2. Übungsblatt zur Vorlesung Quantenmechanik

Abgabe: Freitag, 05.11.2004 in den Übungen.

Aufgabe 4: *Basiswechsel* **(6 Punkte)**

Durch $\{|a_1\rangle, |a_2\rangle\}$ sei in einem zweidimensionalen komplexen Hilbertraum eine orthonormierte Basis gegeben (Basis der $\{a\}$-Darstellung).In den Präsenzübungen vom 29.10.04 haben Sie bereits gezeigt , dass die Vektoren

$$|b_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|a_1\rangle + i|a_2\rangle\right) \qquad |b_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|a_1\rangle - i|a_2\rangle\right)$$

auch eine orthonormierte Basis bilden (Basis der $\{b\}$-Darstellung).

a) Sei $\hat{U}$ der unitäre Operator, der den Basiswechsel (Übergang von der $\{a\}$-Darstellung zur $\{b\}$-Darstellung) vermittelt:

$$|b_1 >= \hat{U}|a_1 > \qquad \text{und} \qquad |b_2 >= \hat{U}|a_2 >$$

Welche Matrix ist diesem Operator $\hat{U}$ in der $\{a\}$-Darstellung zugeordnet ?

b) Ein Vektor $|\psi >$ sei in der $\{a\}$-Darstellung gegeben durch

$$|\psi >= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|a_1 > + |a_2 >\right) \qquad .$$

Welche Komponenten hat $|\psi >$ in der $\{b\}$-Darstellung, d.h. schreiben Sie $|\psi >$ als Linearkombination der Basisvektoren $|b_k >$.

c) Ein linearer Operator $\hat{T}$ sei in der $\{a\}$-Darstellung durch die Matrix

$$\mathbf{T^{(a)}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

gegeben. Wie lautet die Matrix $\mathbf{T^{(b)}}$ von $\hat{T}$ in der b-Darstellung ?

Aufgabe 5: *Fourier-Transformation* **(8 Punkte)**

Die Fourier–Transformation einer Funktion $\phi(x)$ ist gegeben durch

$$\hat{\phi}(k) = \mathcal{F}[\phi(x); k] = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-ikx}\phi(x)\,.$$

Die inverse Transformation ist dann

$$\phi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{ikx}\hat{\phi}(k)\,.$$

a) Seien ϕ, ψ Funktionen und $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $a \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie folgende Eigenschaften der Fourier–Transformation:

$$\begin{array}{ll} (a) & \mathcal{F}[\alpha\phi(x) + \beta\psi(x); k] = \alpha\mathcal{F}[\phi(x); k] + \beta\mathcal{F}[\psi(x); k] \\ (b) & \mathcal{F}[\phi(x-a); k] = e^{-ika}\mathcal{F}[\phi(x); k] \\ (c) & \mathcal{F}[\phi(ax); k] = a^{-1}\mathcal{F}[\phi(x); k/a],\ a > 0 \\ (d) & \mathcal{F}[\phi(-x); k] = \mathcal{F}[\phi(x); -k] \end{array}$$

b) Berechnen Sie die Fourier-Transformierte von $\phi_a(x) = \Theta(x)\Theta(a-x)$ (zur Definition der Θ-Funktion, siehe Aufgabe 6).

c) Berechnen Sie die Fourier-Transformierte von $\phi(x) = \Theta(x+a)\Theta(a-x)$. Skizzieren Sie das Ergebnis und betrachten Sie das Produkt $\Delta x \cdot \Delta k$ für von Ihnen geeignet definierter Breiten Δx und Δk.

d) Berechnen Sie die Fourier-Transformierte der Gauß Funktion $f(x) = Ne^{-\frac{1}{2}cx^2}$. Dabei seien N und c reelle postive Konstanten.

Aufgabe 6: **δ-Funktion** **(6 Punkte)**

Die Θ-Funktion ist gegeben durch:

$$\Theta(x-a) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x < a \\ \frac{1}{2} & \text{für} \quad x = a \\ 1 & \text{für} \quad x > a \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass die Ableitung der Θ-Funktion die Eigenschaften der δ-Funktion besitzt:

$$\delta(x-a) = 0 \qquad \text{für } x \neq a. \qquad \int_A f(x)\delta(x-a)dx = f(a) \quad \text{für } a \in A.$$

(b) Zeigen Sie die folgenden Beziehungen:

$$\begin{aligned} &\delta(-x) = \delta(x) \\ &x\delta(x) = 0 \\ &x\delta'(x) = -\delta(x) \\ &\delta(bx) = b^{-1}\delta(x) \quad \text{für} \quad b > 0 \end{aligned}$$

wobei diese Identitäten nur innerhalb von Integralen gelten in dem Sinne, dass $g(x) = h(x)$ genau dann wenn $\int f(x)g(x)dx = \int f(x)h(x)dx$.