3. Übungsblatt zur Vorlesung Quantenmechanik

Abgabe: Dienstag 28.04 bzw. Mittwoch 29.04.2009 in den Übungen.

Aufgabe 6: *Fourier-Transformation* **(6 Punkte)**

Die Fourier–Transformation einer Funktion $\phi(x)$ ist gegeben durch

$$\hat{\phi}(k) = \mathcal{F}[\phi(x);k] = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-ikx}\phi(x)\,.$$

Die inverse Transformation ist dann

$$\phi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{ikx}\hat{\phi}(k)\,.$$

a) Berechnen Sie die Fourier-Transformierte von $\phi_a(x) = \Theta(x)\Theta(a-x)$ (zur Definition der Θ-Funktion, siehe Aufgabe P9). **(2 Punkte)**

b) Berechnen Sie die Fourier-Transformierte von $\phi(x) = \Theta(x+a)\Theta(a-x)$. Skizzieren Sie das Ergebnis und betrachten Sie das Produkt $\Delta x \cdot \Delta k$ für von Ihnen geeignet definierter Breiten Δx und Δk. **(2 Punkte)**

c) Berechnen Sie die Fourier-Transformierte der Gauß Funktion $f(x) = Ne^{-\frac{1}{2}cx^2}$. Dabei seien N und c reelle postive Konstanten. **(2 Punkte)**

Aufgabe 7: *"Fourier"-Darstellung der δ-Funktion* **(4 Punkte)**

Die Funktion $\delta_\epsilon(x-a)$ ist gegeben durch:

$$\delta_\epsilon(x-a) = \frac{1}{2\epsilon}\Theta(a+\epsilon-x)\Theta(x-a+\epsilon).$$

Der Grenzwert $\epsilon \to 0$ ergibt eine Darstellung der δ-Funktion:

$$\delta(x-a) = \lim_{\epsilon\to 0}\delta_\epsilon(x-a).$$

Daraus läßt sich eine weitere, wichtige Darstellung der δ-Funktion ableiten: Berechnen Sie dazu die Fourier-Transformierte von $\delta_\epsilon(x-a)$ und betrachten Sie deren Grenzwert $\epsilon \to 0$. Durch Rücktransformation ergibt sich die "Fourier"- Darstellung von $\delta(x-a)$:

$$\delta(x-a) = \frac{1}{2\pi}\int e^{ik(x-a)}dk.$$

Aufgabe 8: *zeitunabhängige Schrödingergleichung, 1-dim. Probleme* **(4 Punkte)**

Gegeben sei ein 1-dim. Potenzial $V(x)$. Betrachten Sie die zugehörige 1-dim. zeitabhängige Schrödingergleichung (siehe Vorlesung)

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(x,t) = \hat{H}\Psi(x,t) \qquad \text{mit} \qquad \hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)$$

a) Machen Sie den Separationsansatz

$$\Psi(x,t) \;=\; f(t)\,\psi(x).$$

Bestimmen Sie $f(t)$ und zeigen Sie, dass $\psi(x)$ Eigenfunktion des Hamilton-operators $\hat{H}$ ist, d.h. es gilt

$$\hat{H}\psi(x) \;=\; E\psi(x) \qquad (*)$$

mit einer Konstanten E. **(2 Punkte)**
Anmerkung: $(*)$ heißt zeitunabhängige Schrödingergleichung.

b) Das Potenzial $V(x)$ habe an der Stelle $x = a$ eine Unstetigkeit wie in Fig. 1 dargestellt. Sei nun $\psi_I(x)$ eine Lösung von $(*)$ im Bereich $x \leq a$ und $\psi_{II}(x)$ eine Lösung von $(*)$ im Bereich $x \geq a$. Begünden Sie, warum die Lösungen von $(*)$ an der Sprungstelle $x = a$ die Anschlußbedingungen

$$\psi_I(a) = \psi_{II}(a) \qquad \text{und} \qquad \psi_I'(a) = \psi_{II}'(a)$$

erfüllen. **(2 Punkte)**
Anleitung: Nehmen Sie an, $\psi(x)$ oder $\psi'(x)$ hätte bei $x = a$ ein Verhalten $\sim \Theta(x-a)$ und überlegen, welche Konsequenzen dies für $\psi''(x)$ hätte.

