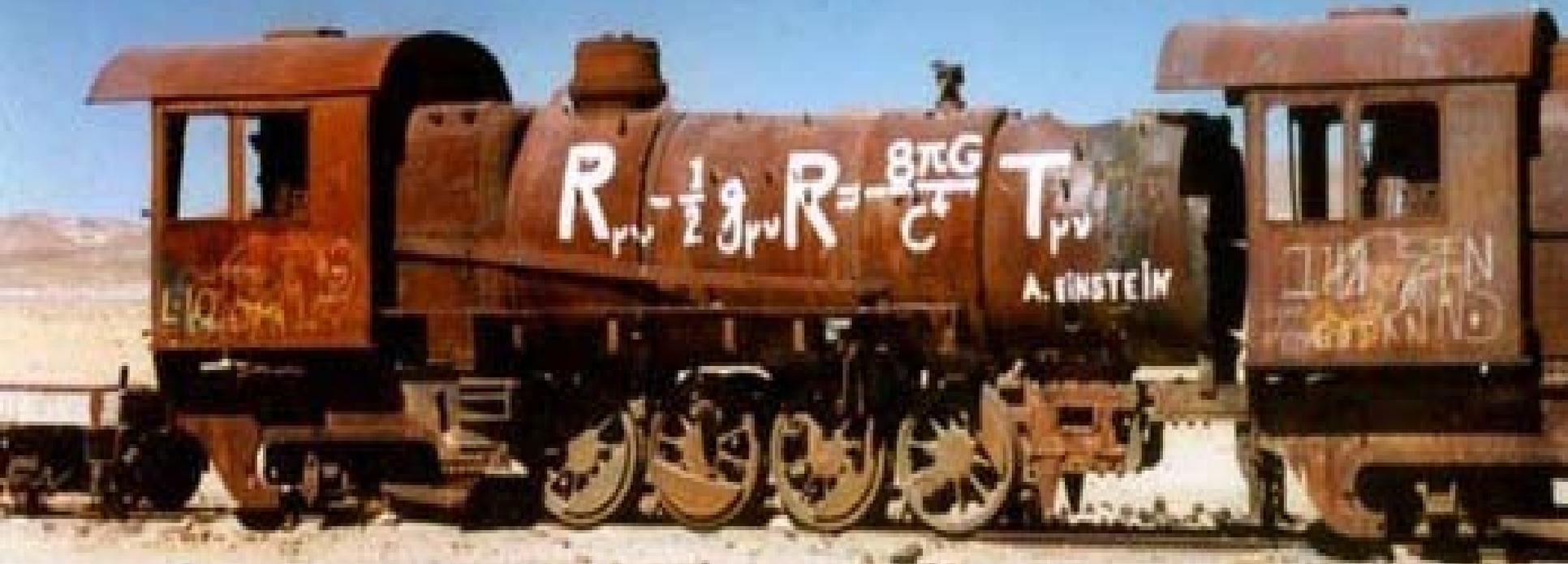


Gravitation regiert die Welt

Einsteins Gleichungen leicht gemacht



Am Anfang war das Gesetz

Λόγος

ἐν ἀρχῇ ἦν ὁ Λόγος καὶ ὁ
Λόγος ἦν πρὸς τὸν Θεὸν καὶ
Θεὸς ἦν ὁ Λόγος

„Im Anfang war das Wort,
und das Wort war bei Gott,
und das Wort war Gott.“

Vorhersagbarkeit

Gleichung für die kosmologische Evolution : Friedmann Gleichung

$$\frac{\partial a}{\partial t} = \sqrt{\frac{\rho}{3M^2}} a$$

$a(t)$: Skalenfaktor
 $\rho(t)$: Energie-
Dichte
 t : Zeit

M : Planck-Masse
verknüpft mit
Gravitationskonstante G

$$G = \frac{1}{8\pi M^2}$$

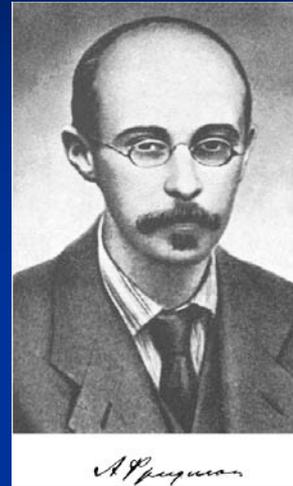
Friedmann Gleichung

- beschreibt die Änderung der kosmologischen Abstände mit der Zeit ; $a(t)$
- enthält Ableitung
- Differentialgleichung
- erlaubt Bestimmung der Zukunft und Vergangenheit wenn a und ρ zu bestimmtem Zeitpunkt t gegeben
- benötigt Eigenschaften von ρ

$$\frac{\partial a}{\partial t} = \sqrt{\frac{\rho}{3M^2}} a$$

Friedmann Gleichung

- Mit Friedmann Gleichung läßt sich Evolution des Universums einfach verstehen

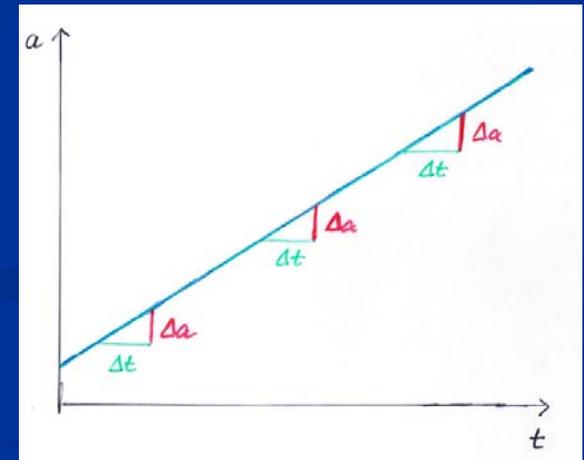
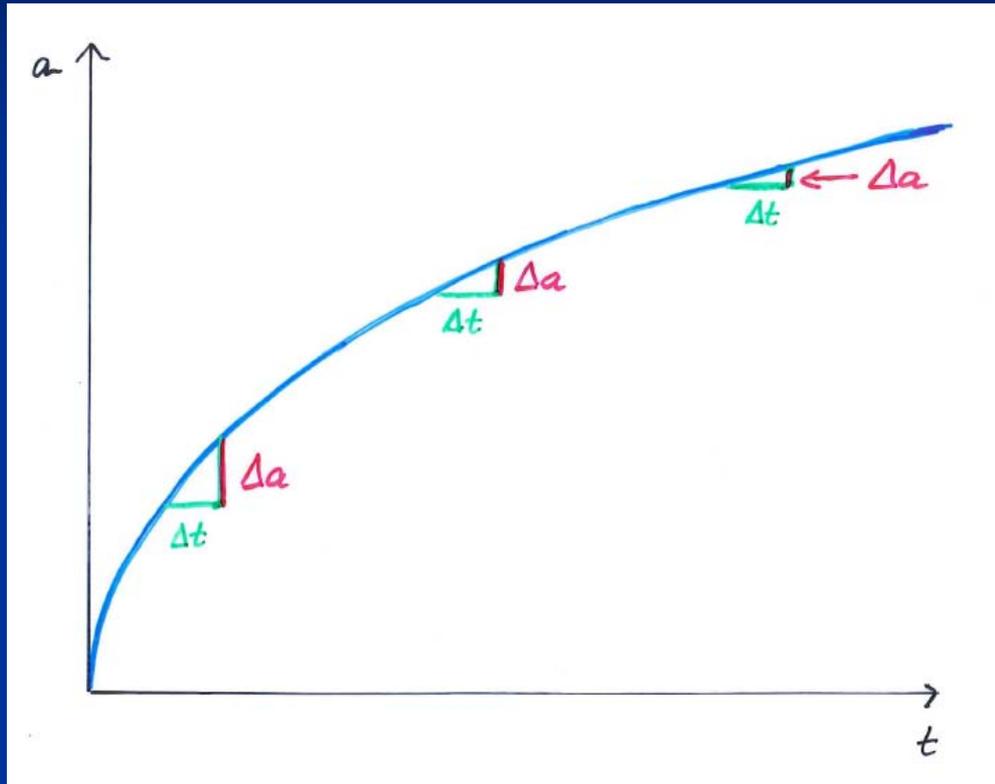


