5th Exercise Sheet: Electrodynamics, Summer Term '06

Prof. M. G. Schmidt, J. Braun

May 26, 2006

Submission on **June 2,2006** during the lecture

5. 1. **(Präsenzübung: spherical harmonics and homogenous polynomials, 1+1 marks)** Construct the spherical harmonics for $l = 2$ and $l = 3$ by means of traceless tensors of second and third order, respectively. Construct these tensors using homogenous polynomials of the coordinates.
Remarks: Use the construction method which was introduced in the lecture. Note that the spherical harmonics obtained with this method are not normalized. However, a normalization is not demanded.

5. 2. **(spherical harmonics and potentials, 6 marks)**

(a) **(1 mark)** The Laplace-Equation in spherical coordinates (r, θ, ϕ) reads

$$\Delta\phi(r,\theta,\phi) = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}r + \frac{1}{r^2\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin(\theta)\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{r^2\sin^2(\theta)}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right)\phi(r,\theta,\phi) = 0\,.$$

Prove that

$$\phi(r,\theta) = \frac{1}{r}\sum_{l=0}^{\infty}\left(A_l r^{l+1} + B_l r^{-l}\right)\mathrm{P}_l(\cos(\theta))$$

is a solution of the Laplace-Equation in spherical coordinates. Use the following relation

$$-\left(\frac{1}{\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin(\theta)\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2(\theta)}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right)\mathrm{P}_l(\cos(\theta)) = l(l+1)\mathrm{P}_l(\cos(\theta))\,.$$

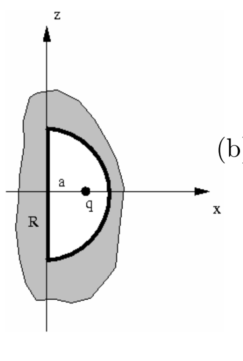
(b) **(5 marks)** Two conducting (metallic) hollow hemispheres with radius R are separated by an isolated, infinitesimal thin ring along the equator (x-y-plane). On the upper hemisphere, the potential takes the value ϕ_0; on the lower, it takes the value $-\phi_0$. Calculate the potential $\phi(r,\theta)$ inside and outside of the hollow ball.
Hints: Use the solution of the Laplace-Equation given in exercise 5.2.(a) and

$$\mathrm{P}_l(-x) = (-1)^l\mathrm{P}_l(x) \qquad \text{and} \qquad \int_0^1 \mathrm{P}_l(x)dx = \mathcal{I}_l = (-1)^{\frac{l-1}{2}}\frac{(l-1)!}{2^l(\frac{l+1}{2})!(\frac{l-1}{2})!} \quad (\text{for odd } l)\,.$$

In order to calculate the coefficients A_l and B_l, make use of the fact that the Legendre-Polynomials are orthogonal. Furthermore, apply the conditions that $\phi(r,\theta)$ is not singular at the origin and that $\phi(r,\theta)$ vanishes in the limit $r \to \infty$.

5. 3. **(mirror charges II, 7 marks)** Consider a charge q in a hemispherical cavity in a grounded conductor. The charge is located on the symmetry axis of the hemisphere with distance a from the plane boundary of the hemisphere. (see sketch)

(a) **(3 marks)** Calculate the potential $\phi(\vec{r})$ inside the cavity. Solve the problem by means of mirror charges! Give also the corresponding Green's function!
Hints: First, look back on your solution of exercise 4.4.: How did you fulfill the boundary condition on the sphere? Then think of the fact that you have to fulfill an additional boundary condition at $x = 0$. Altogether, you will need three mirror charges.



(b) **(4 marks)** Calculate the influence charge on the plane conducting boundary and on the remaining conducting boundary, respectively.

5. 4. **(capacity coefficients, 5 marks)**

(a) **(3 marks)** Calculate the capacity coefficients for an arrangement consisting of two concentric conducting hollow balls with radii R_1 and R_2 and charges q_1 and q_2.
Hints: First, calculate the potential in the three domains defined by $r > R_2$, $R_1 < r < R_2$ and $r < R_1$. Then determine the value of the potential on the surfaces of the balls in order to determine the capacity coefficients.

(b) **(2 marks)** Give the 'capacity' if the charges of the two balls are given by $q_1 = -q_2$ (spherical capacitor), and for a free-standing isolated conducting ball?

Michael Faraday

Faraday, Michael (1791-1867), britischer Physiker und Chemiker, ist vor allem wegen seiner Entdeckungen auf dem Gebiet der elektromagnetischen Induktion und der Gesetze der Elektrolyse berühmt geworden.

Faraday wurde am 22. September 1791 in Newington (Surrey) geboren. Er war der Sohn eines Hufschmiedes. Während er bei einem Buchbinder in London in die Lehre ging, las er wissenschaftliche Bücher und experimentierte mit Elektrizität. Im Jahr 1812 besuchte er Vorlesungen des Chemikers Sir Humphry Davy. Davy stellte Faraday als Assistent in seinem chemischen Labor an der Royal Institution ein und nahm Faraday 1813 auf eine ausgedehnte Reise durch Europa mit. Faraday wurde 1824 in die Royal Society gewählt und im darauffolgenden Jahr zum Direktor des dortigen Laboratoriums ernannt. 1833 folgte er Davy als Professor für Chemie nach. Zwei Jahre später erhielt er eine Pension von 300 Pfund Sterling pro Jahr auf Lebenszeit. Faraday erhielt viele wissenschaftliche Auszeichnungen, darunter die Royal und Rumford Medaillen der Royal Society; ihm wurde auch die Präsidentschaft der Royal Society angeboten, dies lehnte er jedoch ab. Er starb am 25. August 1867 in der Nähe von Hampton Court (Surrey).

Faradays erste Forschungen lagen im Bereich der Chemie. Er arbeitete u. a. an der Druckverflüssigung von Chlor, der Herstellung von Hexachlorethan und entdeckte 1824 das Benzol.

Jene Forschungen, mit denen Faraday zum bekanntesten experimentellen Forscher seiner Tage wurde, lagen jedoch auf dem Gebiet der Elektrizität und des Magnetismus. Im Jahr 1821 stellte er fest, dass ein Blitzableiter unter elektrischem Strom ein magnetisches Feld aufbaut. Die Existenz von magnetischen Feldern war erstmals vom dänischen Physiker Hans Christian Ørsted im Jahr 1819 entdeckt worden. 1831 entdeckte Faraday die elektromagnetische Induktion. Im selben Jahr demonstrierte er die Induktion eines elektrischen Stromes durch einen anderen. Während dieser Forschungsperiode untersuchte er das Phänomen der Elektrolyse und entdeckte zwei grundlegende elektrochemische Gesetze: Die Stoffmenge, die bei der Elektrolyse an den Elektroden abgeschieden wird, ist proportional zur Stromstärke und zu ihrem Äquivalentgewicht. Faraday entdeckte auch das Prinzip, dass dielektrische Stoffe hohe spezifische Widerstände aufweisen. Bei seinen Experimenten mit dem Magnetismus machte Faraday zwei Beobachtungen. Zum einen wies er die Existenz des Diamagnetismus nach, zum anderen stellte er fest, dass ein starkes magnetisches Feld die Kraft besitzt, die Polarisationsebene des Lichtes in Glas zu drehen.