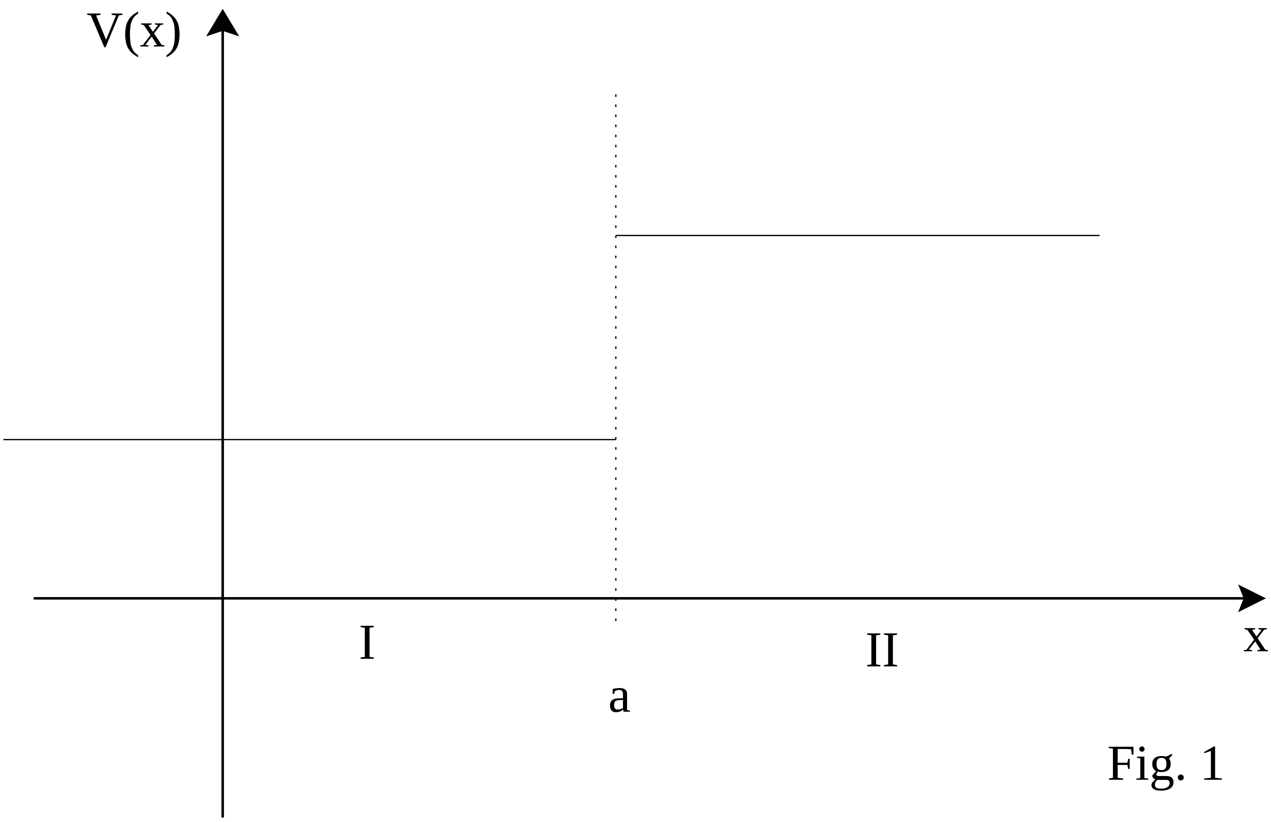

Fig. 1

Aufgabe 9: *1-dim. Potenzialstufe* **(6 Punkte)**

Ein Strom von Teilchen der Masse m und Energie $E < V_0$ falle von links in positiver x-Richtung laufend auf die Potenzialstufe

