

## 9. ÜBUNGSBLATT ZUR VORLESUNG QUANTENMECHANIK

Abgabe: Freitag, **21.01.2005** in den Übungen.**Aufgabe 24:** *Unschärfe der Drehimpulskomponenten* (5 Punkte)

$\{|lm\rangle, \quad l = 0, \frac{1}{2}, 1, \dots; \quad m = -l, -l + 1, \dots, +l\}$  sei eine Standardbasis von Drehimpulzeigenzuständen.

- Berechnen Sie die Unschärfen  $\Delta\hat{L}_x$  und  $\Delta\hat{L}_y$  sowie das Produkt  $\Delta\hat{L}_x \cdot \Delta\hat{L}_y$  als Funktion der Quantenzahlen  $l$  und  $m$ . Für welches  $m$  (bei gegebenem  $l$ ) nehmen  $\Delta\hat{L}_x$  und  $\Delta\hat{L}_y$  den kleinsten Wert an und wie groß ist dieser?
- Vergleichen Sie das Ergebnis aus a) mit dem Ergebnis, das Sie erhalten, wenn Sie die in der Vorlesung für das Produkt der Schwankungsquadrate zweier beliebiger Observablen hergeleitete Unschärferelation auf die Komponenten  $\hat{L}_x$  und  $\hat{L}_y$  anwenden.

**Aufgabe 25:** (2 Punkte)

Beweisen Sie die Identität:

$$[\hat{A}, [\hat{B}, \hat{C}]] + [\hat{B}, [\hat{C}, \hat{A}]] + [\hat{C}, [\hat{A}, \hat{B}]] = 0$$

**Aufgabe 26:** *Zeitabhängige Schrödinger-Gleichung* (6 Punkte)

Betrachten Sie ein Teilchen der Masse  $m$  in einem zum Nullpunkt symmetrischen unendlich tiefen Kastenpotenzial (siehe auch Aufgabe 9 c)

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } |x| \leq a \\ +\infty & \text{für } |x| > a \end{cases} .$$

Betrachten Sie nun die Zeitabhängigkeit der Wellenfunktion  $\psi(x, t)$  eines nichtstationären Zustands, der zur Zeit  $t = 0$  aus der normierten Summe der Grundzustandseigenfunktion  $\psi_0(x)$  und der Wellenfunktion  $\psi_1(x)$  des ersten angeregten Zustands gebildet wird.

- Veranschaulichen Sie sich den zeitlichen Verlauf von  $|\psi(x, t)|^2$  durch Skizzen für  $t/T = 0, 1/8, 1/4, 3/8, 1/2, 5/8$  und  $3/4$ , wobei  $T := h/(E_1 - E_0)$ .  
Für Computerbilder gibt es **3 Extrapunkte**.
- Vergleichen Sie den zeitlichen Verlauf des Erwartungswertes  $\langle \psi | \hat{Q} | \psi \rangle$  des Ortsoperators  $\hat{Q}$  mit der klassischen Teilchenbahn (in einer Skizze).

**Aufgabe 27:** *Heisenberg-Bild: eindimensionaler harmonischer Oszillator* (7 Punkte)

In der Vorlesung haben Sie das Heisenberg-Bild kennengelernt. Im Heisenberg-Bild steckt die gesamte Zeitabhängigkeit in den Operatoren und die Dynamik wird durch die Heisenbergschen Bewegungsgleichungen beschrieben. Betrachten Sie nun den eindimensionalen harmonischen Oszillator mit  $\hat{H} = \frac{1}{2m}\hat{P}_H^2 + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{Q}_H^2$ .

- Lösen Sie die Heisenbergschen Bewegungsgleichungen für die Operatoren  $\hat{Q}_H(t)$  und  $\hat{P}_H(t)$  der Orts- und Impulsvariablen des harmonischen Oszillators und drücken Sie  $\hat{P}_H(t)$  und  $\hat{Q}_H(t)$  als Funktion der Operatoren  $\hat{P}_S = \hat{P}_H(0)$  und  $\hat{Q}_S = \hat{Q}_H(0)$  im Schrödinger-Bild aus.

**Tipp:** Durch nochmalige Differentiation der Heisenbergschen Bewegungsgleichungen nach der Zeit entkoppeln diese.

- Berechnen Sie mit dem Ergebnis aus (a) **zwei** der folgenden drei Vertauschungsrelationen zu verschiedenen Zeiten  $t_1$  und  $t_2$ :

$$[\hat{P}_H(t_2), \hat{P}_H(t_1)] , [\hat{P}_H(t_2), \hat{Q}_H(t_1)] \text{ bzw. } [\hat{Q}_H(t_2), \hat{Q}_H(t_1)]$$

---

## Niels Bohr

---



Niels Bohr wurde am 7. Oktober 1885 in Kopenhagen geboren und starb auch dort am 18. November 1962.