- Spezialfall der Einstein Gleichung

$$\frac{\partial a}{\partial t} = \sqrt{\frac{\rho}{3M^2}} a$$

Ableitung

Spezialfall:
konstante Steigung

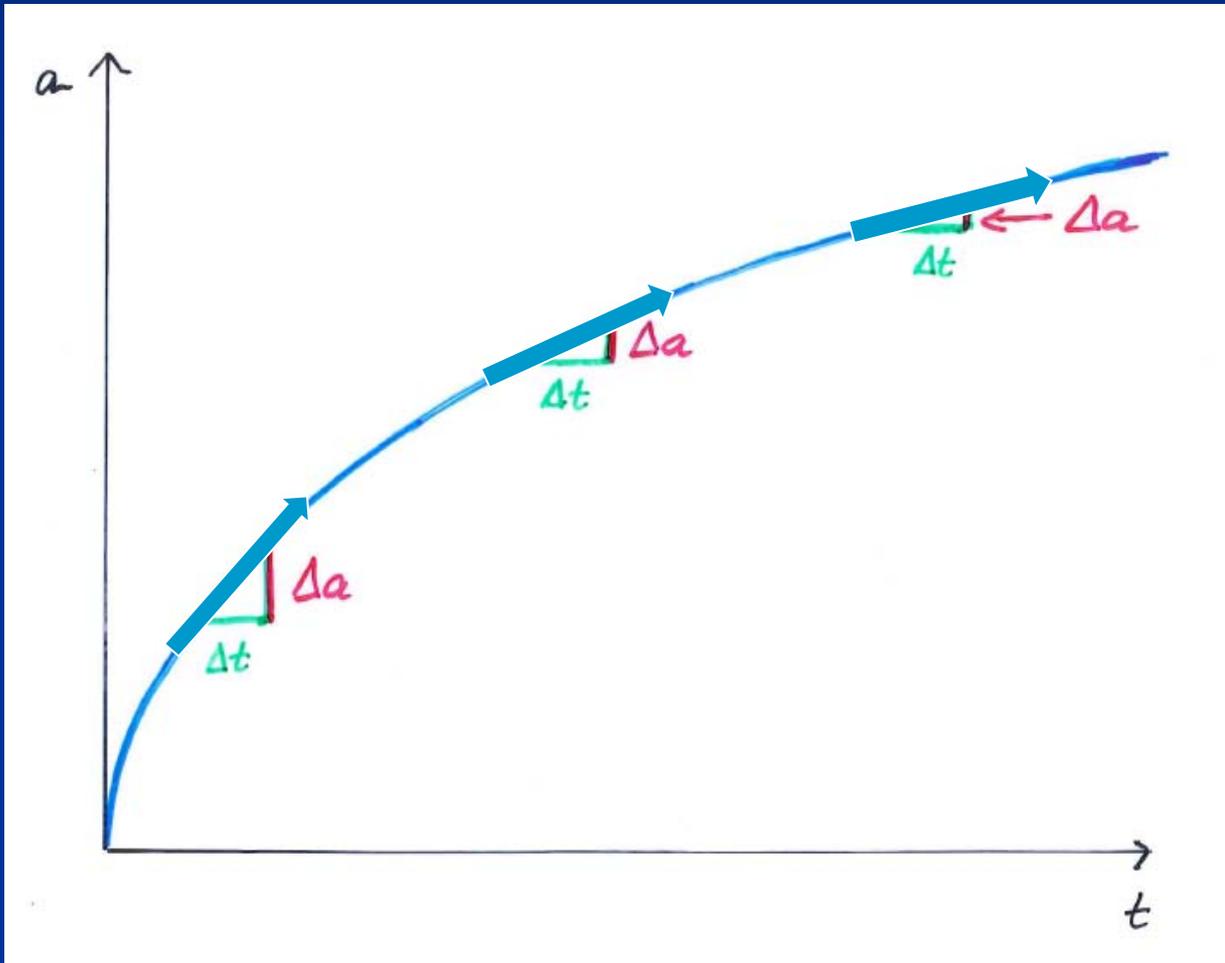


$$\frac{\Delta a}{\Delta t} = v$$

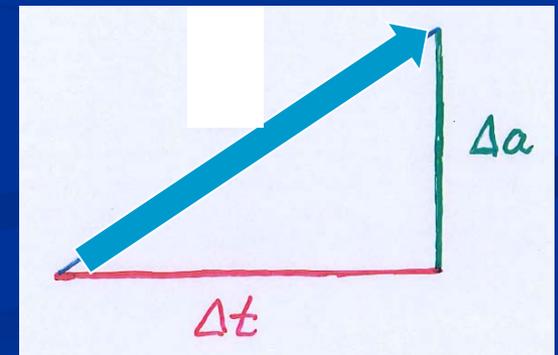
$$\frac{\partial a}{\partial t} = v$$

$$\Delta a = v \Delta t$$

Ableitung und Tangentenvektor

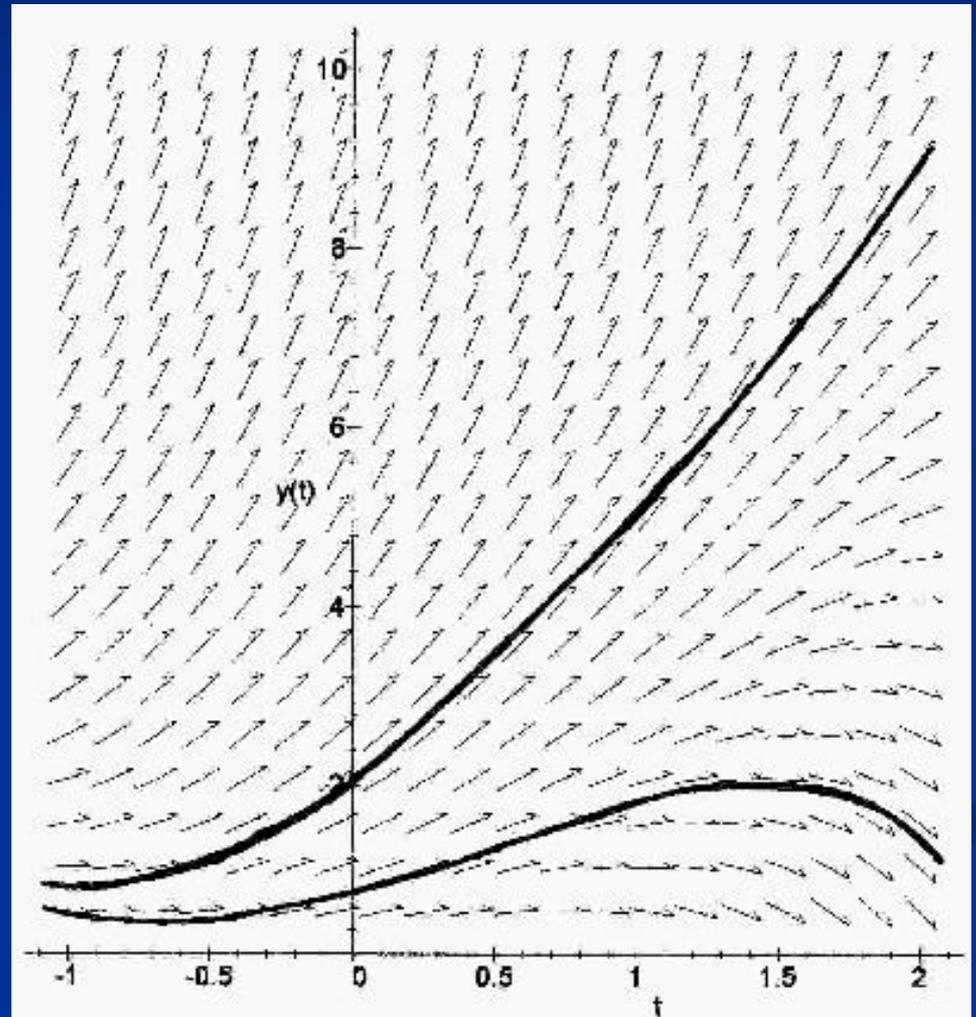
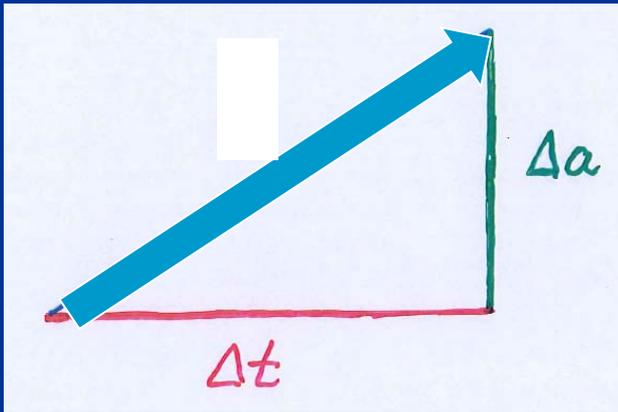


je kleiner v ,
desto kleiner
ist die
Steigung



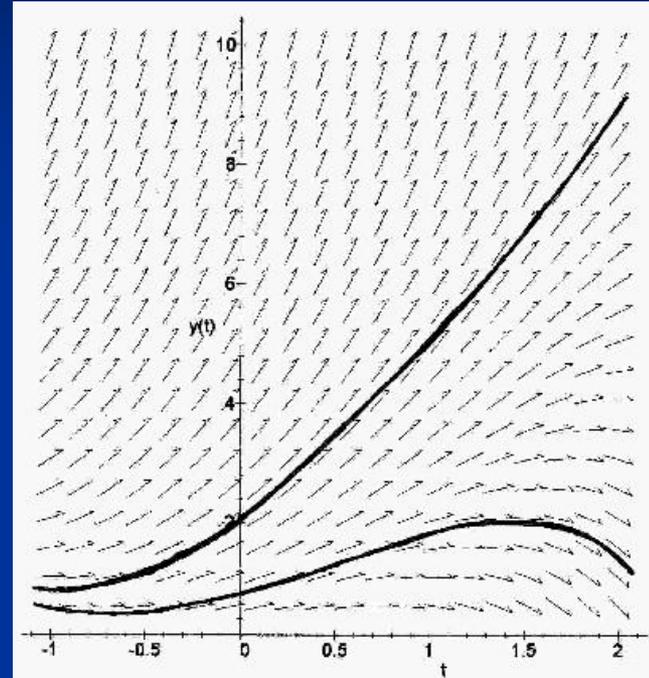
Differentialgleichung

$$\frac{\partial a}{\partial t} = v(a, t)$$



Friedmann Gleichung

- Verschiedene Anfangsbedingungen ergeben verschiedene Geschichten des Universums
- Zukunft und Vergangenheit
- v : Expansionsgeschwindigkeit



$$\frac{\partial a}{\partial t} = v = \sqrt{\frac{\rho}{3M^2}} a$$

wenn Materie dominiert :

$$\frac{\partial a}{\partial t} = \sqrt{\frac{\rho}{3M^2}} a$$

$$\rho = mn$$

n : Teilchendichte

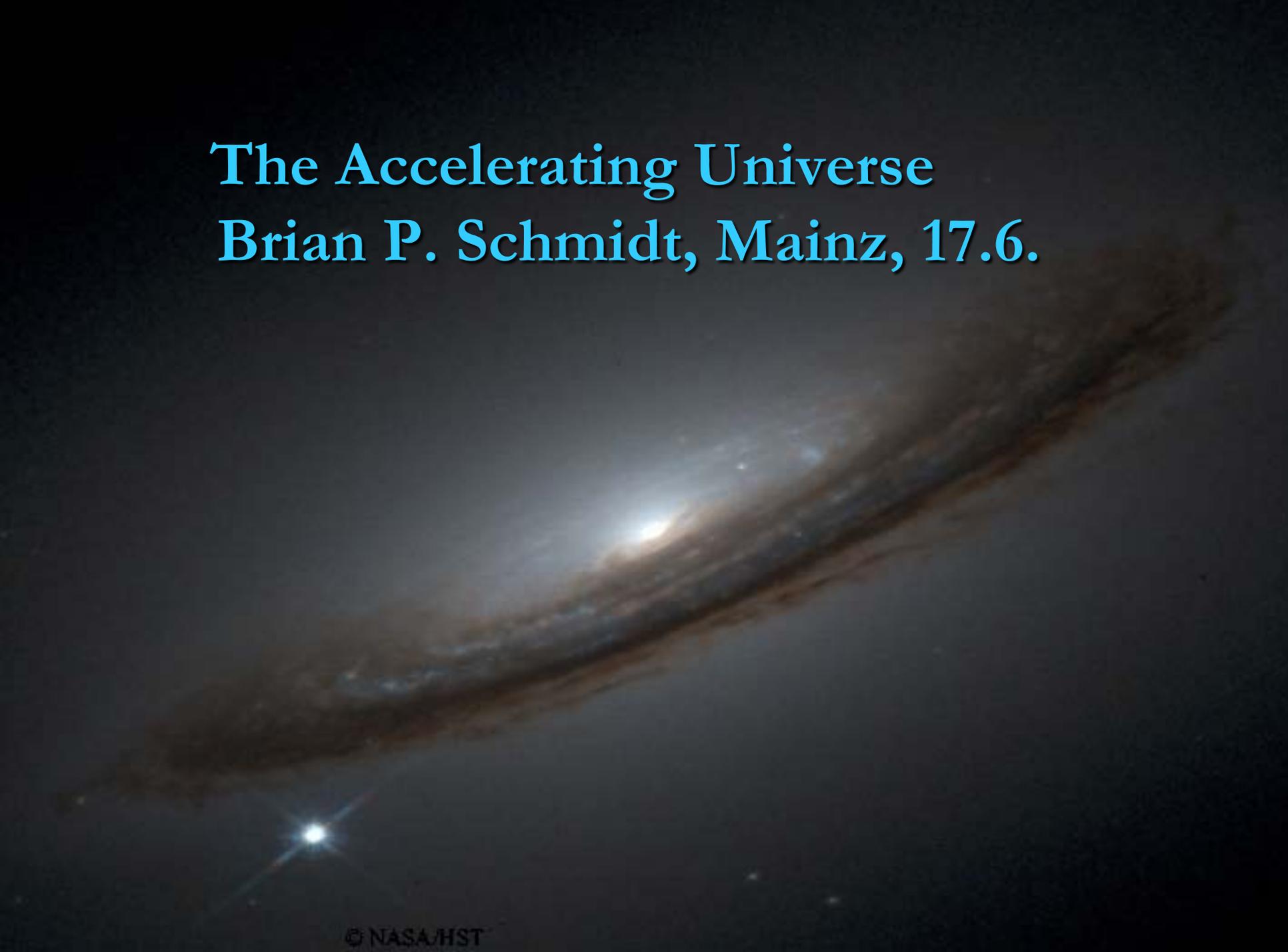
$$n = \frac{c}{a^3}$$

$$\frac{\partial a}{\partial t} = \sqrt{\frac{cm}{3M^2 a}} \sim \frac{1}{\sqrt{a}}$$

Expansion wird
langsamer , wenn
 a größer wird

The Accelerating Universe

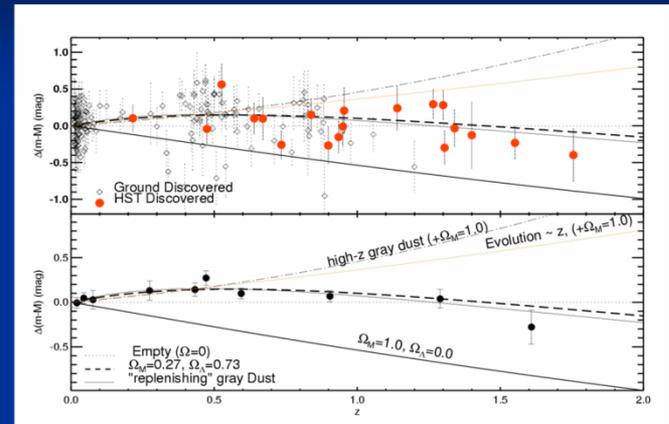
Brian P. Schmidt, Mainz, 17.6.



Vorhersagen für Kosmologie mit Dunkler Energie

*Die Expansion des Universums
beschleunigt sich heute !*

Supernova Ia Hubble-Diagramm



Rotverschiebung z

Riess et al. 2004

**Dunkle Energie und Dunkle Materie
sind (heute) Gegenspieler :**

Dunkle Materie verlangsamt Expansion

Dunkle Energie beschleunigt Expansion

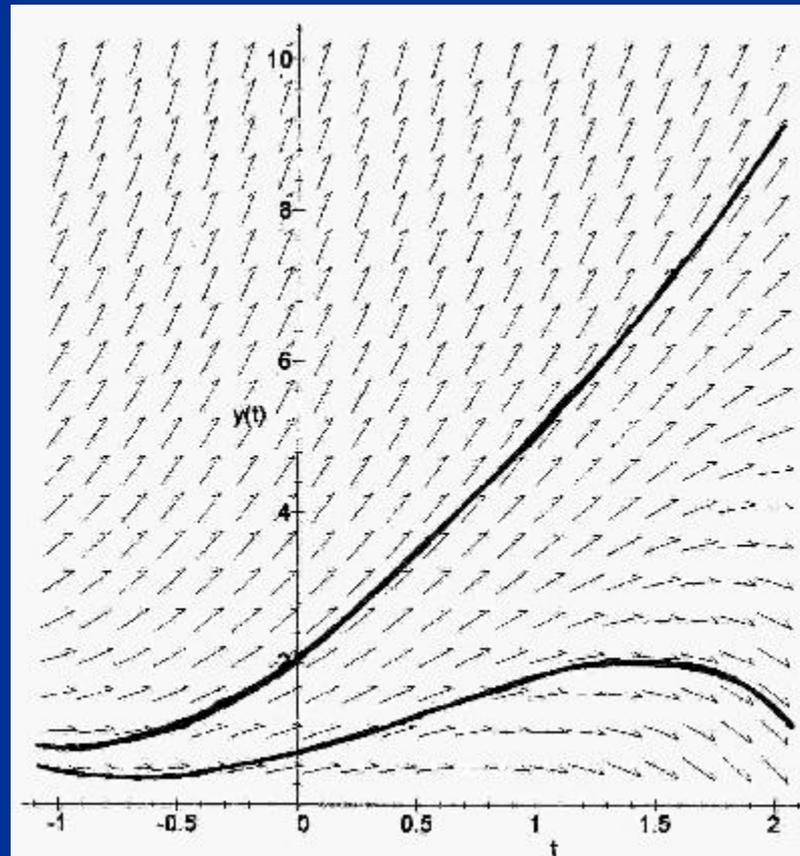
$$\frac{\partial a}{\partial t} = \sqrt{\frac{\rho}{3M^2}} a$$

ρ konstant:

Expansion wird schneller,
wenn a größer wird

(1) Vorhersage der Zukunft aus dem Jetzt

Differentialgleichung



Gravitations - Wechselwirkung

Gravitation dominiert die Kräfte der Makrowelt



The image contains four illustrations above a table. From left to right: 1. A woman with glasses looking up at a red apple falling from her head, representing gravity. 2. A woman lifting a barbell, representing the weak force. 3. A lightning bolt with a red and blue swirl, representing the electromagnetic force. 4. A man lifting a barbell with weights labeled 'Q', representing the strong force.

