5. Übungsblatt zur Elektrodynamik, Sommersemester ’06

Prof. M. G. Schmidt, J. Braun

26. Mai 2006

Abgabe am **Freitag, den 02.06.2006** in der Vorlesung

5. 1. **(Präsenzübung: Kugelflächenfunktionen und homogene Polynome, 1+1 Punkte)** Konstruieren Sie die Kugelflächenfunktionen für $l = 2$ und $l = 3$ mittels spurfreier Tensoren 2. und 3. Stufe, die aus den homogenen Polynomen der Koordinaten gebildet werden.
Anmerkung: Verwenden Sie das in der Vorlesung vorgestellte Konstruktionsverfahren! Beachten Sie, daß die Kugelflächenfunktionen, die Sie mit diesem Verfahren erhalten, nicht normiert sind. Eine Normierung der Funktionen wird aber nicht verlangt.

5. 2. **(Kugelflächenfunktionen und Potentiale, 6 Punkte)**

(a) **(1 Punkt)** Die Laplace-Gleichung in Kugelkoordinaten (r, θ, ϕ) lautet

$$\Delta\phi(r,\theta,\phi) = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}r + \frac{1}{r^2\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin(\theta)\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{r^2\sin^2(\theta)}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right)\phi(r,\theta,\phi) = 0\,.$$

Zeigen Sie, daß

$$\phi(r,\theta) = \frac{1}{r}\sum_{l=0}^{\infty}\left(A_l r^{l+1} + B_l r^{-l}\right)\mathrm{P}_l(\cos(\theta))$$

eine Lösung der Laplace-Gleichung in Kugelkoordinaten ist. Verwenden Sie

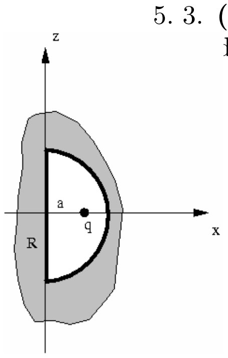
$$-\left(\frac{1}{\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin(\theta)\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2(\theta)}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right)\mathrm{P}_l(\cos(\theta)) = l(l+1)\mathrm{P}_l(\cos(\theta))\,.$$

(b) **(5 Punkte)** Zwei metallische hohle Halbkugeln mit Radius R seien durch einen infinitesimalen, isolierten Ring längs des Äquators (x-y-Ebene) getrennt. Die obere Halbkugel befinde sich auf dem Potential ϕ_0, die untere auf $-\phi_0$. Berechnen Sie das Potential $\phi(r,\theta)$ für Punkte innerhalb und außerhalb der Kugel.
Hinweise: Verwenden Sie die Lösung der Laplace-Gleichung aus Teilaufgabe 5.1.(a) als Ansatz und verwenden Sie weiter, daß

$$\mathrm{P}_l(-x) = (-1)^l\mathrm{P}_l(x) \qquad \text{und} \qquad \int_0^1 \mathrm{P}_l(x)dx = \mathcal{I}_l = (-1)^{\frac{l-1}{2}}\frac{(l-1)!}{2^l(\frac{l+1}{2})!(\frac{l-1}{2})!} \quad (\text{für ungerades l})\,.$$

Um nun die Koeffizienten A_l und B_l zu bestimmen, machen Sie von der Orthogonalität der Legendre-Polynome Gebrauch. Verwenden Sie zudem, daß $\phi(r,\theta)$ im Ursprung nicht singulär ist und für $r \to \infty$ verschwindet.

5. 3. **(Spiegelladung II, 7 Punkte)** In einem halbkugelförmigen Hohlraum eines geerdeten Leiters befindet sich auf der Symmetrieachse der Halbkugel im Abstand a von der ebenen Begrenzung eine Punktladung q. (siehe Skizze)



(a) **(3 Punkte)** Bestimmen Sie das Potential $\phi(\vec{r})$ im Inneren des Hohlraumes. Lösen Sie das Problem mittels der Spiegelladungsmethode! Geben Sie darüberhinaus die dazugehörige Green'sche Funktion an!
Hinweise: Erinnern Sie sich zunächst daran, wie Sie Aufgabe 4.4. gelöst haben: Wie sind Sie dort vorgegangen, um die Randbedingung auf der Kugeloberfläche zu erfüllen? Überlegen Sie sich dann, wie Sie die zusätzliche Randbedingung bei $x = 0$ erfüllen können. Sie werden insgesamt drei Spiegelladungen benötigen!