$$V(x) = V_0 \Theta(x) \qquad \text{mit der Konstanten} \qquad V_0 > 0 \quad .$$

a) Zeigen Sie:

$$\psi(x) = \begin{cases} e^{ikx} + re^{-ikx} & \text{für} \quad x < 0 \quad \text{(Bereich I)} \\ te^{-\kappa x} & \text{für} \quad x > 0 \quad \text{(Bereich II)} \end{cases}$$

ist eine Lösung der zugehörigen zeitunabhängigen Schrödingergleichung. Drücken Sie k und κ durch E und V_0 aus und bestimmen Sie r und t als Funktion von k und κ.

Anleitung : Benutzen Sie die in Aufgabe 8b) angegebenen Stetigkeitsbedingungen für ψ. Betrachten Sie im Bereich II nur solche Lösungen, für die $\int_0^\infty dx|\psi(x)|^2 < \infty$ ist. **(4 Punkte)**

Anmerkung: Es wurde ohne Einschränkung der Allgemeinheit angenommen, dass die Amplitude der von links einfallenden Welle gleich 1 ist.

b) Berechnen Sie $|r|^2$ und interpretieren Sie das Ergebnis. Wie kann man $t \neq 0$ interpretieren ? **(1 Punkt)**

c) Betrachten Sie den Grenzfall einer unendlich hohen Potentialstufe $V_0 \to \infty$. Bestimmen Sie für diesen Grenzfall r und t und zeigen Sie, dass dann $\psi(0) = 0$ ist. **(1 Punkt)**

Anmerkung: Dies ist die allgemeine Randbedingung für eine unendlich hohe Potenzialschwelle.

Werner Heisenberg

Werner Heisenberg wurde am 5. Dezember 1901 in Würzburg geboren. Er starb am in

Angezogen von der Forscher- und Lehrerpersönlichkeit Arnold Sommerfelds begann Heisenberg 1920 an der Universität München das Studium der theoretischen Physik. In die Probleme der nur aus unzusammenhängenden Ansätzen bestehenden **Quantentheorie** arbeitete er sich so schnell ein, daß er bereits nach wenigen Monaten neuartige Lösungen (**anomaler Zeemaneffekt**) vorlegte. Da ein Mindeststudium von sechs Semestern vorgeschrieben war, konnte Heisenberg erst 1923 (mit einer Arbeit über Turbulenz) promoviert werden. Schon 1924 wurde er in Göttingen habilitiert, wo er Assistent von Max Born geworden war.

Nachdem offenkundig geworden war, daß das **Bohrsche Atommodell** trotz großer Erfolge nicht richtig sein konnte, mühte sich Heisenberg um den *"Übergang von der nur symbolisch brauchbaren und daher nur qualitativ richtigen Modellmechanik...zur wirklichen Quantenmechanik"*. Während eines Erholungsurlaubes Ende Mai 1925 nahmen seine Gedanken über die Quantenmechanik greifbare Gestalt an:

"In Helgoland war ein Augenblick, in dem es mir wie eine Erleuchtung kam, als ich sah, daß die Energie zeitlich konstant war."

In den folgenden Wochen verfaßte er die entscheidende Arbeit **'Über quantentheoretische Umdeutung kinematischer und mechanischer Beziehungen'**. Hier formulierte er sein berühmt gewordenes positivistisches Prinzip, daß zur Beschreibung physikalischer Sachverhalte nur *"prinzipiell beobachtbare"* Größen herangezogen werden dürfen und daß deshalb in der neuen Atomphysik für die bisher gebrauchten Begriffe wie *"Bahn des Elektrons im Atom"* oder *"Umlaufzeit des Elektrons"* kein Platz mehr ist. Gleichzeitig lieferte Heisenberg in seinen **'Multiplikationsregeln für quadratische Schemata'** den langgesuchten Ansatz für die neue **Quantenmechanik**, die nun von Max Born unter der Mitwirkung von Pascual Jordan als **'Göttinger Matrizenmechanik'** aufgebaut werden konnte.