	Gravitation	Schwach (Elektroschwach)	Elektromagnetisch	Stark
Träger- teilchen	Gravitation (nicht beobachtet)	W^+ W^- Z^0	Photon	Gluon
wirkt auf	Alle	Quarks und Leptonen	Quarks und geladene Leptonen und W^+ W^-	Quarks und Gluonen

- Gravitation ist die weitaus schwächste Wechselwirkung zwischen einzelnen Elementarteilchen
- **Aber : alles zieht sich an !**
- Elektromagnetische Wechselwirkung zum Teil abstoßend

Gravitation dominiert die Kräfte der Makrowelt

Elektromagnetismus : $+$ und $-$

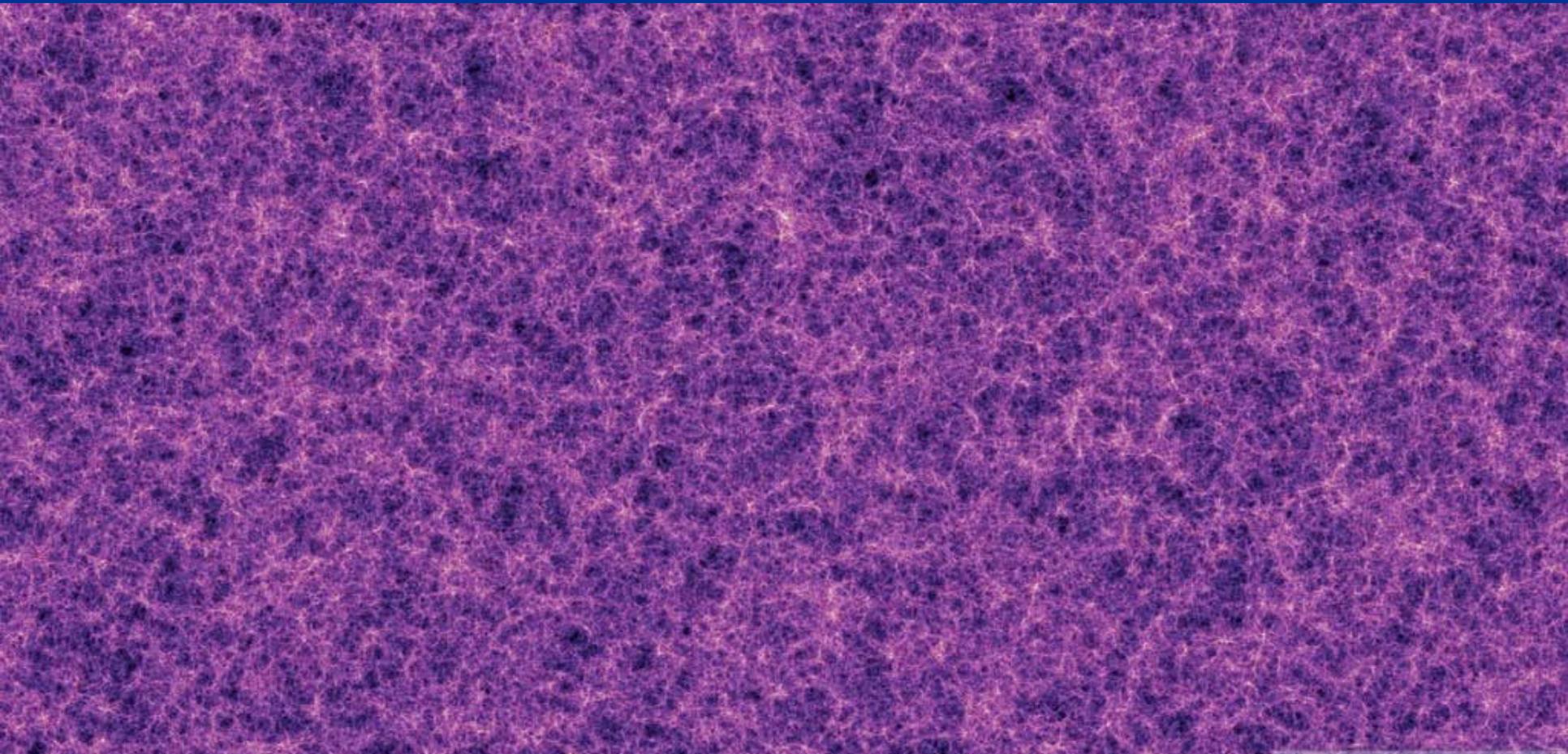
$++$ abstoßend , $--$ abstoßend , $+ -$ anziehend

Gravitation nur $+$

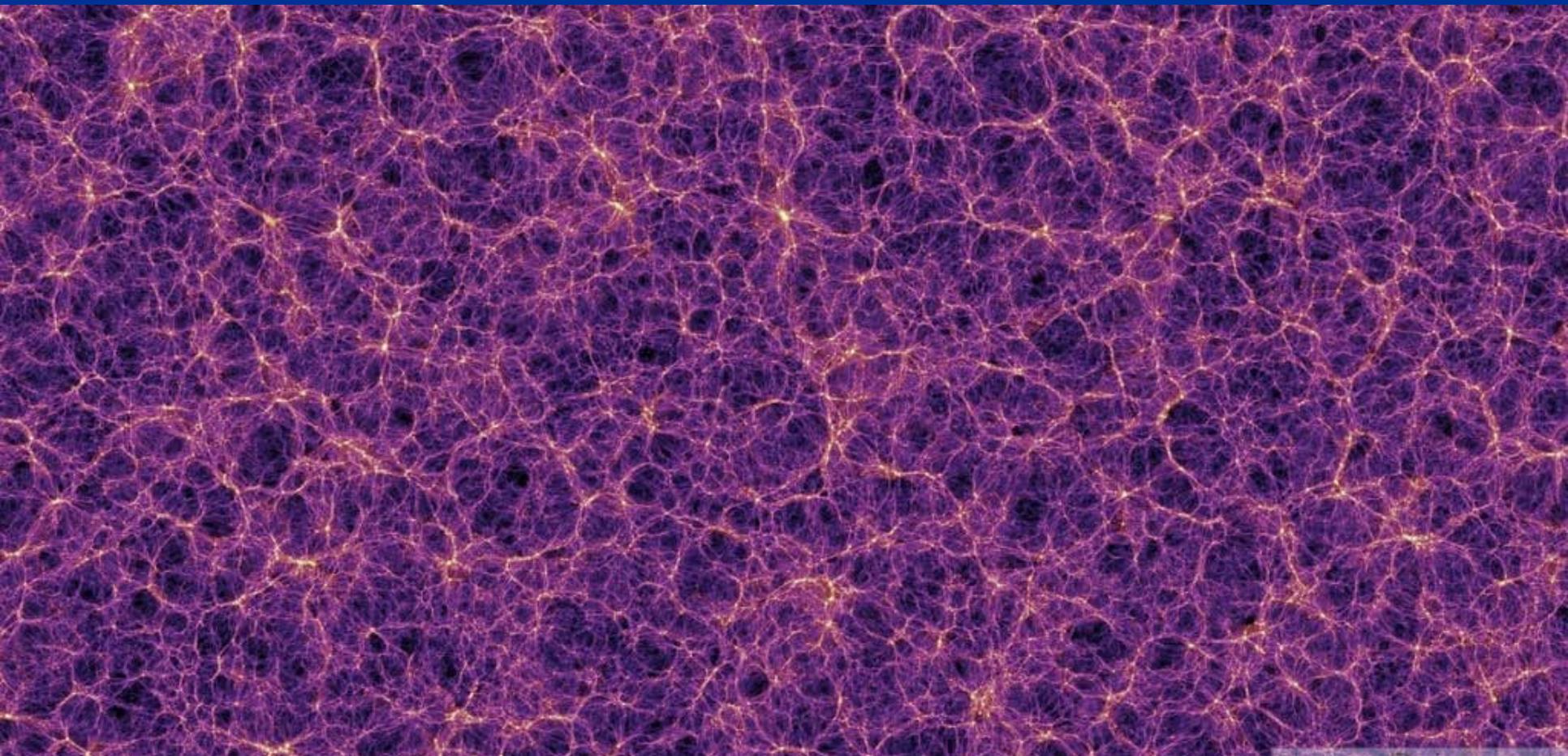
$++$ anziehend

- Gravitation dominiert Makrokosmos
- Elektromagnetische Wechselwirkung dominiert Mikrokosmos

**(1) Gravitation ist die dominierende
Wechselwirkung (Kraft)
bei großen Abständen**



**(1) Gravitation ist die dominierende
Wechselwirkung (Kraft)
bei großen Abständen**

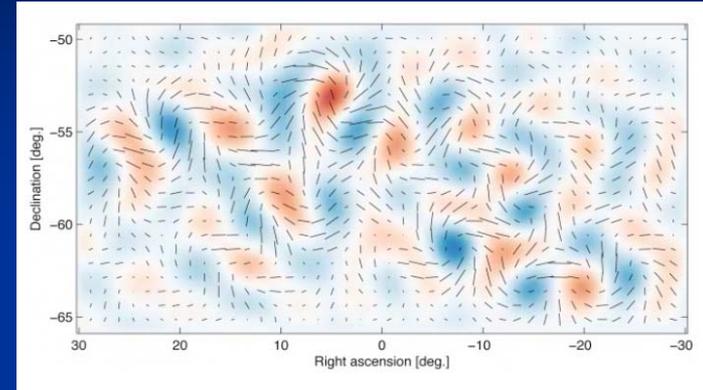


Gravitationsfeld



Felder

Felder haben einen Wert für jeden Ort im Raum (x,y,z) und für jeden Zeitpunkt t



talk Wilczek

Beispiel:

elektrisches Feld

$$\vec{E}(t, x, y, z)$$

$$\vec{E} = (E_x, E_y, E_z)$$

Magnetfeld

$$\vec{B}(t, x, y, z)$$

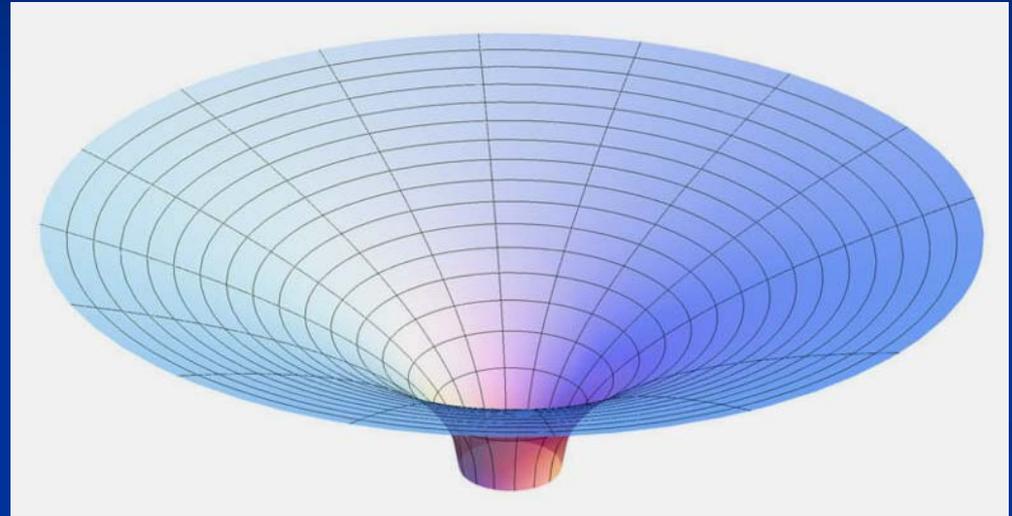
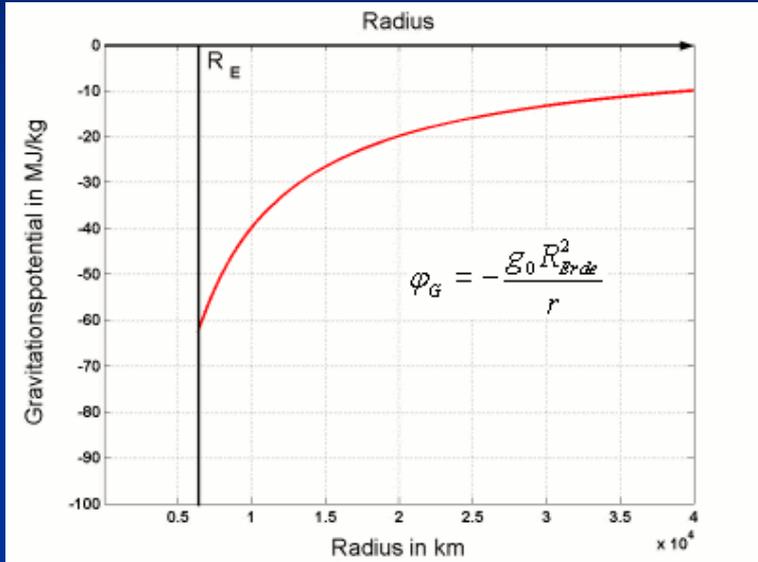
$$\vec{B} = (B_x, B_y, B_z)$$

Gravitationspotenzial : Feld

$$\Phi(t, x, y, z)$$

- Für jede Zeit t , und für jeden Ort (x, y, z) , hat das Gravitationspotenzial einen Wert Φ
- Ähnlich wie elektrisches Feld
- Aber : keine Richtung ist ausgezeichnet
(kein Vektor)

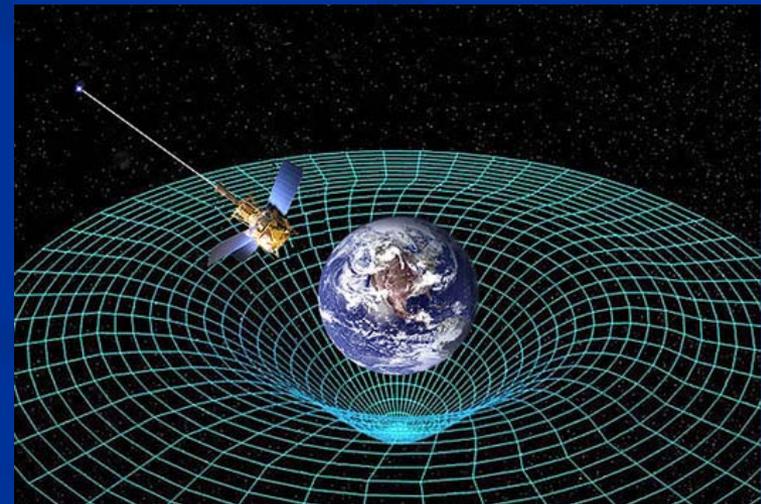
Gravitationspotenzial (Newton)



$$\Phi(r)$$

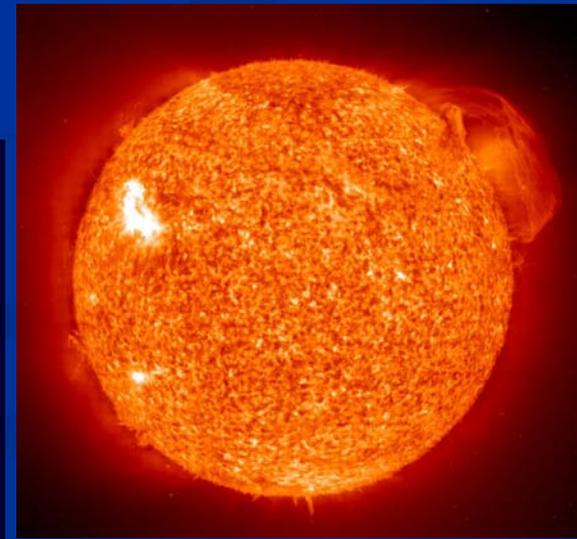
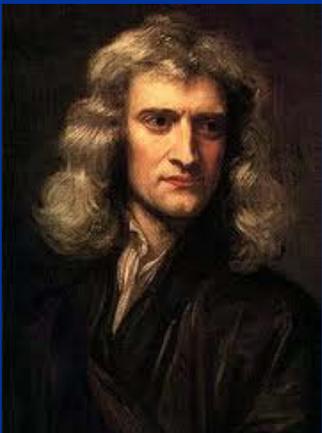
$$\Phi(x,y)$$

