Universität Heidelberg WS 2004/05

3. Präsenzübung zur Vorlesung Quantenmechanik

Die Präsenzübung wird in den Übungen am 19./ 26. November 2004 unter Anleitung des/r Tutors/in gemeinsam bearbeitet.

Für die aktive Mitarbeit gibt es **2 Punkte** !

Aufgabe P6: *Hermite-Polynome*
Bei der Beschreibung der Eigenfunktionen des harmonischen Oszillators treten die Hermite-Polynome $H_n(\xi)$ auf. Ihre Darstellung ergibt sich aus der folgenden erzeugenden Funktion:

$$Z(\xi, \lambda) = e^{-\lambda^2 + 2\lambda\xi} = \sum_n \frac{H_n(\xi)}{n!} \lambda^n.$$

(a) Zeigen Sie mit Hilfe der erzeugenden Funktion, daß gilt:

$$H'_n(\xi) = 2nH_{n-1}(\xi).$$

(b) Zeigen Sie mit Hilfe der erzeugenden Funktion, daß $H_n(\xi)$ die folgende Differentialgleichung erfüllt:

$$H''_n(\xi) - 2\xi H'_n(\xi) + 2nH_n(\xi) = 0.$$

(c) Zeigen Sie die Darstellung:

$$H_n(\xi) = (-1)^n e^{\xi^2} \frac{d^n}{d\xi^n} e^{-\xi^2}.$$

(d) Berechnen Sie die Polynome $H_0, ..., H_3$.

Ganz ungebunden
Niels BOHR erhielt einen Brief von PAULI, den zu beantworten ihm schwer fiel. Er bat seine Frau, PAULI zu schreiben, er selbst werde ihm am Montag schreiben. Zwei Wochen später schrieb PAULI an Frau Bohr, wie weise BOHR gewesen sei, als er hatte mitteilen lassen, er werde Montag schreiben, aber nicht an welchem. Er brauche sich keineswegs an Montag gebunden zu fühlen.

Aus: Anna Ehlers, *Liebes Hertz !, Physiker und Mathematiker in Anekdoten*, Birkhäuser Verlag, 1994, S. 47

Quelle: http://www.chemie.uni-bremen.de/stohrer/biograph/pauli.htm

Wolfgang Pauli

Wolfgang Pauli wurde am 25.April 1900 in Wien geboren und starb am 15.Dezember 1958 in Zürich.

Schon im ersten Semester 1918/19 hörte er die Vorlesungen Arnold Sommerfelds. Sommerfelds physikalische Intuition und Meisterschaft in der Handhabung der mathematischen Methoden wurden für Pauli zum bestimmenden Erlebnis und er sah in ihm stets seinen *"eigentlichen"* Lehrer.

Umgekehrt erkannte Arnold Sommerfeld Paulis ungewöhnliche Begabung und übertrug Pauli die ursprünglich ihm selbst zugedachte Aufgabe: die zusammenfassende Darstellung über die **Relativitätstheorie** für die Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften. Paulis Werk erregte in der Fachwelt erhebliches Aufsehen. Es war *"einfach meisterhaft, zumal für einen Studenten im fünften Semester"*, wie **Sommerfeld** an Einstein schrieb, und dieser stellte fest:

Wer dieses reife und groß angelegte Werk studiert, möchte nicht glauben, daß der Verfasser ein Mann von einundzwanzig Jahren ist. Man weiß nicht, was man am meisten bewundern soll, das psychologische Verständnis für die Ideenentwicklung, die Sicherheit der mathematischen Deduktion, den tiefen physikalischen Blick, das Vermögen übersichtlicher systematischer Darstellung, die Literaturkenntnis, die sachliche Vollständigkeit, die Sicherheit der Kritik."

Tatsächlich war Paulis Darstellung so tiefdringend, daß sie bis in die jüngste Zeit als beste Zusammenfassung des Gebietes galt und noch nach fast vierzig Jahren Neuauflagen und Übersetzungen erlebte. Die Arbeiten zur **Relativitätstheorie** prägten Paulis zukünftiges physikalisches Schaffen in charakteristischer Weise. Durch sein gesamtes Werk zieht sich das Bemühen um systematische und invariante Formulierungen, wie es sich wesentlich durch ihn in der Physik durchgesetzt hat.

