

Universität Heidelberg

MATHEMATISCHER VORKURS  
ZUM STUDIUM DER PHYSIK  
ÜBUNGEN

**Aufgaben zu Kapitel 3**

(aus: K. Hefft, Mathematischer Vorkurs zum Studium der Physik, sowie Ergänzungen)

AUFGABE 3.1: Graphische Darstellung von Folgen

Veranschaulichen Sie sich die besprochenen Folgen durch graphische Darstellung.  
Projizieren Sie die Punkte auf die 2-Achse.

F1)  $(n)_{n \in \mathbb{N}}$

F2)  $[(-1)^{n+1}]_{n \in \mathbb{N}}$

F3)  $(\frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}}$

F4)  $(\frac{1}{n!})_{n \in \mathbb{N}}$

F5)  $(\frac{n}{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$

F6)  $(q^n)_{n \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{R}}$

F7)  $(\frac{(-1)^{n+1}}{n})_{n \in \mathbb{N}}$

F8)  $(\frac{1}{n^2})_{n \in \mathbb{N}}$

F9)  $(n \cdot q^n)_{n \in \mathbb{N}}$

F10)  $[(1 + \frac{1}{n})^n]_{n \in \mathbb{N}}$

### AUFGABE 3.2: Beschränktheit von Folgen

Untersuchen Sie die besprochenen Folgen auf Beschränktheit.

### AUFGABE 3.3: Monotonie von Folgen

Untersuchen Sie die besprochenen Folgen auf Monotonie.

### AUFGABE 3.4: Konvergenz von Folgen

- a) Untersuchen Sie die besprochenen Folgen auf Konvergenz.
- b) Berechnen Sie, damit Sie vorsichtig werden, die ersten zehn Glieder der Folge  $a_n = n \cdot 0.9^n$  und vergleichen Sie mit  $a_{60}$ . Berechnen Sie die ersten zehn Glieder der Folge  $a_n = \frac{n!}{10^n}$  und vergleichen Sie auch hier mit  $a_{60}$ .
- c) Die Folge, die abwechselnd aus den Gliedern von (F1) und (F3) besteht, also  $a_{2n+1} = n$  und  $a_{2n} = \frac{1}{n}$  hat nur einen einzigen Häufungspunkt, nämlich 0. Konvergiert sie gegen 0?

## Zusatzaufgaben

### AUFGABE 3.5: Arithmetische Folge

- a) Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine arithmetische Folge mit  $a_2 = 6$ ,  $a_5 = 15$ . Geben Sie  $a_1$  und  $d$  an.
- b) Zeigen Sie: Ist  $(a_n)$  eine arithmetische Folge, dann gilt:

$$a_n = \frac{a_{n+1} + a_{n-1}}{2}$$

### AUFGABE 3.6: Geometrische Folge

Sei  $(a_n)$  eine geometrische Folge. Alle Glieder seien positiv. Zeigen Sie, dass dann gilt:

$$a_n = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}}$$

### AUFGABE 3.7: Geometrische Folge

Beim Durchdringen einer Glasplatte verliert ein Lichtstrahl  $\frac{1}{15}$  seiner Helligkeit. Der Strahl geht durch 10 solcher Platten. Wieviel Prozent seiner ursprünglichen Helligkeit hat er verloren?

### AUFGABE 3.8: Zinseszins

Ein Kapital von  $K_0 = 10.000$  EURO werde auf ein Sparbuch mit einem Zinssatz von

$p = 3.5\%$  angelegt. Auf welchen Wert ist das Kapital nach einem Jahr, zwei Jahren, 10 Jahren angewachsen ?

AUFGABE 3.9: Wurzel

Benutzen Sie die Iterationsformel  $x_{n+1} = \frac{1}{2} \left( x_n + \frac{a}{x_n} \right)$  um die Quadratwurzel von  $a = 4$  bzw.  $a = 2$  näherungsweise zu berechnen. Berechnen Sie dazu jeweils die ersten 5 Folgglieder und beginnen Sie in beiden Fällen mit dem Startwert  $x_0 = 1$ .

AUFGABE 3.10: Quotientenkriterium

Zeigen Sie mit dem Quotientenkriterium, dass

- a) die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$  sowie die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^4}{3^n}$  konvergieren;
- b) die verallgemeinerte Exponentialreihe  $\exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$  für alle reellen  $x$  konvergiert.