$$\Phi(t,x,y,z)$$

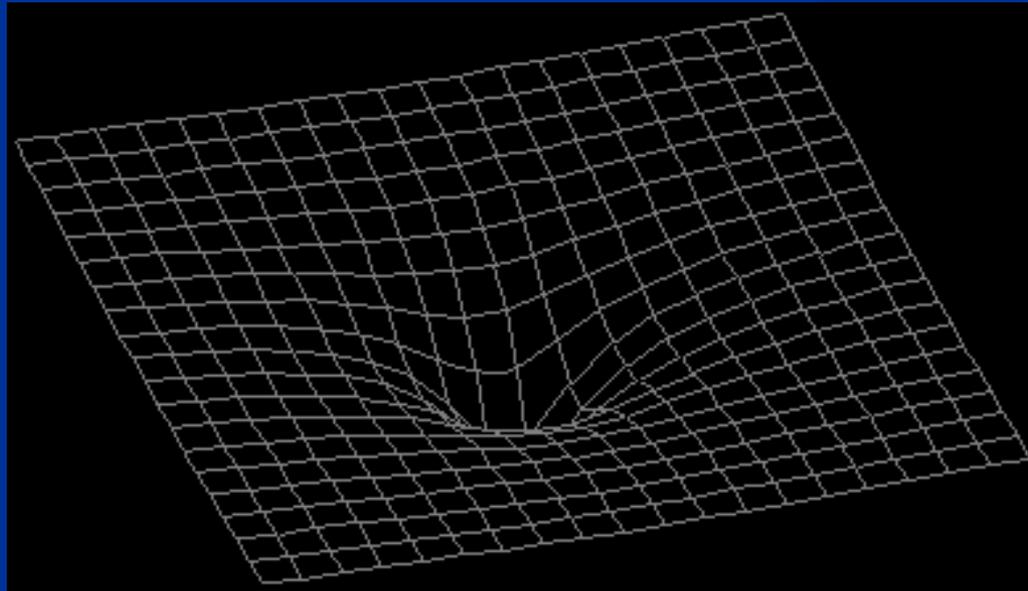
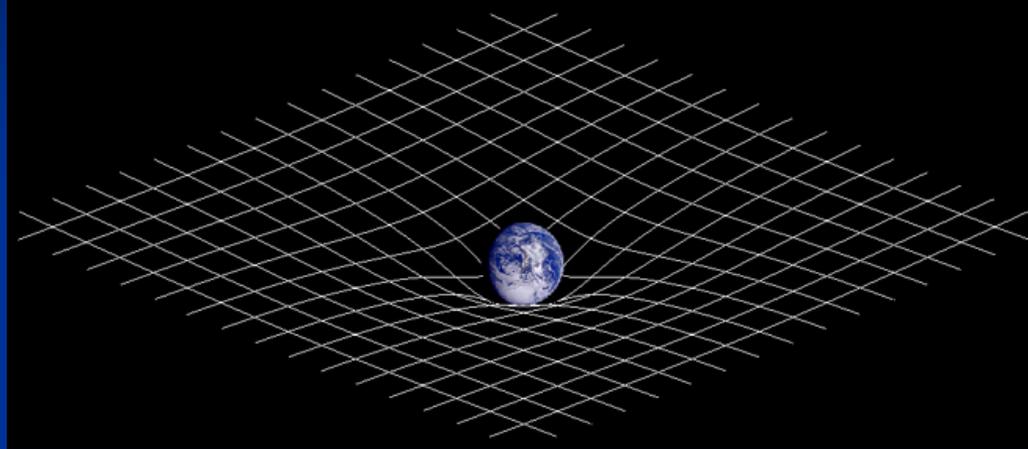


Gravitations - Potenzial

- Materieklumpen erzeugen Gravitationspotenzial (Newton)
- Dies kann vermessen werden
- Bestimmung der Masse des Klumpens
- z.B. Sonnenmasse genau bekannt



Gravitationsfeld



Elektromagnetisches Feld: 6 Größen

elektrisches Feld

$$\vec{E}(t, x, y, z)$$

$$\vec{E} = (E_x, E_y, E_z)$$

Magnetfeld

$$\vec{B}(t, x, y, z)$$

$$\vec{B} = (B_x, B_y, B_z)$$

Gravitations - Feld: 10 Größen

$$g_{\mu\nu}(t, x, y, z)$$

$$g_{\mu\nu} : (g_{00}, g_{01}, g_{02}, g_{03}, g_{11}, g_{12}, g_{13}, g_{22}, g_{23}, g_{33})$$

$$g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$$

Matrix

$$g_{\mu\nu} : \begin{pmatrix} g_{00} & , & g_{01} & , & g_{02} & , & g_{03} \\ g_{10} & , & g_{11} & , & g_{12} & , & g_{13} \\ g_{20} & , & g_{21} & , & g_{22} & , & g_{23} \\ g_{30} & , & g_{31} & , & g_{32} & , & g_{33} \end{pmatrix}$$

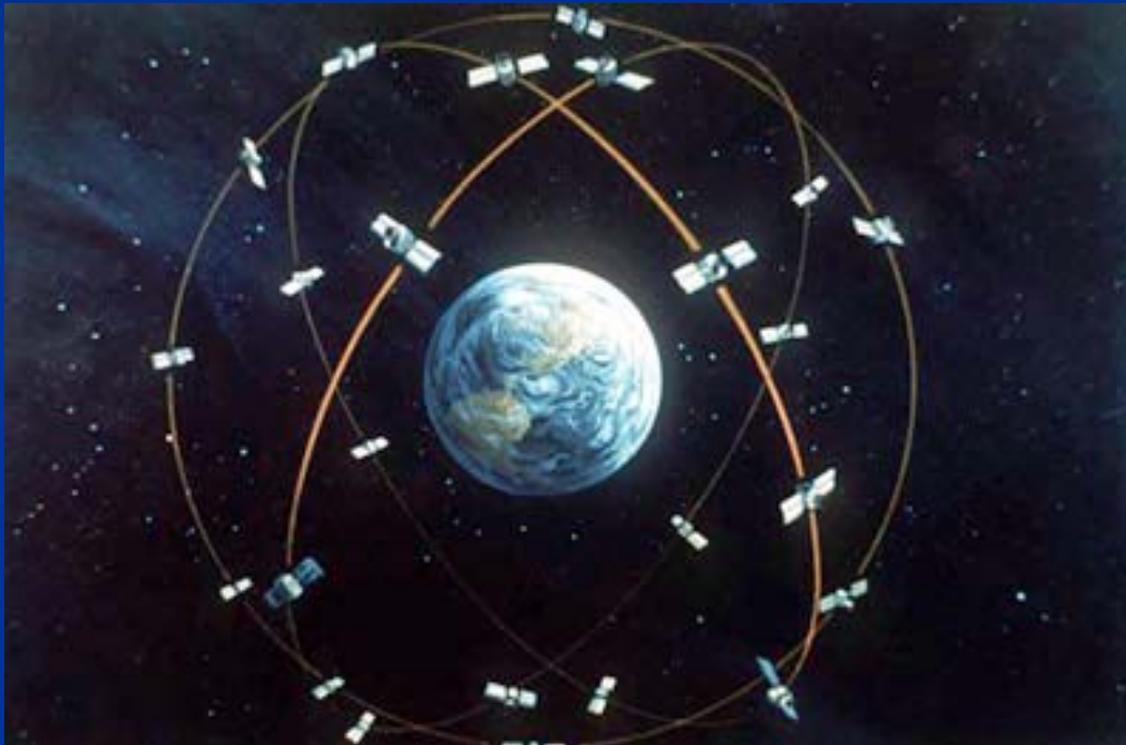
$$g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$$

$$g_{\mu\nu} : (g_{00}, g_{01}, g_{02}, g_{03}, g_{11}, g_{12}, g_{13}, g_{22}, g_{23}, g_{33})$$

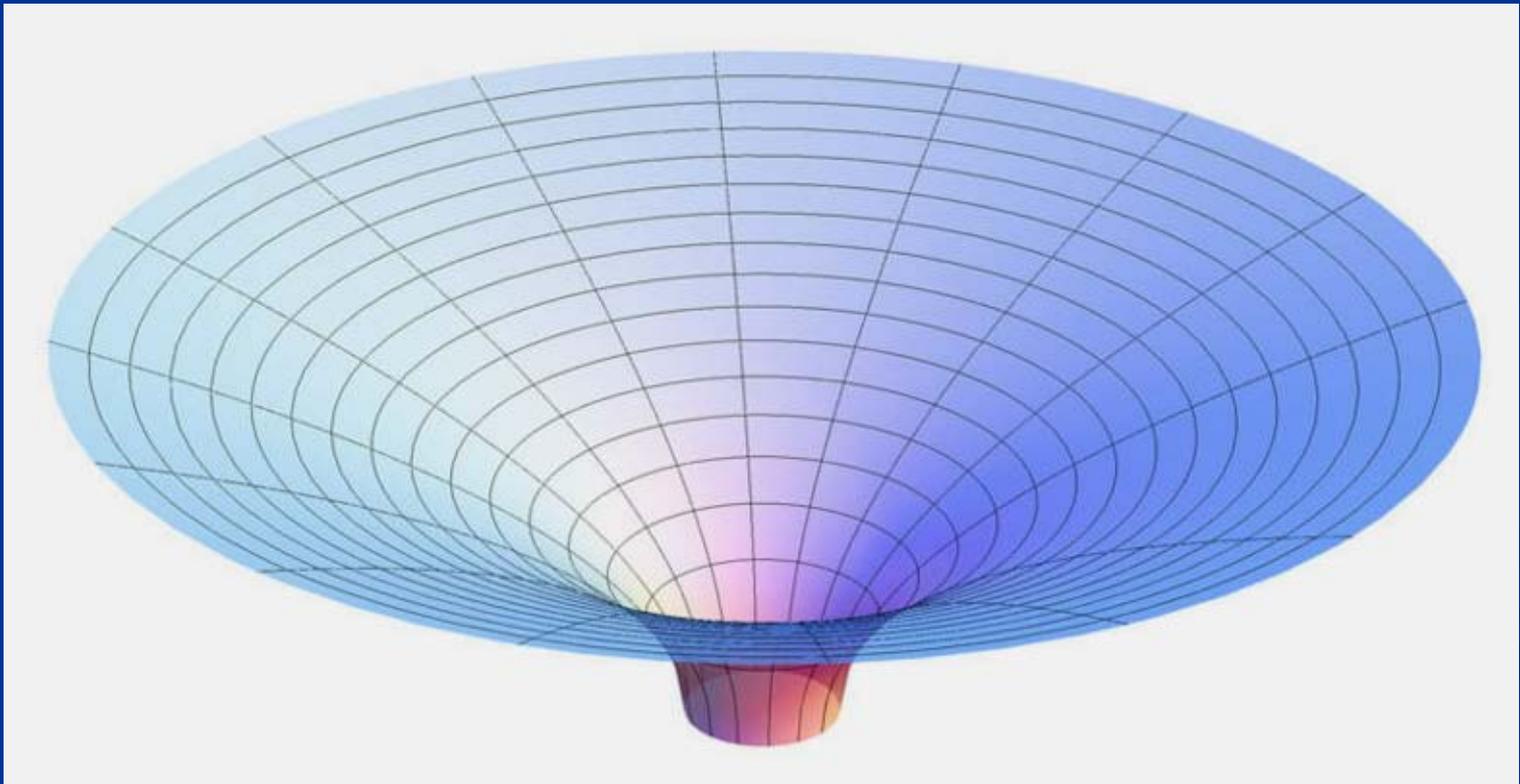
**Newton –
Näherung :
Gravitations-
potenzial**

$$g_{\mu\nu} : \begin{pmatrix} -(1 + 2\phi) & , & 0 & , & 0 & , & 0 \\ 0 & , & 1 & , & 0 & , & 0 \\ 0 & , & 0 & , & 1 & , & 0 \\ 0 & , & 0 & , & 0 & , & 1 \end{pmatrix}$$

GPS braucht die 10 Größen



(3) Gravitation wird durch ein
Gravitations - **Feld** beschrieben



Geometrie

The image features a solid blue background. In the upper center, the word "Geometrie" is written in a bold, yellow, serif font. In the bottom right corner, there are several overlapping, wavy, light blue lines that create a sense of motion or depth.

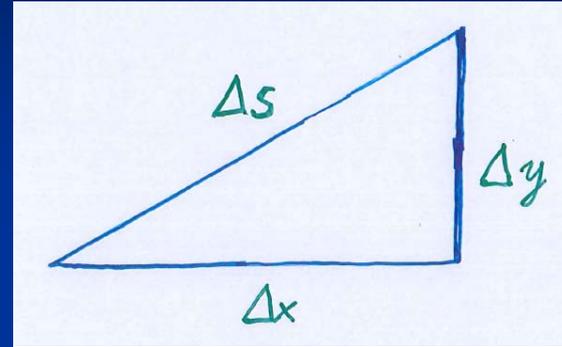
Ist Raum einfach da ?