In der anregenden Atmosphäre des Sommerfeldschen Kreises kam Pauli mit der **Quantentheorie** in Berührung, in die sich der junge Student ebenso intensiv wie in die **Relativitätstheorie** einarbeitete. In seiner Dissertation 1921 versuchte er, die **Quantentheorie**, wie er sie bei **Sommerfeld** gelernt hatte, auf das Wasserstoffmolekül-Ion anzuwenden. Das Ergebnis war enttäuschend: Die **Bohr-Sommerfeldsche Atomtheorie** führte nicht zu den richtigen stationären Zuständen. Vielmehr wurde mit dieser Arbeit die Gültigkeit des anschaulichen Modells zum ersten Mal ernsthaft in Zweifel gezogen, wenn es auch noch Jahre dauerete, bis es durch ein besseres abgelöst werden konnte. Fortan galt Paulis Interesse vor allem der **Quantentheorie**.

Nach der Promotion wurde Pauli für ein Semester 1921/22 Assistent Max Borns in Göttingen. **Born** schrieb:

"Er ist erstaunlich klug und kann sehr viel; einen so guten Assistenten werde ich nie mehr kriegen."

Die Zusammenarbeit mit **Born** wurde durch das Angebot einer Assistentenstelle bei **Wilhelm Lenz** in Hamburg - eines Schülers von Arnold Sommerfeld - beendet. Doch schon 1922 ging Pauli für ein Jahr auf Einladung von Niels Bohr nach Kopenhagen. Er war **Bohr** im Sommer 1922 bei den sogenannten **'Bohr-Festspielen'** begegnet, auf denen **Bohr** über den Stand der **Quantentheorie** der Atome und das **Periodensystem der Elemente** vortrug. Über dieses Zusammentreffen sagte Pauli später, *"daß eine neue Phase meines wissenschaft6lichen Lebens begann"*. Es hinterließ Pauli einen besonders starken Eindruck, daß **Bohr** immer wieder sein Streben nach einer *"allgemeinen Erklärung"* der Probleme betonte. Pauli fand in Bohr einen ihm in mancherlei Hinsicht wesensverwandten Lehrer und guten Freund. In Paulis Genialität, kann man sagen, vereinten sich die besten Eigenschaften seiner beiden Lehre in glücklicher Weise - **Sommerfelds** mathematische Meisterhaft und **Bohrs** tiefschürfende philosophische Durchdringung der physikalischen Grundlagen.

Im Herbst 1923 kehrte Pauli aus Kopenhagen nach Hamburg zurück; er wurde im folgenden Jahr habilitiert und 1926 zum a.o. Professor ernannt. Nach den Kopenhagener Anregungen setzte Pauli seine Bemühungen um eine theoretische Deutung des **Periodensystems** fort. Gegen Ende 1924 gelang ihm die Entdeckung des **'Ausschließungsprinzips' (Pauli-Prinzips)**. Die **Bohr-Sommerfeldsche Atomtheorie** hatte nur die Hälfte der experimentell beobachteten, stationären Zstände geliefert. Durch die Annahme eines zusätzlichen Freiheitsgrades für die Elektronen,*"einer klassisch nicht beschreibbaren Zweideutigkeit"*, und durch die Forderung daß jeder Quantenzustand nur mit einem Elektron besetzt sein darf, gelang es ihm, die Schwierigkeiten zu bewältigen. Mit der von **Samuel Goudsmit** und **Georg Uhlenbeck** entwickelten Vorstellung des **Elektronenspins** ergab sich eine ungezwungene Erklärung des **Periodensystems**, wenn auch der Sinn des Prinzips vorerst noch im Dunkeln blieb. Den Gedanken einer "Kreiselbewegung" des Elektrons akzeptierte Pauli erst, als er sich bei der Anwendung bewährte. Seine anfänglichen Zweifel erwuchsen aus dem klassisch-mechanischen Charakter der Idee. Pauli erkannte klar, daß sein Prinzip nicht aus den Gesetzen der Mechanik oder der bestehenden **Quantentheorie** folgte, sondern eine Ergänzung der **Grundpostulate** darstellte. Die außerordentliche Bedeutung seiner Entdeckung wurde 1945 mit der Verleihung des **Nobelpreises** für Physik gewürdigt.

Paulis tiefes Verständnis der **"alten Quantentheorie"** zeigte sich am Beispiel der Analyse des **Compton-Effekts** oder in einem Übersichtsartikel im Handbuch der Physik über die Entwicklung der **Quantentheorie** bis 1925. Aber im Bewußtsein der Widersprüche der bisherigen Erkenntnisse war es für ihn jedoch eine große Erleichterung, daß mit der neuen Heisenbergschen und Schrödingerschen **Quantenmechanik** eine widerspruchsfreie Theorie an die Stelle der alten trat, wobei Pauli selbst nicht zuletzt durch seine intensiven Diskussionen mit Werner Heisenberg einen erheblichen Beitrag zu dieser Entwicklung geleistet hatte.

