# 3. Übungsblatt zur Vorlesung Quantenmechanik

Abgabe: Freitag, 12.11.2004 in den Übungen.

**Aufgabe 7**: *zeitunabhängige Schrödingergleichung, 1-dim. Probleme* **(4 Punkte)**
Gegeben sei ein 1-dim. Potenzial $V(x)$. Betrachten Sie die zugehörige 1-dim. zeitabhängige Schrödingergleichung (siehe Vorlesung)

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(x,t) \;=\; \hat{H}\Psi(x,t) \qquad \text{mit} \qquad \hat{H} \;=\; -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)$$

a) Machen Sie den Separationsansatz

$$\Psi(x,t) \;=\; f(t)\,\psi(x).$$

Bestimmen Sie $f(t)$ und zeigen Sie, dass $\psi(x)$ Eigenfunktion des Hamiltonoperators $\hat{H}$ ist, d.h. es gilt

$$\hat{H}\psi(x) \;=\; E\psi(x) \qquad (*)$$

mit einer Konstanten $E$.
*Anmerkung:* $(*)$ heißt zeitunabhängige Schrödingergleichung.

b) Das Potenzial $V(x)$ habe an der Stelle $x = a$ eine Unstetigkeit wie in Fig. 1 dargestellt. Sei nun $\psi_I(x)$ eine Lösung von $(*)$ im Bereich $x \le a$ und $\psi_{II}(x)$ eine Lösung von $(*)$ im Bereich $x \ge a$. Begünden Sie, warum die Lösungen von $(*)$ an der Sprungstelle $x = a$ die Anschlußbedingungen

$$\psi_I(a) = \psi_{II}(a) \qquad \text{und} \qquad \psi_I'(a) = \psi_{II}'(a)$$

erfüllen.
*Anleitung:* Nehmen Sie an, $\psi(x)$ oder $\psi'(x)$ hätte bei $x = a$ ein Verhalten $\sim \Theta(x-a)$ und überlegen, welche Konsequenzen dies für $\psi''(x)$ hätte.

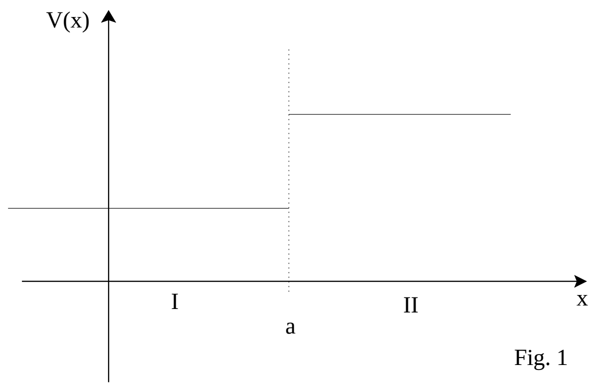


Fig. 1

**Bitte wenden !**

**Aufgabe 8**: *1-dim. Potenzialstufe* **(6 Punkte)**

Ein Strom von Teilchen der Masse $m$ und Energie $E < V_0$ falle von links in positiver x-Richtung laufend auf die Potenzialstufe

$$V(x) = V_0\Theta(x) \qquad \text{mit der Konstanten} \qquad V_0 > 0 \quad .$$

a) Zeigen Sie:

$$\psi(x) = \begin{cases} e^{ikx} + re^{-ikx} & \text{für} \quad x < 0 \quad \text{(Bereich I)} \\ te^{-\kappa x} & \text{für} \quad x > 0 \quad \text{(Bereich II)} \end{cases}$$

ist eine Lösung der zugehörigen zeitunabhängigen Schrödingergleichung. Drücken Sie $k$ und $\kappa$ durch $E$ und $V_0$ aus und bestimmen Sie $r$ und $t$ als Funktion von $k$ und $\kappa$.

Anleitung : Benutzen Sie die in Aufgabe 7b) angegebenen Stetigkeitsbedingungen für $\psi$. Betrachten Sie im Bereich II nur solche Lösungen, für die $\int_0^\infty dx|\psi(x)|^2 < \infty$ ist.

Anmerkung: Es wurde ohne Einschränkung der Allgemeinheit angenommen, dass die Amplitude der von links einfallenden Welle gleich 1 ist.

b) Berechnen Sie $|r|^2$ und interpretieren Sie das Ergebnis. Wie kann man $t \neq 0$ interpretieren ?

c) Betrachten Sie den Grenzfall einer unendlich hohen Potentialstufe $V_0 \to \infty$. Bestimmen Sie für diesen Grenzfall $r$ und $t$ und zeigen Sie, dass dann $\psi(0) = 0$ ist.

Anmerkung: Dies ist die allgemeine Randbedingung für eine unendlich hohe Potenzialschwelle.

**Aufgabe 9**: *1-dim. Problem: unendlich tiefer Potenzialtopf* **(8 Punkte)**

Betrachten Sie den eindimensionalen, unendlich tiefen Potenzialtopf

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 < x < L \\ +\infty & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Bestimmen Sie die (auf eins normierten) Lösungen der zugehörigen zeitunabhängigen Schrödingergleichung, d.h. bestimmen Sie die (auf eins normierten) Eigenfunktionen $\psi(x)$ und die zugehörigen Energieeigenwerte $E$ des zugehörigen Hamiltonoperators $\hat{H}$.

Tipp: Verwenden Sie die Randbedingung für eine unendlich hohe Potenzialschwelle (siehe Aufgabe 8 c).

b) Berechnen Sie für die Eigenfunktionen aus a) die Erwartungswerte von Ort und Impuls sowie deren mittlere quadratische Abweichung.

c) Bestimme Sie nun die (auf eins normierten) Eigenfunktionen von $\hat{H}$ für den Fall

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } -L/2 < x < L/2 \\ +\infty & \text{sonst,} \end{cases}$$

so dass ihre Symmetrieeigenschaften bzgl. Spiegelung an $x = 0$ offensichtlich werden (am einfachsten aus den Lösungen von a)). Wie ändern sich die Energieeigenwerte ? Wie ändern sich die Erwartungswerte von Ort und Impuls sowie deren mittlere quadratische Abweichung ?