- Eigenschaften des Raums werden durch physikalische Eigenschaften bestimmt
- Wie lange braucht ein Lichtstrahl von Mainz nach Wiesbaden oder Heidelberg ?
- Wieviele Atome liegen in einem Kristall zwischen zwei Punkten A und B ?
- Es gibt keinen „leeren Raum“ außerhalb physikalischer Prozesse

Abstand und Metrik

Pythagoras :

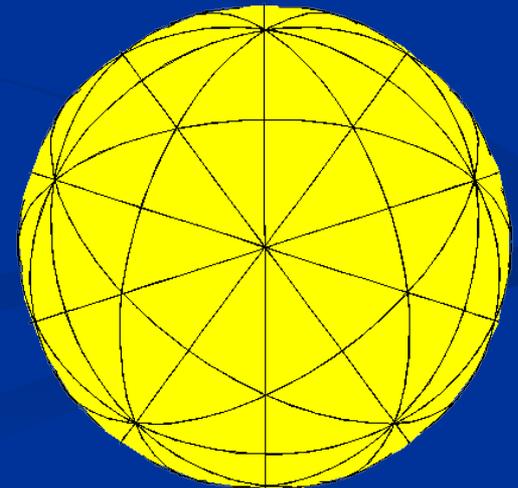
$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$



Riemann Geometrie :

$$ds^2 = g_{11} dx^2 + g_{22} dy^2 + g_{12} dx dy$$

Metrik $g_{\mu\nu}$



Einheitlicher Raum für Ort und Zeit : Raumzeit

Vierer - Vektor

$$x^\mu$$

$$x^0 = t$$

$$x^1 = x$$

$$x^2 = y$$

$$x^3 = z$$

Abstand und Metrik

Riemann Geometrie :



$$ds^2 = \sum_{\mu=0}^3 \sum_{\nu=0}^3 g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

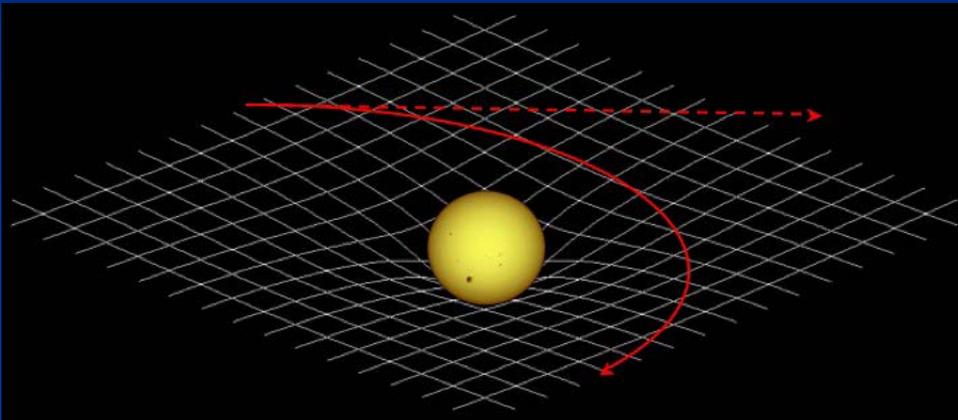
Metrik $g_{\mu\nu}$

Das Gravitationsfeld ist die Metrik der Raumzeit

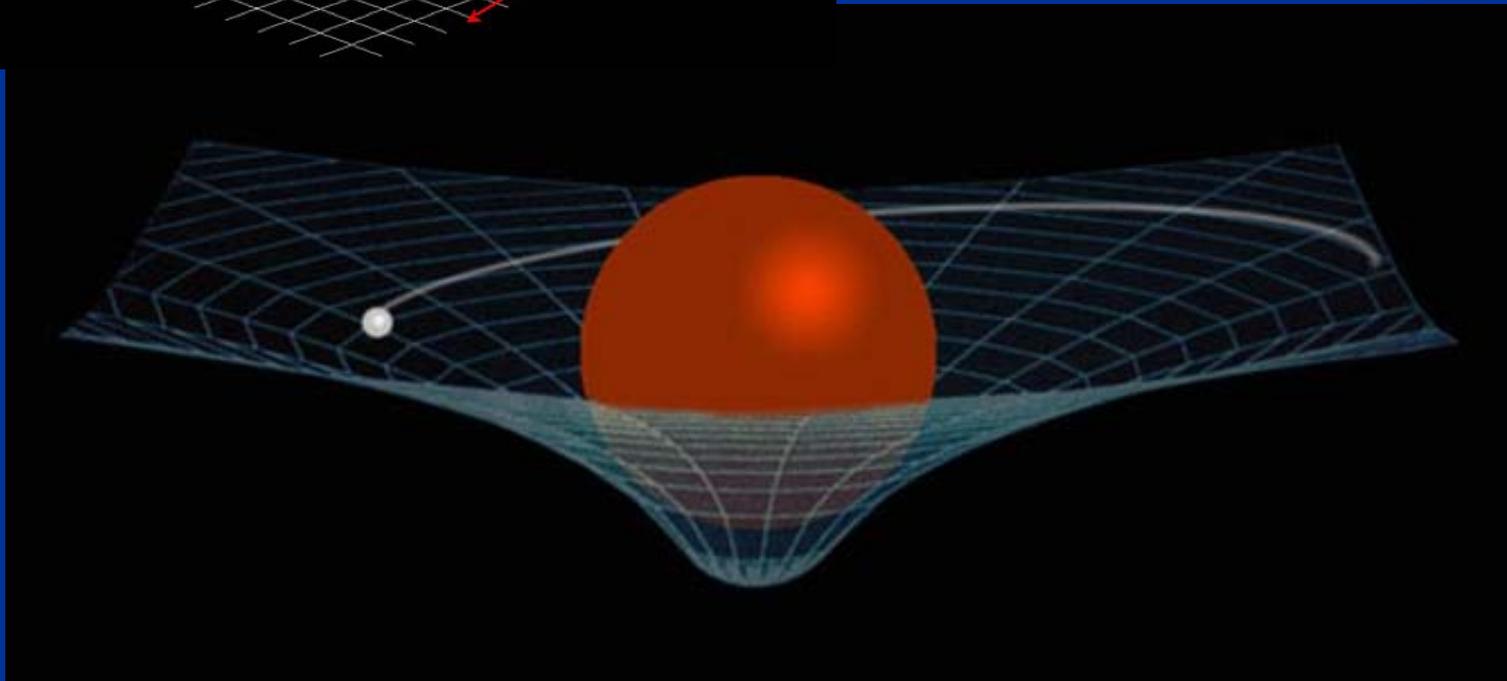
Geometrie wird dynamisch !

Wie zeigt sich die Geometrie ?

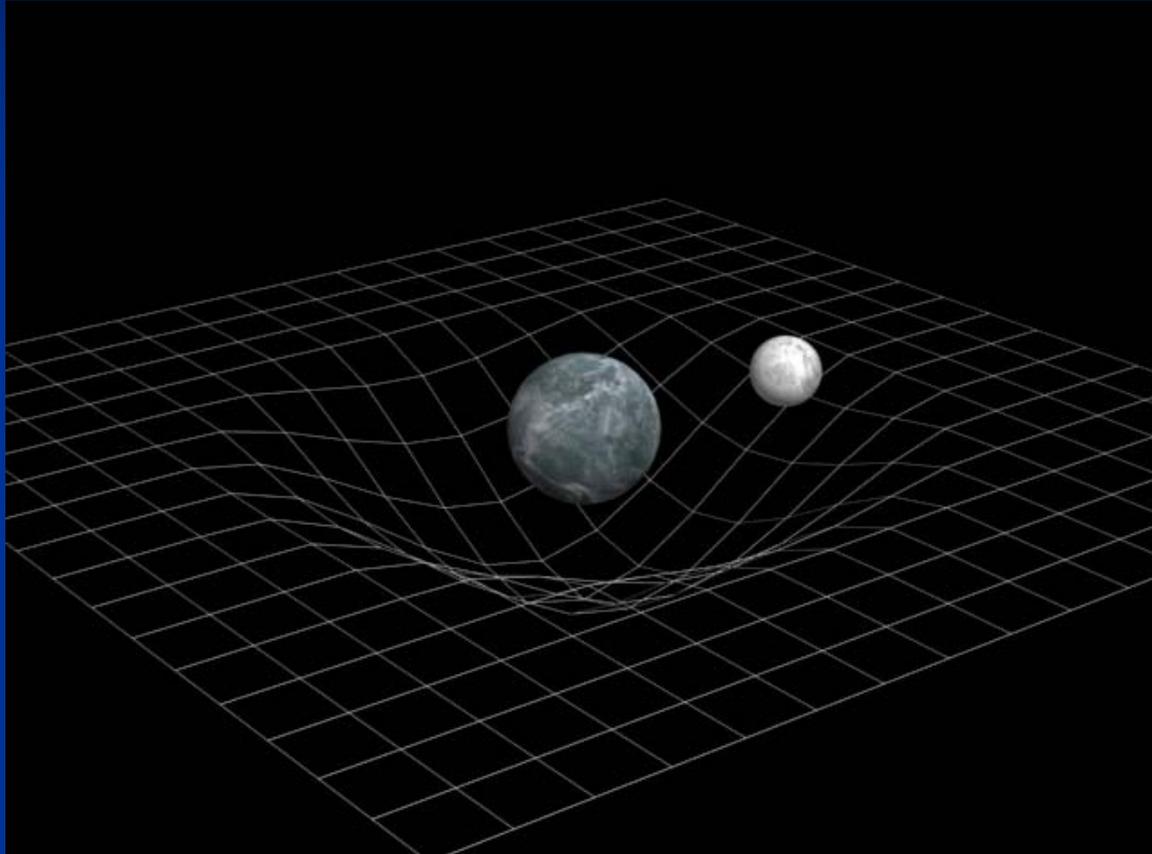
Massive Körper oder Elementarteilchen nehmen den „kürzesten Weg“



minimale Eigenzeit

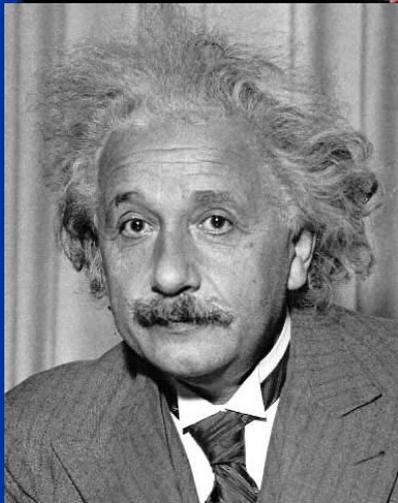
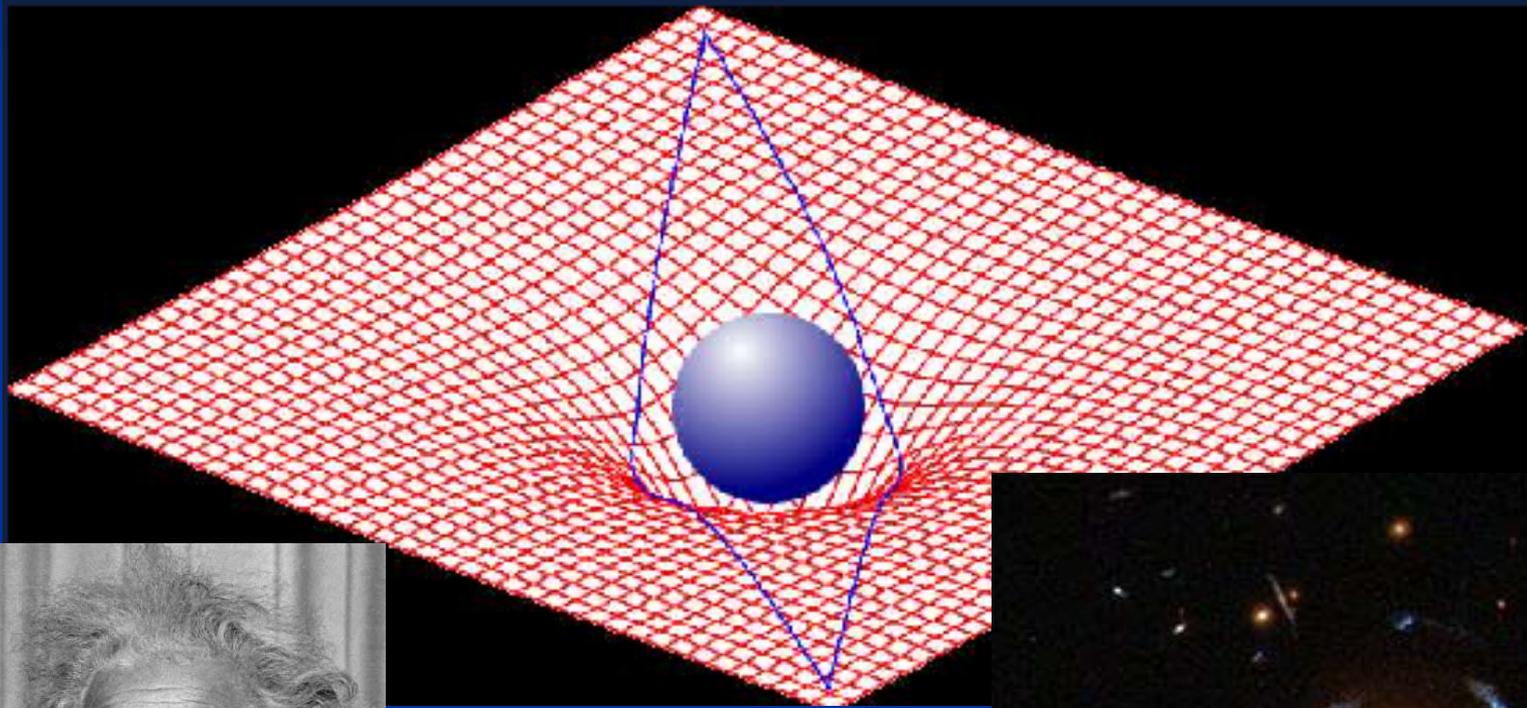


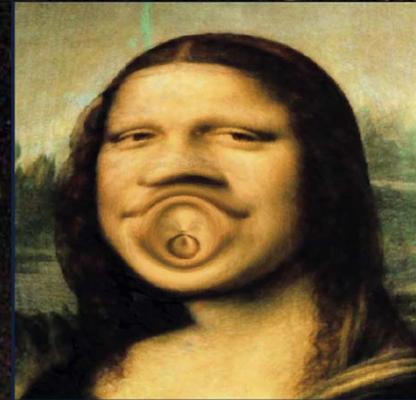
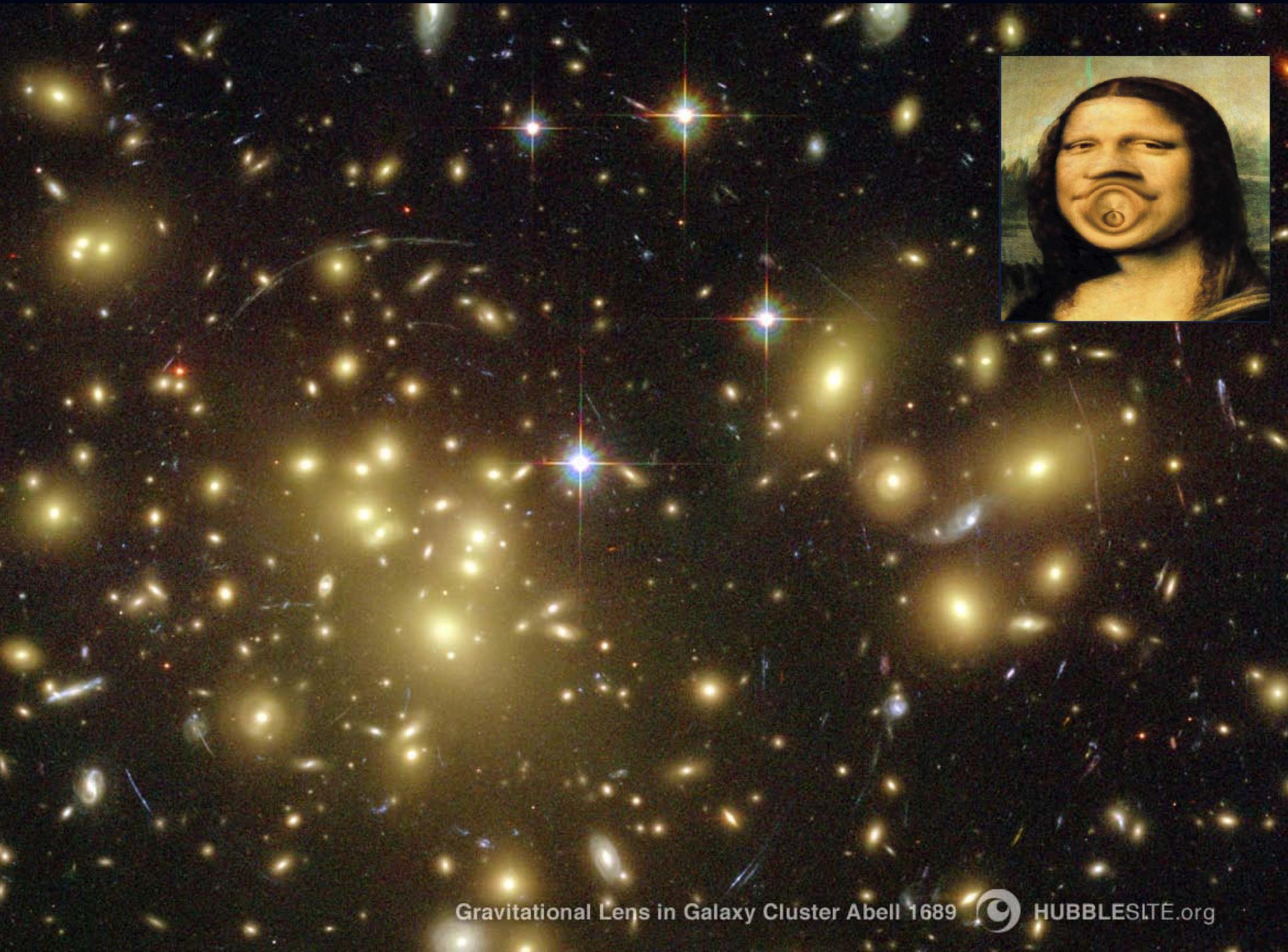
Räumliche Geometrie ändert sich mit der Zeit