In enger Zusammenarbeit mit Niels Bohr in Kopenhagen gelang es Heisenberg, den tieferen *"physikalischen* - oder *"philosophischen"* - Hintergrund des neuen Formalismus zu zeigen. Die **'Heisenbergsche Unschärferelation'** von 1927 wurde die Grundlage der **'Kopenhagener Deutung der Quantentheorie'**, die eine ganz neuartige Auffassung der physikalischen Realität beinhaltet. Welle und Korpuskel als zwei verschiedene Aspekte desselben Dinges und an die Stelle des Determinismus der klassischen Physik treten statistische Gesetze.

Heisenbergs Arbeiten zur **Quantenmechanik** wurden durch die Verleihung des **Nobelpreises** für Physik 1932 ausgezeichnet. Da nun das Problem des Atombaues - was die Atomhülle betraf - erfolgreich gelöst worden war, widmete sich Heisenberg den Fragen des Atomkernes. Nach der **Entdeckung des Neutrons** durch James Chadwick 1932 erkannte Heisenberg (und unabhängig **D.D. Iwanenkow**), daß dieses neue Teilchen neben dem Proton als Baustein des Atomkerns zu betrachten ist und entwickelte auf dieser Grundlage eine Theorie über den Aufbau der Atomkerne.

Schon 1927, mit 26 Jahren, war Heisenberg Ordinarius für theoretische Physik an der Universität Leipzig geworden. Als in München 1937 die Nachfolge Arnold Sommerfelds zur Diskussion stand, waren sich die Physiker einig, daß dieser Lehrstuhl nur mit dem hervorragendsten Sommerfeld-Schüler besetzt werden könnte: eben Werner Heisenberg. Gegen diese Pläne richteten sich heftige Angriffe nationalsozialistischer Kreise mit vehementen Diffamierungen, die erst dann aufhörten als seine Kenntnisse zu Beginn des 2.Weltkrieges dringend benötigt wurden.1940 konzipierte Heisenberg in zwei, aus Gründen der Geheimhaltung unveröffentlichten Arbeiten die Theorie des Kernreaktors, wobei er insbesondere die Resonanzabsorption von Neutronen in U^{238} erörterte.

Nach dem Kriege von den Alliierten mit anderen deutschen Kernphysikern interniert begann Heisenberg seit 1946 den Wiederaufbau der deutschen Forschung in die Wege zu leiten. Als Direktor des Max-Planck-Instituts für Physik und Atomphysik - zunächst in Göttingen, seit 1956 in München - war er seit etwa 1953 intensiv bemüht, eine *"Einheitliche Theorie der Elementarteilchen"* aufzustellen. Heisenberg argumentierte, daß alle Elementarteilchen aus derselben Substanz gemacht sein müssen, weil sie sich wechselseitig ineinander umwandeln; diese Substanz könnte man dann Energie oder Materie nennen, wie man will.

Während andere Wissenschaftler mit Teilproblemen beschäftigt waren, war es Heisenbergs Überzeugung, daß man *"mit einem Schlage"* das ganze Spektrum der Elementarteilchen aufklären muß:

"Hier fasziniert mich besonders die Möglichkeit, zu dem zentralen Knotenpunkt vorzustoßen, in dem die Naturgesetze der verschiedenen bekannten Erfahrungsbereiche - Mechanik, Elektrizitätslehre, Wärmelehre, Chemie usw. - zusammenhängen und aus einem einheitlichen Naturgesetz für die Elementarteilchen entspringen."

Quelle: Armin Hermann 'Lexikon - Geschichte der Physik A-Z', Aulis-Verlag Deubner & Co KG 1978