwell über **Faraday** hinaus; nach Maxwell muß ein sich ändemdes elektrisches Feld in einem Kondensator wie ein elektrischer Strom magnetische Wirkungen zeigen. Gerade diese Annahme führte zur Möglichkeit transversaler elektromagnetischer Wellen. Über die mathematisch errechnete Fortpflanzungsgeschwindigkeit schrieb Maxwell 1864:

"This velocity is so nearly that of ligh, that it seems we have strong reason to conclude that light itself (including radiant heat, and other radiation if any) is an electromagnetic disturbance in the form of wave propagated through the electromagnetic field according to electromagnetic laws."

1873 legte Maxwell in dem zweibändigen **'Treatise'** eine Zusammenfassung aller bisherigen Arbeiten vor; die **Maxwellschen Gleichungen** erschienen dabei in einer komplizierteren Form; erst Heinrich Hertz und **Oliver Heaviside** griffen auf die ursprüngliche Fassung zurück. Es dauerte Jahrzehnte bis die **Maxwellschen Gleichungen** voll verstanden und anerkannt wurden. Dann aber bildete **'Maxwellsche Elektrodynamik'** zusammen mit der **'Newtonschen Mechanik'** das stolze Gebäude der klassischen Physik. Ludwig Boltzmann, der selbst viel zur Einführung der **Maxwellschen Gleichungen** beitrug, stellte in hoher Anerkennung der Leistung Maxwells seiner 'Vorlesungen über Maxwells Theorie' als Motto das **Goethe-Wort** voran:

"War es ein Gott, der diese Zeichen schrieb ?"

Auch auf dem **Gebiete der kinetischen Gastheorie** leistete Maxwell Bahnbrechendes. Er griff die Ansätze von **August Karl König** und Rudolf Clausius auf; während diese nur die mittlere Geschwindigkeit der Moleküle betrachtet hatten, stellte Maxwell die Frage nach der individuellen Geschwindigkeit des einzelnen Teilchens. Er fand die heute sogenannte **Maxwellsche Geschwindigkeitsverteilung** und begründete damit zugleich die **statistische Physik**. Auf Ludwig Boltzmann wirkten diese Abhandlungen wie eine Offenbarung, und in der Folge haben beide Forscher durch Parallelarbeit, einander anregend und kritisierend das neue Gebiet aufgebaut. Als Wegbereiter der **kinetischen Gastheorie** war Maxwell auch ein überzeugter Anhänger der Atomistik. In einer programmatischen Rede vor der British Association for the Advancement of Science äußerte er 1871 seine Überzeugung, daß die Atome absolut unveränderliche Gegebenheiten darstellen, und leitete daraus die Forderung nach atomaren Standards für die Grundeinheit der Masse, der Länge und der Zeit ab.

1865 legte Maxwell aus gesundheitlichen Gründen sein Lehramt am King's College nieder. Sein Gutsbesitz in Schottland sicherte ihm finanzielle Unabhängigkeit. Frei von den akademischen Verpflichtungen setzte er seine Forschungen als Privatgelehrter fort und verfaßte die umfangreichen Manuskripte seiner Anfang der siebziger Jahre erschienenen Werke. Eine Berufung nach St.Andrews, an die älteste schottische Universität, lehnte er ab. Als aber die Universität Cambridge einen Lehrstuhl für Experimentalphysik neu gründete und, erstmalig für England, mit einem großen Unterrichtslaboratorium ausstattete, nahm Maxwell diese auch für die britische Wissenschaft insgesamt wichtige Aufgabe an. In Großbritannien hatte es bis dat nur ein physikalisches Unterrichtslaboratorium gegeben, das von William Thomson (Lord Kelvin) im schottischen Glasgow. Der Bau und die Einrichtung des nach dem Hauptgeldgeber benannten Cavendish Laboratory nahm viel Zeit in Anspruch; mit ihm begründete aber Maxwell eine moderne Ausbildung und die berühmte Experimentalphysik in Cambridge.

Quelle: Armin Hermann 'Lexikon - Geschichte der Physik A-Z', Aulis-Verlag Deubner & Co KG 1978