Vier – dimensionale Geometrie : (t,x,y,z)

Lichtstrahlen werden durch Massen abgelenkt





Gravitational Lens in Galaxy Cluster Abell 1689



HUBBLESITE.org

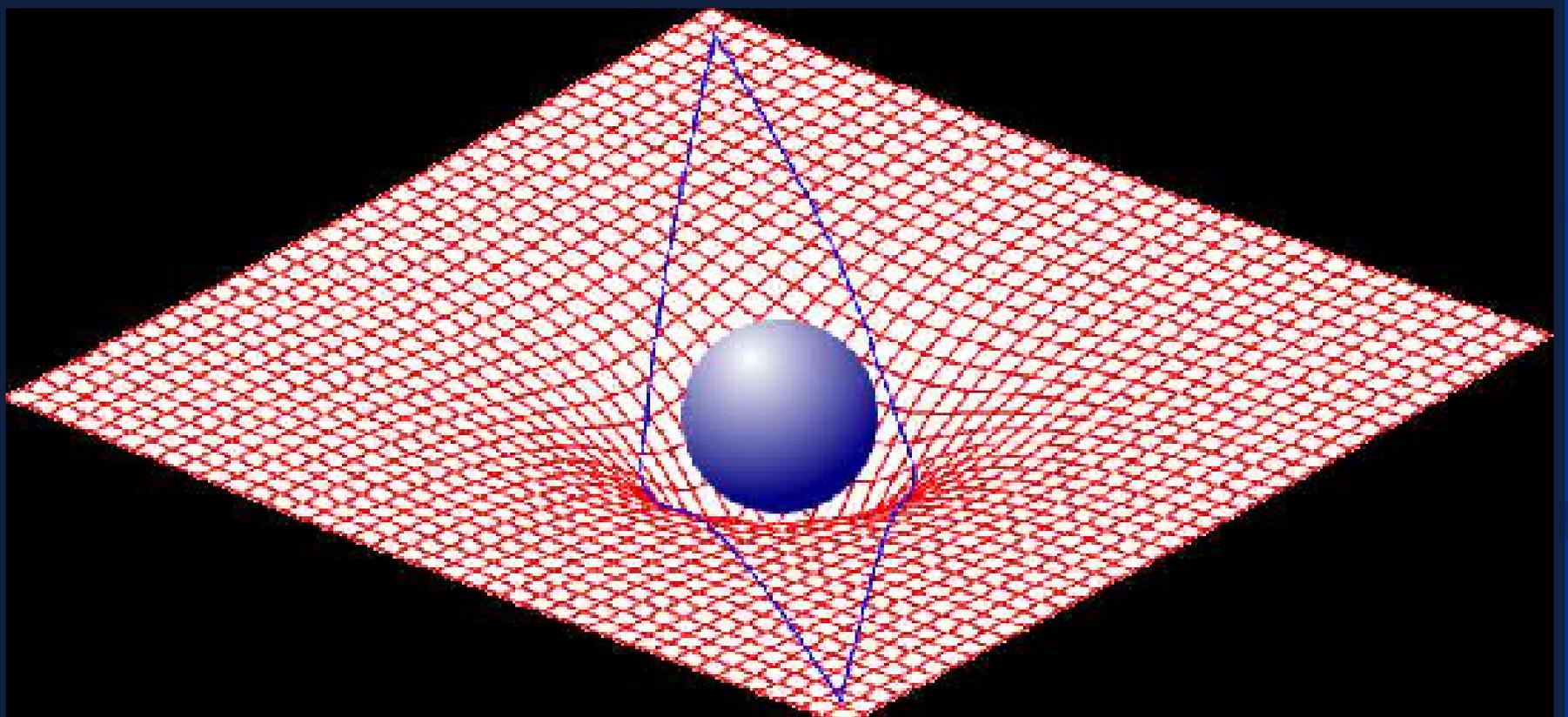
Metrik des Universums homogen und isotrop

$$g_{\mu\nu} : \begin{pmatrix} -1, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & a(t), & 0, & 0 \\ 0, & 0, & a(t), & 0 \\ 0, & 0, & 0, & a(t) \end{pmatrix}$$

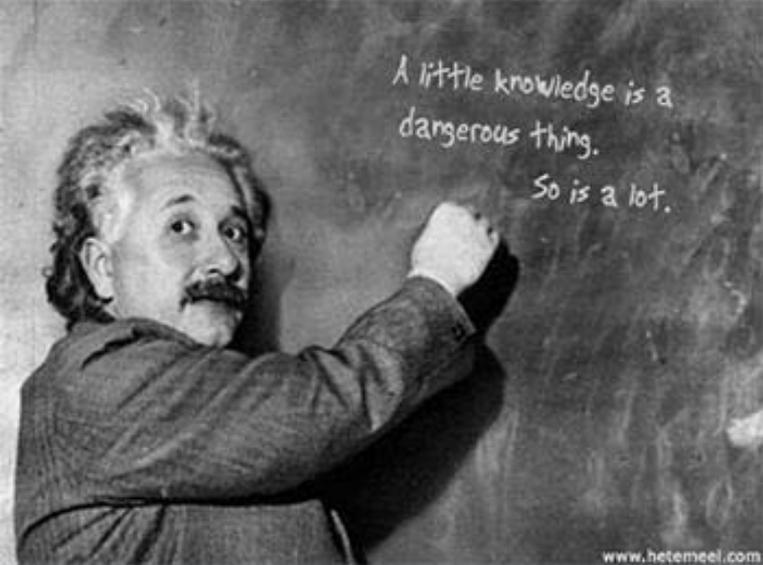
Räumlicher Abstand ist proportional $a(t)$
Ausdehnung des Raums wenn $a(t)$ wächst

(4) Das Gravitationsfeld bestimmt
die Geometrie von Raum und Zeit

Metrik



Einstein Gleichung



$$M^2 \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \right) = T_{\mu\nu}$$



Einstein Gleichung

$$M^2(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}) = T_{\mu\nu}$$

- Differentialgleichung für Gravitationsfelder (**Metrik**)
- Verknüpft Geometrie und Materie
(**Energie-Impuls-Tensor**)
- Benötigt weitere Gleichung für Eigenschaften des Energie-Impuls-Tensors (Zustandsgleichung)

Wenn Verteilung der Materie sowie Metrik und ihre Ableitung an **jedem Ort** zu einer **bestimmten Zeit** gegeben:

Berechnung für jeden späteren oder früheren Zeitpunkt möglich !

Einstein Gleichung

$$M^2 \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \right) = T_{\mu\nu}$$

M : Planck-Masse
verknüpft mit
Gravitationskonstante G

$$G = \frac{1}{8\pi M^2}$$

Einstein Gleichung

$$R_{\mu\nu} = \sum_{\rho=0}^3 \left(\frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^{\rho}}{\partial x^{\rho}} - \frac{\partial \Gamma_{\nu\rho}^{\rho}}{\partial x^{\mu}} \right) + \sum_{\rho=0}^3 \sum_{\tau=0}^3 (\Gamma_{\mu\nu}^{\tau} \Gamma_{\tau\rho}^{\rho} - \Gamma_{\mu\rho}^{\tau} \Gamma_{\nu\tau}^{\rho})$$

Krümmungstensor

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} = \frac{1}{2} \sum_{\tau=0}^3 g^{\rho\tau} \left(\frac{\partial g_{\nu\tau}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial g_{\mu\tau}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\tau}} \right)$$

Zusammenhang

inverse Metrik $g^{\mu\nu}$

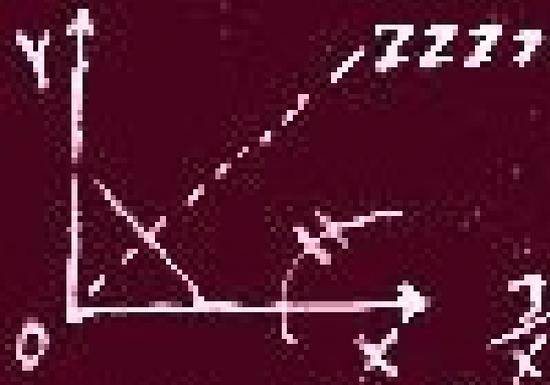
$$\sum_{\rho=0}^3 g_{\mu\rho} g^{\rho\nu} = \delta_{\mu}^{\nu} = \begin{cases} 1 & \text{wenn } \mu = \nu \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$R = \sum_{\mu=0}^3 \sum_{\nu=0}^3 g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$$

Krümmungsskalar

$$E=MC^2 \rightarrow \sqrt[3]{3.957272} \cdot 10^4$$

$$\left\{ \frac{1}{3} \right\} \left\{ \frac{1}{3} \right\}$$



$$\sqrt[3]{.0927864} \approx 6(3.78324) 2\pi$$

$$g_{ik}; l=0; \frac{1}{x^3} y = \frac{NC^4}{3.6} = \sqrt{\frac{x}{3}}$$

$$r_1=0; R_{ik}=0; g_{.5} = 0 \rightarrow O_3 \rightarrow K_3$$

$$H_A O_C \quad r_3 = \sqrt{1 - \frac{1}{R_3} \text{ or } K_3} \quad \frac{1}{10}$$



→ = 0

Newton Gravitation

$$g_{\mu\nu} : \begin{pmatrix} -(1 + 2\phi) & , & 0 & , & 0 & , & 0 \\ 0 & , & 1 & , & 0 & , & 0 \\ 0 & , & 0 & , & 1 & , & 0 \\ 0 & , & 0 & , & 0 & , & 1 \end{pmatrix}$$

Einstein Gleichung
für zeitunabhängiges Φ :

