9. Übungsblatt zur Elektrodynamik, Sommersemester ’06

Prof. M. G. Schmidt, J. Braun

23. Juni 2006

Abgabe am **Freitag, den 30.06.2006** in der Vorlesung

9. 1. **Präsenzübung: siehe Blatt 8**

9. 2. **(Modell einer Spule und Induktivität, 1.5+2.5 Punkte)** Betrachten Sie folgendes Modell für eine Spule: Auf der Mantelfläche eines Kreiszylinders (Radius R, Höhe h) fließe ein Gleichstrom in zirkularer Richtung mit der Stromdichte

$$\vec{j} = \frac{n}{h} I \delta(\rho - R) \left[\Theta\left(z + \frac{h}{2}\right) - \Theta\left(z - \frac{h}{2}\right) \right] \vec{e}_\phi \,.$$

Die Zahl der Windungen sei durch n gegeben. Berechnen Sie die Selbstinduktivität L für große h, d.h. für $\frac{R}{h} \ll 1$, ...

(a) **(1.5 Punkte)** ... durch Berechnung der Feldstärke $\vec{B}$ und der Energie des Magnetfeldes für den unendlich langen Kreiszylinder ($\frac{R}{h} \to 0$):

$$L = \frac{1}{4\pi I^2} \int d^3r \vec{B} \cdot \vec{B} \,.$$

(b) **(2.5 BONUS-Punkte)** ... mit Hilfe der Formel

$$L = \frac{1}{(cI)^2} \int d^3r \int d^3r' \frac{\vec{j}(\vec{r})\vec{j}(\vec{r'})}{|\vec{r} - \vec{r'}|} \,.$$

Geben Sie den Korrekturterm erster Ordnung für das Ergebnis der Induktivität eines unendlich langen Kreiszylinders explizit an!
Hinweise für Teilaufgabe (b): Verwenden Sie

$$\int_{-\frac{y}{2}}^{\frac{y}{2}} \frac{dz'}{\sqrt{a^2 + (z - z')^2}} = \ln\left(\sqrt{\left(\frac{\frac{y}{2} - z}{a}\right)^2 + 1} + \frac{\frac{y}{2} - z}{a}\right) - \ln\left(\sqrt{\left(\frac{\frac{y}{2} + z}{a}\right)^2 + 1} - \frac{\frac{y}{2} + z}{a}\right)$$

sowie

$$\int_0^{2\pi} d\psi \cos(\psi) \ln(1 - \cos(\psi)) = -2\pi \quad \text{und} \quad \int_0^{2\pi} d\psi \cos(\psi) \sin\left(\frac{\psi}{2}\right) = -\frac{4}{3} \,.$$

9. 3. **(elektromagnetische Wellen, 7 Punkte)** Ein elektromagnetisches Feld sei gegeben durch

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = a\vec{e}_x \cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t) + b\vec{e}_y sin(\vec{k}\vec{r} - \omega t) \,,$$
$$\vec{B}(\vec{r}, t) = c\vec{e}_x \sin(\vec{k}\vec{r} - \omega t) + d\vec{e}_y cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t) \,,$$

wobei a, b, c, d Konstanten seien, und $\vec{k} = k\vec{e}_z$ mit $\omega = kc = |\vec{k}|c$.

(a) **(2 Punkte)** Für vorgegebene Werte von a und b, wie sind c und d zu wählen, damit die Maxwellgleichungen mit $\vec{j} = 0$ und $\rho = 0$ erfüllt sind? Verwenden Sie im Folgenden diese Werte.

(b) **(2 Punkte)** Für festes $z = 0$, wie Verhalten sich $\vec{E}$ und $\vec{B}$ als Funktion der Zeit? Warum bezeichnet man den Fall $ab = 0$ als linear, den Fall $a = b$ als zirkular polarisiert?

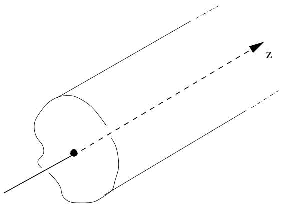
(c) **(3 Punkte)** Berechnen Sie die Energiedichte und den Poynting-Vektor und ihre zeitlichen Mittelwerte über eine Schwingungsperiode.