Bereits 1926 gelang es Pauli, die **stationären Zustände des Wasserstoffatoms** und sein Spektrum mit der **Matrizenmechanik** zu berechnen, was das Vertrauen in die Theorie ungemein stärkte. Im darauffolgenden Jahr 1927 zeigte Pauli dann, wie der **Elektronenspin**, der bis dahin nicht unmittelbar in die **Quantentheorie** einbezogen war, durch Erweiterung der **Schrödinger-Gleichung** berücksichtigt werden kann. Diese Gleichung erwies sich als Grenzfall der von **Paul Dirac** aufgestellten **relativistischen Wellengleichung**. Im Jahre 1928 nahm Pauli einen Ruf an die Eidgenösische Technische Hochschule in Zürich an, der er bis an sein Lebensende angehörte.

Die enge Zusammenarbeit mit Werner Heisenberg setzte sich auch in den Züricher Jahren fort und führte 1929 und 1930 zu zwei gemeinsamen Veröffentlichungen über die Wechselwirkung von Strahlung und Materie, die zu den frühesten Arbeiten zur **Quantenfeldtheorie** gehören. Die Fähigkeit, ein neues Gebiet der Physik in meisterhafter Form darzustellen, der für Jahrzehnte kaum etwas hinzuzufügen war, bewies er erneut bei der Abfassung des Kapitels **'Die allgemeinen Prinzipien der Wellenmechanik'** für das Handbuch der Physik. Diese Arbeit wurde mit nur geringfügigen Änderungen in die Neuauflage des Jahres 1958 übernommen. In Zürich glückte ihm 1930 eine neue wichtige Entdeckung. Mit der in diesem Jahr erstmals geäußerten Hypothese eines neutralen, später **Neutrino** genannten Teilchens war es möglich, das Rätsel des **Beta-Zerfalls** zu lösen. Sechs Jahre vorher, 1924, hatte Pauli schon einen anderen bedeutsamen Beitrag zur Kernphysik geleistet. Er hatte die Existenz eines **Kernspins** postuliert, um die Hyperfeinstruktur von Spektrallinien erklären zu können. Diese Vermutung fand dann ihre experimentelle Bestätigung, und fortan dienten Hyperfeinstrukturuntersuchungen ihrerseits der Bestimmung von Kernspins. 1940 gelang es Pauli in einer Arbeit über den Zusammenhang von Statistik und Spin der Elementarteilchen, das **Ausschließungsprinzip** aus anderen physikalischen Prinzipien herzuleiten.

Die Jahre 1940 bis 1946 verbrachte Pauli in den USA am Institute for Advanced Study in Princeton. Hier beschäftigte er sich vornehmlich mit der **Mesonentheorie**. 1946 kehrte Pauli nach Zürich zurück, wo er sein Interesse vor allem der **Quantenfeldtheorie** und den **Elementarteilchen** zuwandte. Seit 1953 führte er eine intensive Diskussion mit Werner Heisenberg um die von diesem entwickelten Vorstellungen zur *"Einheitlichen Theorie der Elementarteilchen"*. Pauli zögerte, **Heisenberg** darin zuzustimmen und distanzierte sich schließlich von dieser Theorie.

Pauli gehörte zu den großen Physikern des 20.Jahrhunderts. An den wichtigen Entwicklungen zu seinen Lebzeiten, der **Quantenmechanik**, der **Kernphysik**, der **modernen Feldtheorie** und der **Teilchenphysik**, hatte er wesentlichen Anteil. Dabei hat er durch seine Beteiligung an wissenschaftlichen Diskussionen, durch seine umfangreiche wissenschaftliche Korrespondenz und durch seine starke Ausstrahlung auf seine zahlreichen Schüler großen Einfluß auf die Entwicklung der Physik genommen. Dazu stellten **Ralph Kronig** und **Victor F. Weisskopf** fest:

"Seine Veröffentlichungen enthalten aber, wie dies bei der ungewöhnlich kritischen Einstellung Paulis begreiflich ist, nur einen kleinen Teil der wirklich von ihm geleisteten Arbeit. Pauli berichtetete in seinen Abhandlungen über die fertigen Ergebnisse, aber nicht über den langen, oft mühevollen Weg, der zu ihnen geführt hatte, und auch nicht über unfertige Versuche. Ein Teil seiner im Stillen geleisteten Arbeit hat sich in seinem umfangreichen Briefwechsel niedergeschlagen."

Hinter seiner Sachlichkeit verbarg sich allerdings auch ein tiefes Interesse an philosophischen und letzlich menschlichen Problemen, über die er z.T. ausgedehnte Diskussionen mit dem Psychologen **Carl Gustav Jung** führte.