$$-M^2 \vec{\nabla}^2 g_{00} = T_{00}$$

$$\vec{\nabla}^2 \phi = \frac{\rho}{2M^2}$$

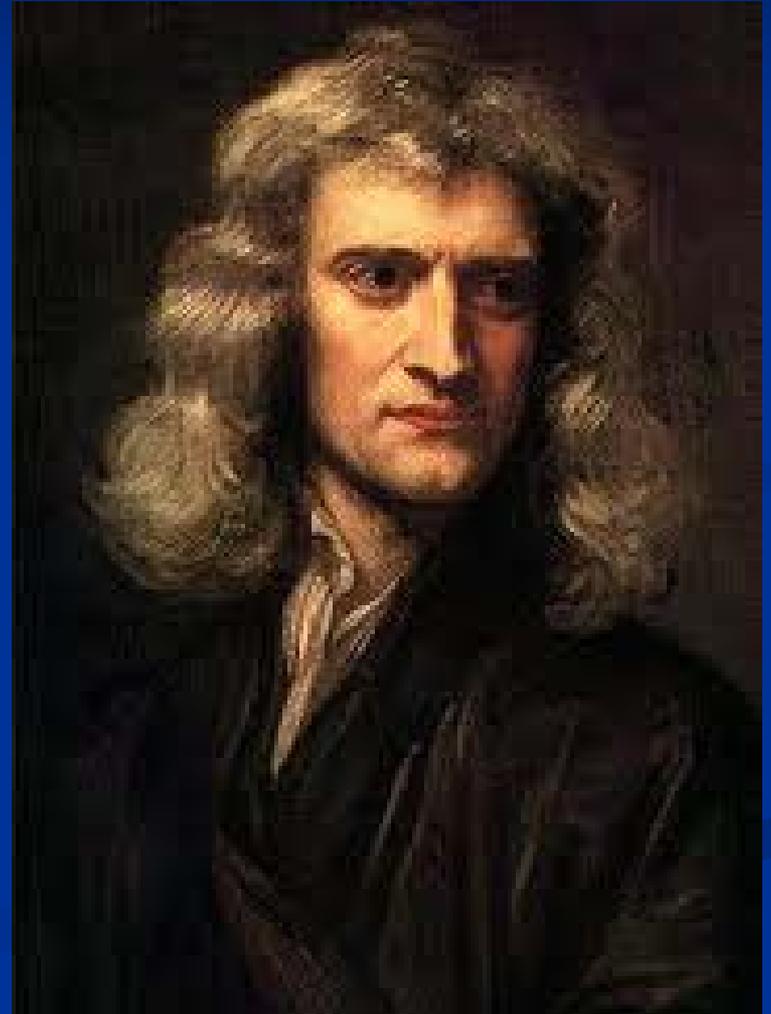
Newton - Gravitation

$$\vec{\nabla}^2 \phi = \frac{\rho}{2M^2}$$

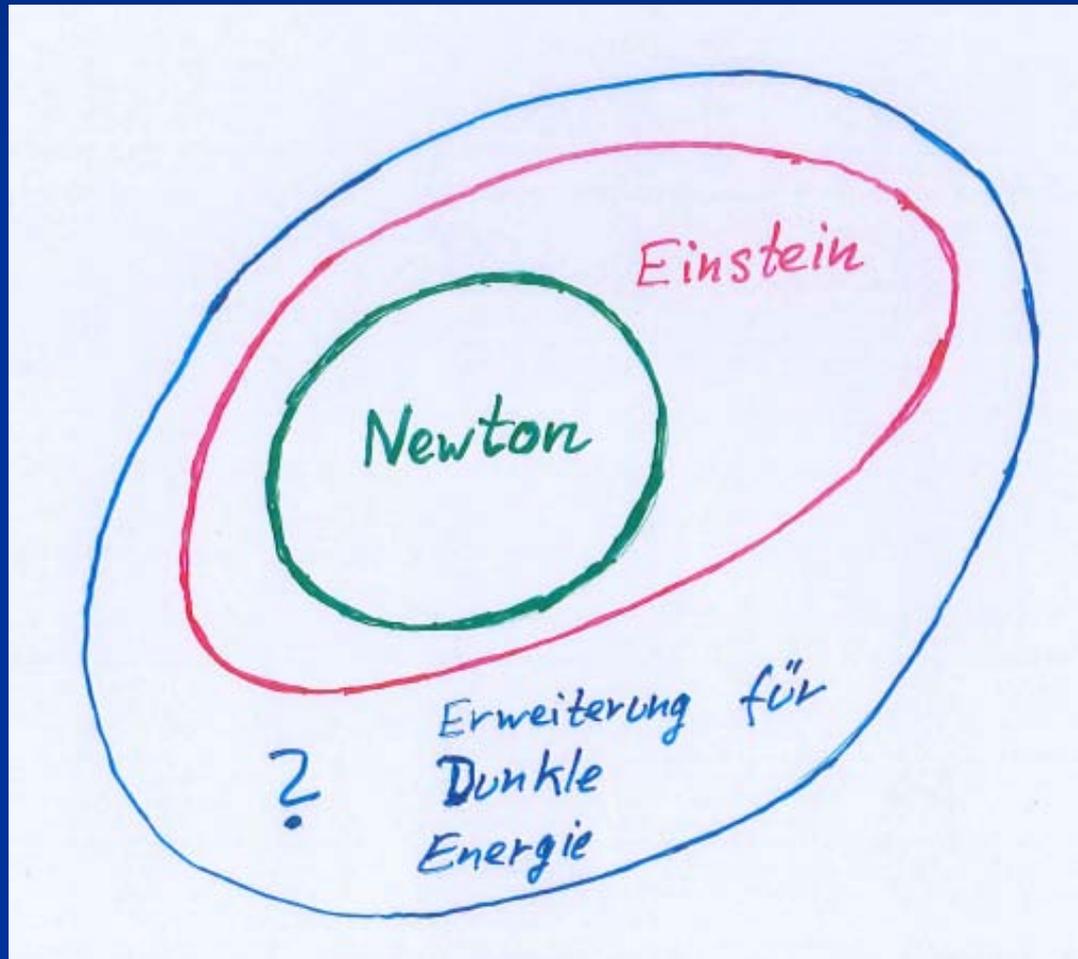
$$\phi = -\frac{m}{8\pi M^2 r} = -\frac{Gm}{r}$$

$$G = \frac{1}{8\pi M^2}$$

$$\frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = -\vec{\nabla} \phi$$



Altes Gesetz ist in neuem als Näherung enthalten



Kosmologische Gleichung

Einstein –
Gleichung
für Metrik

$$g_{\mu\nu} : \begin{pmatrix} -1, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & a(t), & 0, & 0 \\ 0, & 0, & a(t), & 0 \\ 0, & 0, & 0, & a(t) \end{pmatrix}$$



$$\frac{\partial a}{\partial t} = \sqrt{\frac{\rho}{3M^2}} a$$

ρ : Energie-
Dichte

Friedmann Gleichung

Hubble Parameter

$$\frac{\partial a}{\partial t} = v$$

$$\dot{a} = v$$

$$v = aH$$

$$\dot{a} = Ha$$

$$H = \frac{\dot{a}}{a}$$

$$\frac{\partial a}{\partial t} = \sqrt{\frac{\rho}{3M^2}} a$$

$$3M^2 H^2 = \rho$$

Kritische Dichte

- $\rho_c = 3 H^2 M^2$

Kritische Energiedichte des Universums

(M : reduzierte Planck-Masse , $M^{-2} = 8 \pi G$;

H : Hubble Parameter $H = \dot{a}/a$)

- $\Omega_b = \rho_b / \rho_c$

Anteil der Atome (Baryonen) an der (kritischen) Energiedichte

Modifikation der Einstein Gleichung

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \dots = \frac{1}{M^2}(T_{\mu\nu} + \dots)$$

**modifizierte
Gravitation**

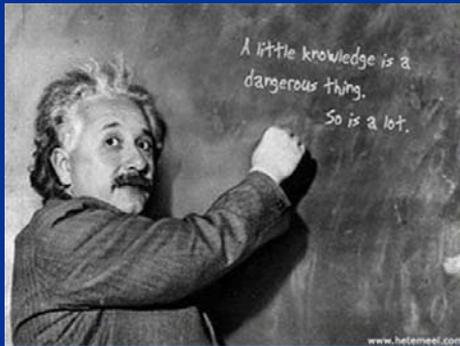
**Dunkle
Energie**

Unterschied ist nicht eindeutig !

Kosmologische Konstante links oder rechts ?

(5) Das Materielle bestimmt die Geometrie

Einstein Gleichung



$$M^2(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}) = T_{\mu\nu}$$



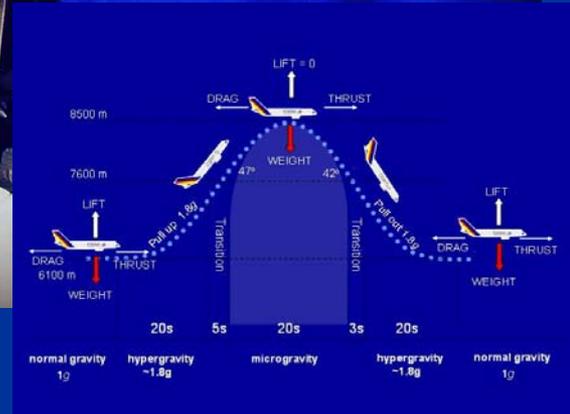
Was steckt hinter der Einstein Gleichung ?

- Symmetrie
- Allgemeine Relativitätstheorie
- Invarianz unter Änderung der Koordinaten

- Quantengravitation : Metrik ist Erwartungswert eines Metrik- Operators

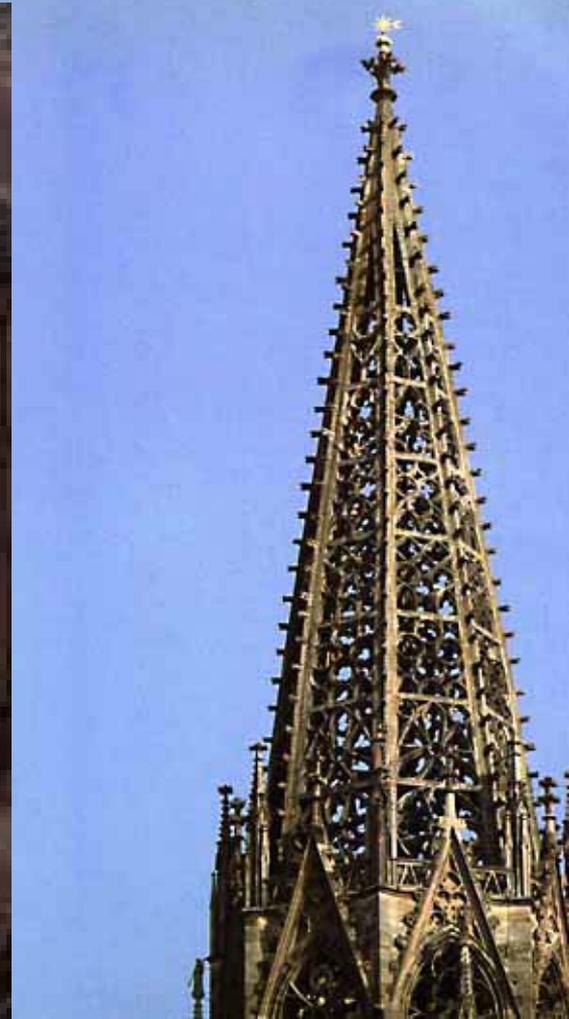
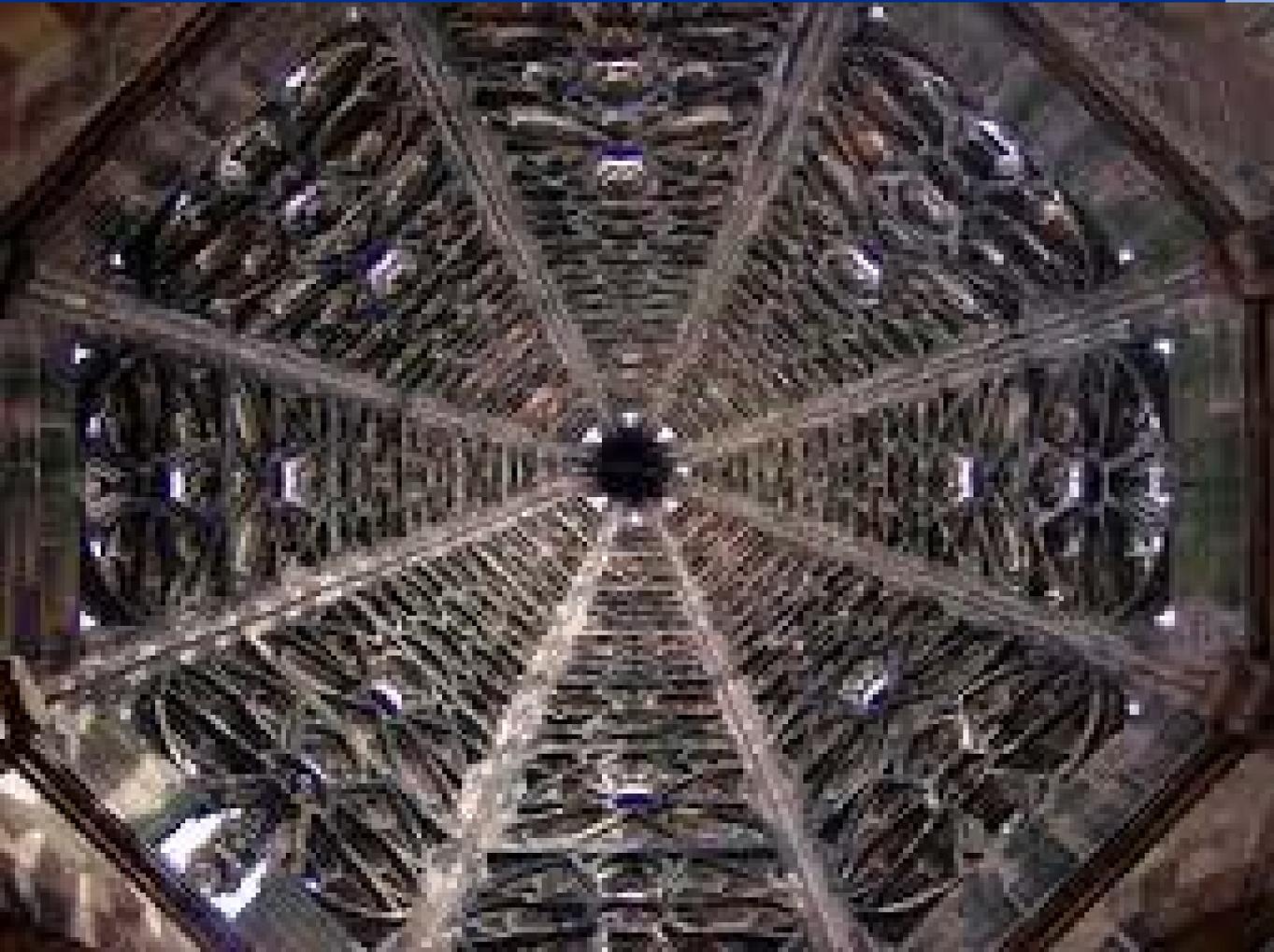
Symmetrieprinzip