Niels Bohr stammte aus einer Familie von Wissenschaftlern: Sein Vater Christian Bohr war Physiologe, sein Bruder Harald Bohr Mathematiker. Bereits seiner ersten Forschungsarbeit (einer Präzisionsmessung der Oberflächenspannung des Wassers) wurde im Jahre 1906 eine Goldmedaille der Königlich Dänischen Akademie der Wissenschaften verliehen. Bohr wurde 1911 mit einer Arbeit über die Theorie der Metallelektronen promoviert. Er zeigte darin, daß die magnetischen Eigenschaften der Metalle mit den Vorstellungen der klassischen Physik nicht verstanden werden können. Er ging im Oktober desselben Jahres nach England, zuerst zu Joseph John Thomson, bald aber (im März 1912) nach Manchester zu Ernest Rutherford, mit dem ihn bald eine tiefgehende Freundschaft verband.

Im Zusammenwirken mit der Arbeitsgruppe in Manchester griff Bohr rasch die Vorstellungen vom Atom, die dieser Ende 1910 aufgrund der Winkelstreuung von Alpha-Teilchen in dünnen Materialschichten entwickelt hatte, auf, da ihn die Möglichkeit faszinierte, die Eigenschaften der Elemente aus einer einzigen Zahl, der Kernladung oder Ordnungszahl abzuleiten. Er unterschied auch bereits früh zwischen den chemischen Eigenschaften und den Phänomenen der Radioaktivität, die im Kern ihren Ursprung haben. Seine Schlüsse auf die Existenz der Isotopie und das Bestehen der etwa gleichzeitig von **Kasimir Fajans** und **Frederick Soddy** entdeckten radioaktiven Verschiebungsgesetze konnte er im Sommer 1912 nicht veröffentlichen, da Rutherford der Meinung war, daß diese Folgerungen aus seinem Atommodell zu gewagt seien. Da in jener Zeit noch keine Klarheit herrschte über die Zahl der in den einzelnen Atomen enthaltenen Elektronen, entwickelte Bohr zunächst eine

Theorie der Bremsung von Alpha-Teilchen, deren Anwendung auf Wasserstoff und Helium zeigte, daß in diesen beiden Elementen ein bzw. zwei Elektronen vorhanden sind. Darüberhinaus war Bohr unter dem Eindruck des 1. Solvay-Kongresses in Brüssel überzeugt, daß der Schlüssel zum Verständnis des Atombaus im **Planckschen Wirkungsquantum** zu suchen sei. So konnte er unter Verwendung einer dem Planckschen Vorgehen beim **Harmonischen Oszillator** analogen Formel zeigen, daß wohl ein Wasserstoff-, nicht aber ein Heliummolekül existieren kann.

Nachdem Bohr im Herbst 1912 an der Universität von Kopenhagen Assistent geworden war, bemühte er sich um eine zusammenfassende Darstellung der in Manchester über den Atombau gesammelten Ideen. Noch im Januar des Jahres 1913 hatte er die Spektralgesetze, weil sie ihm zu kompliziert schienen, nicht berücksichtigt, aber im darauffolgenden Monat bezog er sie, angeregt durch die Lektüre eines Buches von Johannes Stark (Prinzipien der Atomdynamik II) und eine Bemerkung des Spektroskopikers **Hans Marius Hansen**, der ihn auf die Einfachheit der **Formel für die Spektrallinien des Wasserstoffs** von Johann Balmer aufmerksam machte, in seine Theorie ein. Im März 1913 übersandte er Rutherford den ersten Teil seiner im Philosophical Magazine Vol.26 erschienenen berühmten Artikel **'On the Constitution of Atoms and Molecules'**, in der erstmals die Balmerserie aus der Vorstellung diskreter Atomzustände abgeleitet wurde. In derselben Abhandlung zeigte Bohr, daß gewisse von **Edward Pickering** in den Spektren ferner Sterne beobachtete und bisher dem Wasserstoff zugeschriebene Spektrallinien dem ionisierten Helium zuzuordnen sind. Die experimentelle Entscheidung dieser Frage durch **Evan Jenkin Evans** zugunsten der Bohrschen Ansicht trug wesentlich dazu bei, daß die neue Theorie sich rasch durchsetzte. Während die experimentelle Forschung mit den Versuchen von James Franck und Gustav Hertz (die Bohr erstmals richtig deutete) sowie von Henry G.J. Moseley weitere gewichtige Argumente für seine Theorie beisteuerte, bemühte sich Bohr beständig um eine Klärung der zugrundeliegenden Prinzipien.

Einen wesentlichen Fortschritt in dieser Richtung brachten Arnold Sommerfelds Arbeiten über die doppelte Quantelung im Jahre 1915, die Bohr mit Hilfe der **Hamiltonschen Mechanik** zu einer Theorie der mehrfach-periodischen Bewegungen erweiterte. Trotz gewisser Teilerfolge blieb die feinere Struktur der Spektren zwar weiterhin unaufgeklärt, es gelang Bohr aber, mit Hilfe des 1913 schon (in Gestalt einer Analogie der **Quantenmechanik** zur klassischen Physik) eingeführten **Korrespondenzprinzips** auch das Problem der Auswahlregeln und der Linienintensitäten in Angriff zu nehmen. Die Entwicklung bis zu diesem Punkt spiegelt sich in Bohrs in den Jahren 1918 bis 1922 publizierten Arbeiten unter dem Titel **'On the Quantum Theory of Line Spectra'** wider.