Bitte wenden!

9. 4. **(Hohlleiter, 7 Punkte)**

(a) **(4 Punkte)** Im Folgenden soll ein elektromagnetisches Feld in einem Hohlleiter (keine Begrenzung in z-Richtung) mit beliebigem Querschnitt betrachtet werden (siehe Skizze).

i. **(1 Punkt)** Gegeben seien die Feldgleichungen (siehe Vorlesung)



$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vec{E} = 0 \qquad \text{und} \qquad \left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vec{B} = 0\,.$$

für das elektrische und magnetische Feld. Verwenden Sie nun die Ansätze

$$\vec{E} = \vec{E}_0(x,y)\mathrm{e}^{i(k_z z - \omega t)} \qquad \text{und} \qquad \vec{B} = \vec{B}_0(x,y)\mathrm{e}^{i(k_z z - \omega t)}$$

für das $\vec{E}$- und $\vec{B}$-Feld in den Feldgleichungen, um zu zeigen, daß folgende Feldgleichungen für $\vec{E}_0(x,y)$ und $\vec{B}_0(x,y)$ gelten:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k_\perp^2\right)\vec{E}_0(x,y) = 0 \qquad \text{und} \qquad \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k_\perp^2\right)\vec{B}_0(x,y) = 0\,.$$

Hierbei sei $k_\perp^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - k_z^2$ mit Konstanten k_z und ω. Welche Ungleichung zwischen ω und $k_\perp$ muß für Wellen in z-Richtung erfüllt sein?

ii. **(1.5 Punkte)** Was gilt für die Tangentialkomponente des elektrischen Feldes $\vec{E}$ auf dem Rand? Zeigen Sie, daß die Normalkomponente $\vec{B}_\perp$ des magentischen Feldes auf dem Rand verschwindet!

iii. **(1.5 Punkte)** Verwenden Sie die III. und IV. Maxwellgleichung (Nomenklatur wie in der Vorlesung) sowie den Ansatz für das $\vec{E}$- und $\vec{B}$-Feld aus Teilaufgabe (a).i. um folgende Relationen herzuleiten:

$$k_\perp^2\,(\vec{e}_x E_{0,x} + \vec{e}_y E_{0,y}) = i\,k_z \vec{\nabla} E_{0,z} - i\,\tfrac{\omega}{c}\vec{e}_z \times \vec{\nabla} B_{0,z}\,,$$
$$k_\perp^2\,(\vec{e}_x B_{0,x} + \vec{e}_y B_{0,y}) = i\,k_z \vec{\nabla} B_{0,z} + i\,\tfrac{\omega}{c}\vec{e}_z \times \vec{\nabla} E_{0,z}\,.$$

(b) **(3 Punkte)** Nun soll ein Hohlleiter mit rechteckigem Querschnitt (Seitenlänge b in y-Richtung und Seitenlänge a in x-Richtung) betrachtet werden:

i. **(1.5 Punkte)** transversal-magnetische (TM) Moden: In diesem Fall ist die z-Komponente des $\vec{B}$-Feldes identisch Null, d.h. $B_{0,z} \equiv 0$. Berechnen Sie das elektrische Feld in z-Richtung unter Einbeziehung der Randbedingungen!

ii. **(1.5 Punkte)** transversal-elektrische (TE) Moden: In diesem Fall ist die z-Komponente des $\vec{E}$-Feldes identisch Null, d.h. $E_{0,z} \equiv 0$. Berechnen Sie das magnetische Feld in z-Richtung unter Einbeziehung der Randbedingungen!

Anmerkung: Die Bezeichnungen 'TM' und 'TE' geben an, welches der beiden Felder senkrecht auf der Ausbreitungsrichtung der Hohlraumwelle steht.
Hinweise: Verwenden Sie die Differentialgleichungen für $\vec{E}_0$ und $\vec{B}_0$ aus Teilaufgabe (b).i. um das elektrische bzw. magnetische Feld in z-Richtung zu bestimmen. Machen Sie einen Separationsansatz für das elektrische bzw. magnetische Feld in z-Richtung um die Differentialgleichung zu lösen.