*Physik ist die Gleiche
in allen frei fallenden Systemen*



(6) Konstruktionsprinzip Symmetrie

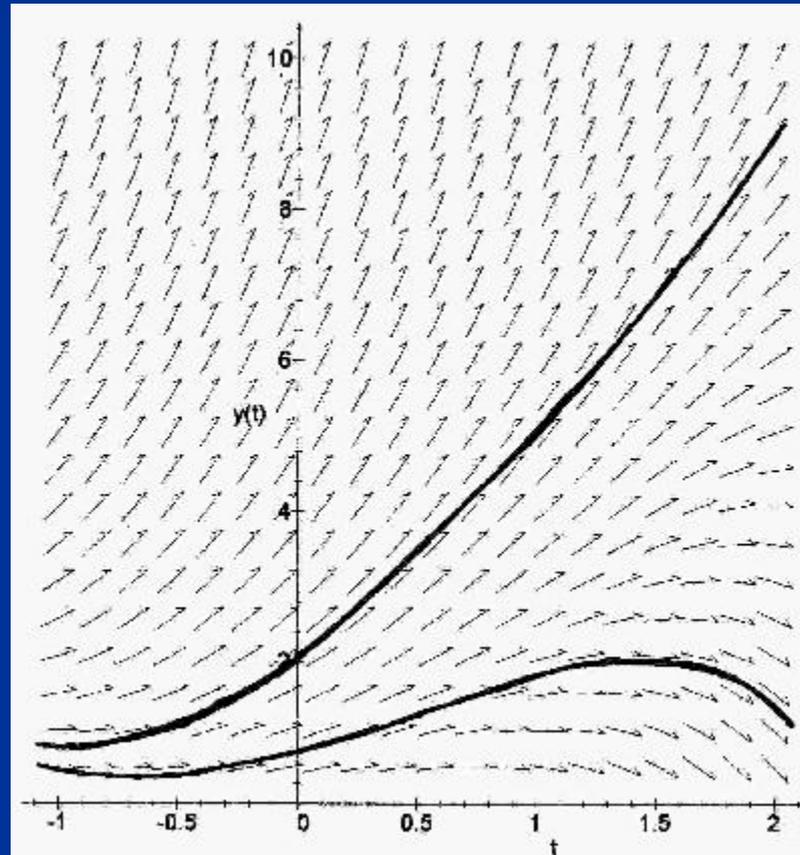
Allgemeine Relativitätstheorie



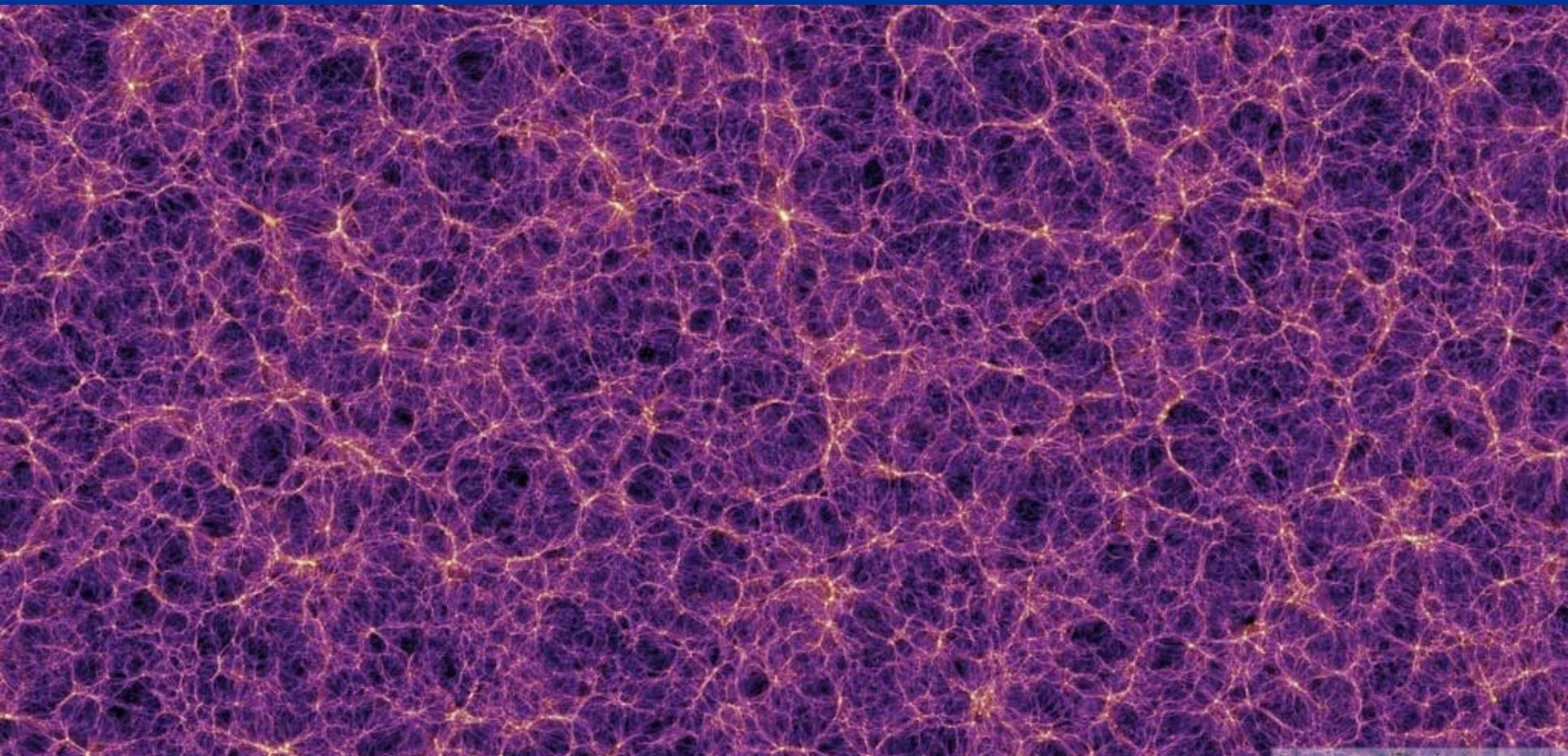
Zusammenfassung

(1) Vorhersage der Zukunft aus dem Jetzt

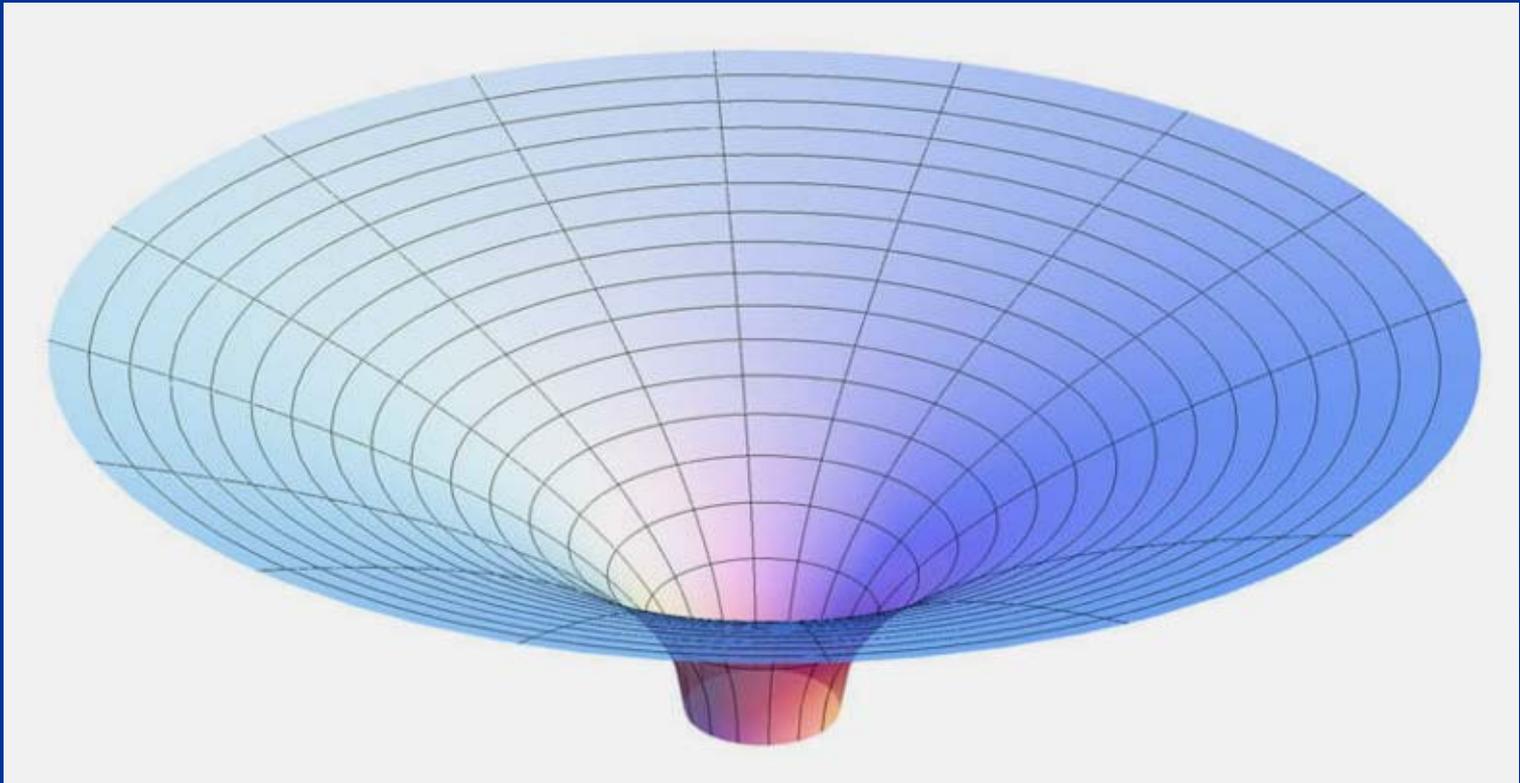
Differentialgleichung



**(2) Gravitation ist die dominierende
Wechselwirkung (Kraft)
bei großen Abständen**

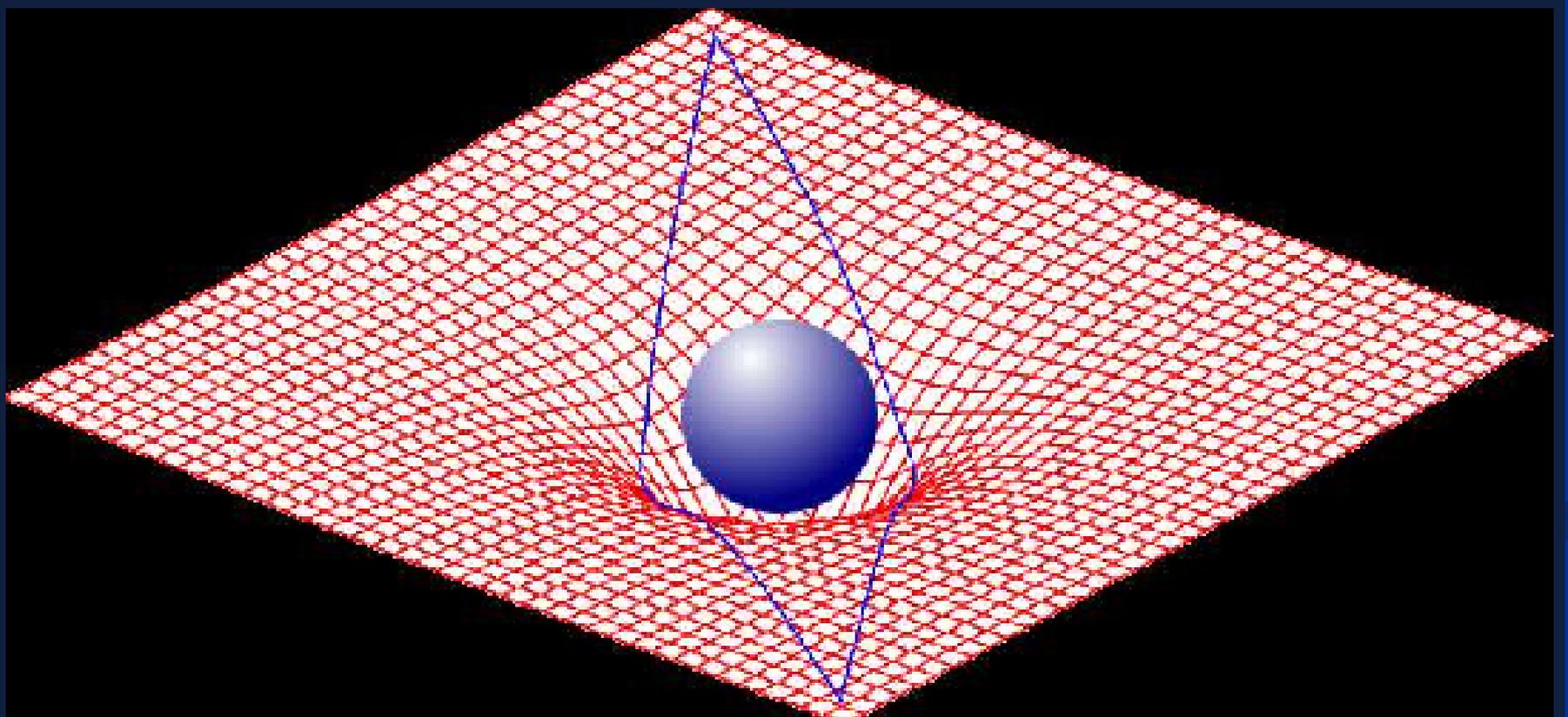


(3) Gravitation wird durch ein
Gravitations - **Feld** beschrieben



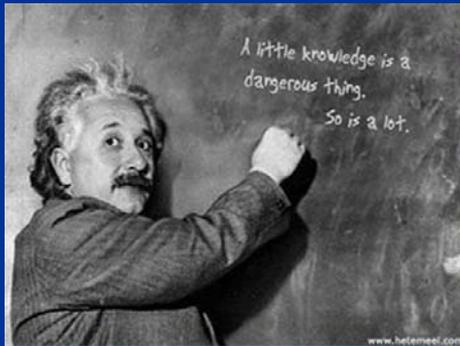
(4) Das Gravitationsfeld bestimmt
die Geometrie von Raum und Zeit

Metrik

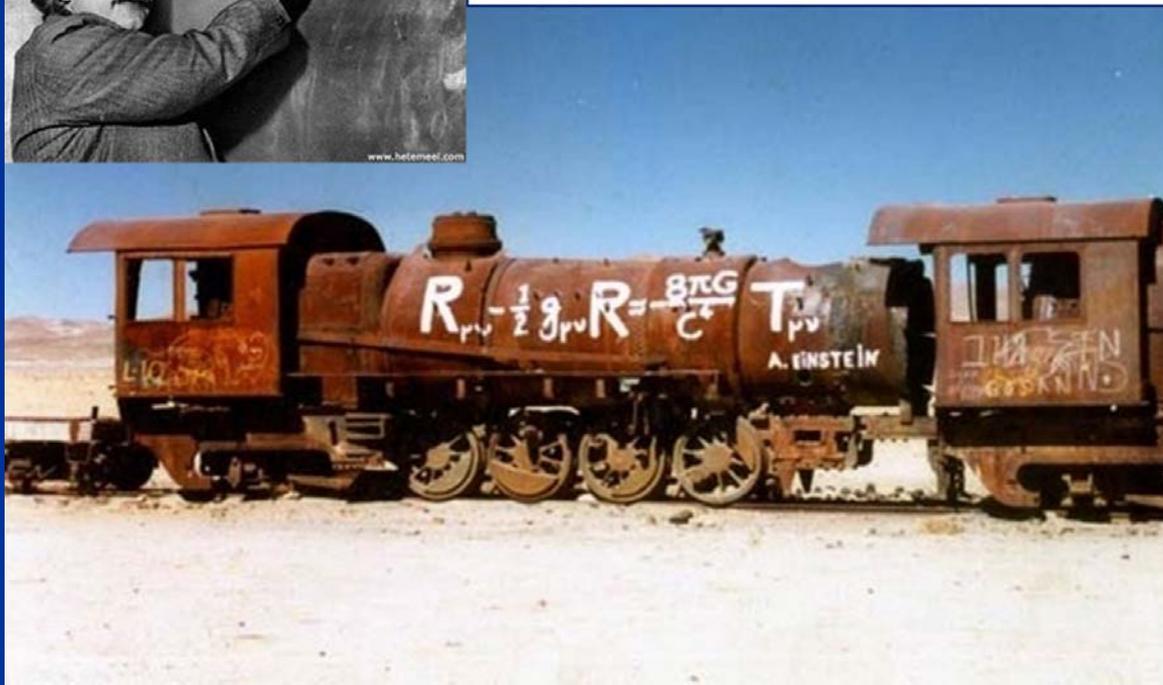


(5) Das Materielle bestimmt die Geometrie

Einstein Gleichung



$$M^2(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}) = T_{\mu\nu}$$



(6) Konstruktionsprinzip Symmetrie

Allgemeine Relativitätstheorie