(b) **(4 Punkte)** Berechnen Sie die Influenzladung die von der ebenen Leiteroberfläche bzw. von der restlichen Leiterobfläche getragen wird.

5\. 4. **(Kapazitätskoeffizienten, 5 Punkte)**

(a) **(3 Punkte)** In der Vorlesung wurden die Kapazitätskoeffizienten eingeführt. Berechnen Sie nun diese für eine Anordnung, bestehend aus zwei konzentrischen leitenden Kugeln mit Radien R_1 und R_2, die die Ladungen q_1 und q_2 tragen.
Hinweise: Bestimmen Sie zuächst das Potential in den drei Raumbereichen $r > R_2$, $R_1 < r < R_2$ und $r < R_1$. Aus den Werten des Potentials an den Kugeloberflächen lassen sich dann die Kapazitätskoeffizienten bestimmen.

(b) **(2 Punkte)** Welche 'Kapazität' ergibt sich für den Kugelkondensator ($q_1 = -q_2$), welche für eine freistehende isolierte leitende Kugel?

Michael Faraday

Faraday, Michael (1791-1867), britischer Physiker und Chemiker, ist vor allem wegen seiner Entdeckungen auf dem Gebiet der elektromagnetischen Induktion und der Gesetze der Elektrolyse berühmt geworden.

Faraday wurde am 22. September 1791 in Newington (Surrey) geboren. Er war der Sohn eines Hufschmiedes. Während er bei einem Buchbinder in London in die Lehre ging, las er wissenschaftliche Bücher und experimentierte mit Elektrizität. Im Jahr 1812 besuchte er Vorlesungen des Chemikers Sir Humphry Davy. Davy stellte Faraday als Assistent in seinem chemischen Labor an der Royal Institution ein und nahm Faraday 1813 auf eine ausgedehnte Reise durch Europa mit. Faraday wurde 1824 in die Royal Society gewählt und im darauffolgenden Jahr zum Direktor des dortigen Laboratoriums ernannt. 1833 folgte er Davy als Professor für Chemie nach. Zwei Jahre später erhielt er eine Pension von 300 Pfund Sterling pro Jahr auf Lebenszeit. Faraday erhielt viele wissenschaftliche Auszeichnungen, darunter die Royal und Rumford Medaillen der Royal Society; ihm wurde auch die Präsidentschaft der Royal Society angeboten, dies lehnte er jedoch ab. Er starb am 25. August 1867 in der Nähe von Hampton Court (Surrey).

Faradays erste Forschungen lagen im Bereich der Chemie. Er arbeitete u. a. an der Druckverflüssigung von Chlor, der Herstellung von Hexachlorethan und entdeckte 1824 das Benzol.

Jene Forschungen, mit denen Faraday zum bekanntesten experimentellen Forscher seiner Tage wurde, lagen jedoch auf dem Gebiet der Elektrizität und des Magnetismus. Im Jahr 1821 stellte er fest, dass ein Blitzableiter unter elektrischem Strom ein magnetisches Feld aufbaut. Die Existenz von magnetischen Feldern war erstmals vom dänischen Physiker Hans Christian Ørsted im Jahr 1819 entdeckt worden. 1831 entdeckte Faraday die elektromagnetische Induktion. Im selben Jahr demonstrierte er die Induktion eines elektrischen Stromes durch einen anderen. Während dieser Forschungsperiode untersuchte er das Phänomen der Elektrolyse und entdeckte zwei grundlegende elektrochemische Gesetze: Die Stoffmenge, die bei der Elektrolyse an den Elektroden abgeschieden wird, ist proportional zur Stromstärke und zu ihrem Äquivalentgewicht. Faraday entdeckte auch das Prinzip, dass dielektrische Stoffe hohe spezifische Widerstände aufweisen. Bei seinen Experimenten mit dem Magnetismus machte Faraday zwei Beobachtungen. Zum einen wies er die Existenz des Diamagnetismus nach, zum anderen stellte er fest, dass ein starkes magnetisches Feld die Kraft besitzt, die Polarisationsebene des Lichtes in Glas zu drehen.