Der äußere Lebensweg Bohrs verlief in dieser Zeit über die folgenden Stationen: 1913 wurde er Dozent an der Universität Kopenhagen, von 1914 bis 1916 war er auf Einladung Rutherford wieder in Manchester, danach ging er als Professor nach Kopenhagen zurück, wo ihm 1920 das Institut für theoretische Physik eingerichtet wurde, dem er zeitlebens als Direktor vorgestanden hat. 1922 erhielt Bohr den **Nobelpreis**. Im Jahre 1931 überließ die dänische Regierung Niels Bohr in Anerkennung seiner großen Leistungen den Carlsberg-Ehrenwohnsitz, der nach Willen der Stiftung dem jeweils bedeutendsten dänischen Wissenschaftler zugehört soll.

Einen gewissen Wendepunkt auf dem Wege zur Klärung der quantentheoretischen Grundlagen stellte die von Bohr gemeinsam mit **Hendrik Antony Kramers** und John Clarke Slater 1924 verfaßte Arbeit **'The Quantum Theory of Radiation'** dar, in der angenommen wurde, daß die **Sätze von der Impuls- und Energieerhaltung** nur statistische Gültigkeit besäßen. Daß diese Annahme nicht zu halten war, zeigten sehr bald die Experimente von Hans Geiger und Walter Bothe sowie von Arthur Holly Compton und **Alfred W. Simon**, die nachwiesen, daß die Erhaltungssätze auch den einzelnen Elementarprozess

beherrschen.

Im Anschluß an diese Arbeit gelang Werner Heisenberg 1925 die Formulierung der **Quantenmechanik**. Damit trat die **Quantentheorie** in ihr Schlußstadium. Es folgten nun rasch aufeinander: 1926 Erwin Schrödingers **Wellenmechanik** und Max Borns Interpretation der **Wellenfunktion**, 1927 **Heisenbergs Unschärferelation** und Bohrs Vorstellung der **Komplementarität**. Die Unschärferelation und die Idee der Komplementarität stellen den Inhalt der sog. **'Kopenhagener Deutung der Quantentheorie'** dar. Sie gingen hervor aus Bohrs und **Heisenbergs** - Heisenberg war damals Lektor am Kopenhagener Institut Bohrs - gemeinsamem Bemühen um eine widerspruchsfreie Formulierung der Theorie. Während **Heisenberg** dabei zu dem Ergebnis geführt wurde, daß der Genauigkeit, mit welcher kanonisch konjugierte Größen (wie Ortskoordinaten und Impuls) gleichzeitig gemessen werden können, durch die Natur im Planckschen Wirkungsquantum eine Grenze gesetzt ist, kam Bohr zu der Ansicht, daß die Natur zu ihrer vollständigen Beschreibung den Gebrauch sich zwar gegenseitig ausschließender, sich aber andererseits gegenseitig ergänzender (zueinander komplementärer) Vorstellungen zuläßt (wie z.B. im **Teilchen/Welle-Dualismus des Lichtes und der Materie**). Bohr hat diesen Gedanken später auch in gewisse Bereiche der Biologie und Philosophie übertragen, indem er daraufhinwies, wie auch dort zur Erfassung von bestimmten Sachverhalten komplementäre Betrachtungsweisen angewandt werden. Nach Lösung des Problems der Meßbarkeit der elektrodynamischen Feldgrößen (1931 -1933) beschäftigte sich Bohr 1936 - 1943 mit Fragen der Kernphysik und entwickelte u.a. das sog. **Tröpfchenmodell des Kerns** sowie eine Theorie der von Otto Hahn und Fritz Straßmann entdeckten **Kernspaltung**.

Im Jahre 1943 nahm Bohrs Leben eine dramatische Wendung. Von Freunden gewarnt, verließ er seine seit 1940 besetzte Heimat und floh im Segelboot über den Öresund nach Schweden. Von dort holte ihn der britische Geheimdienst nach England. Später kam er in die Vereinigten Staaten und wurde am Atombombenprojekt beteiligt. 1945 kehrte er nach Kopenhagen zurück. Nach der Gründung des großen europäischen Kernforschungszentrums CERN brachte man die theoretische Abteilung zunächst in Bohrs Institut unter. Als Bohr 1962 starb, mußte er die **Theorie der Supraleitung**, seinen letzten Forschungsgegenstand, ungelöst zurücklassen. Sein Nachfolger in der Leitung des berühmten Kopenhagener Instituts für theoretische Physik wurde sein Sohn **Aage Bohr**

---

Quelle: Armin Hermann 'Lexikon - Geschichte der Physik A-Z', Aulis-Verlag Deubner & Co KG 1978

---