Quantenphysik aus klassischen Wahrscheinlichkeiten

Unterschiede zwischen Quantenphysik und klassischen Wahrscheinlichkeiten

Quanten – Teilchen
und
klassische Teilchen

Quanten–Teilchen

- Teilchen-Welle Dualität
- Unschärfe
- keine Trajektorien

- Interferenz bei Doppelspalt
- Tunneln

- Quanten - Wahrscheinlichkeit
- Schrödinger-Gleichung

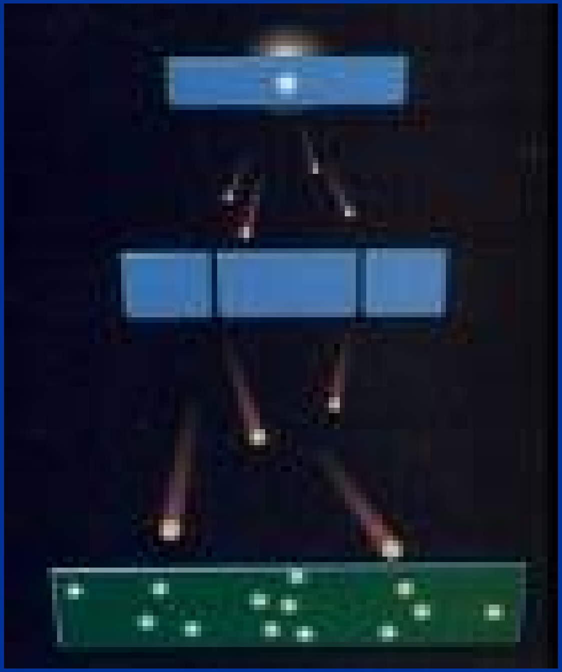
klassische Teilchen

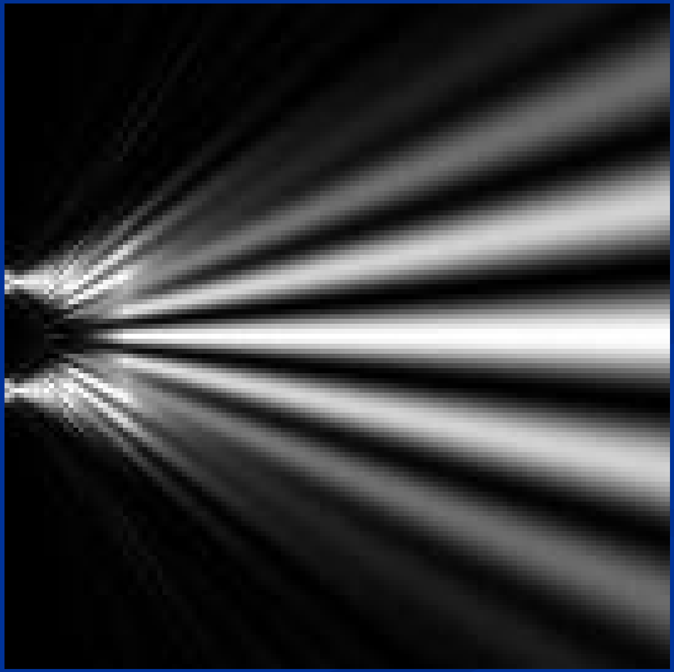
- Teilchen
- scharfer Ort und Impuls
- klassische Trajektorien

- nur durch einen Spalt
- maximale Energie beschränkt Bewegung

- klassische Wahrscheinlichkeit w(x,p)
- Liouville-Gleichung für w
  (entspricht Newton Gl.
  für Trajektorien)

Doppelspalt - Experiment





Quanten - Konzepte

- Wahrscheinlickeits - Amplitude
- Verschränkung
- Interferenz
- Superposition von Zuständen
- Fermionen und Bosonen
- unitäre Zeitentwicklung
- Übergangsamplitude
- nicht-kommutierende Operatoren
- Verletzung der Bell'schen Ungleichung

Quantenphysik kann durch klassische Wahrscheinlichkeiten beschrieben werden !

Zwitter

- *gleicher Formalismus für Quantenteilchen und klassische Teilchen*
- *unterschiedliche Zeitentwicklung der Wahrscheinlichkeitsverteilung*
- **Zwitter :**

  zwischen Quanten und klassischen Teilchen –

  kontinuierliche Interpolation der Zeitentwicklungs - Gleichung

Quantenteilchen und klassischen Wahrscheinlichkeiten

Quanten–Teilchen

- Teilchen-Welle Dualität
- Unschärfe
- keine Trajektorien

- Interferenz bei Doppelspalt
- Tunneln

- Quanten - Wahrscheinlichkeit
- Schrödinger-Gleichung

klassische Teilchen

- Teilchen
- scharfer Ort und Impuls
- klassische Trajektorien

- nur durch einen Spalt
- maximale Energie beschränkt Bewegung

- klassische Wahrscheinlichkeit
- Liouville-Gleichung

Quanten–Teilchen

- Teilchen-Welle Dualität
- Unschärfe
- keine Trajektorien

- Interferenz bei Doppelspalt
- Tunneln

- Quanten - Wahrscheinlichkeit
- Schrödinger-Gleichung

klassische Teilchen

- Teilchen **– Welle Dualität**
- scharfer Ort und Impuls
- ~~klassische Trajektorien~~

- nur durch einen Spalt
- maximale Energie beschränkt Bewegung

- klassische Wahrscheinlichkeit
- Liouville-Gleichung

Quanten–Teilchen

- Teilchen-Welle Dualität
- Unschärfe
- keine Trajektorien

- Interferenz bei Doppelspalt
- Tunneln

- Quanten - Wahrscheinlichkeit
- Schrödinger-Gleichung

klassische Teilchen

- Teilchen **– Welle Dualität**
- scharfer Ort und Impuls
- ~~klassische Trajektorien~~

- nur durch einen Spalt **?**
- maximale Energie beschränkt Bewegung **?**

- klassische Wahrscheinlichkeit
- **modifizierte Evolutionsgleichung**

Quanten–Teilchen ⟵ klassische Teilchen

- Teilchen-Welle Dualität
- Unschärfe
- keine Trajektorien

- Interferenz bei Doppelspalt
- Tunneln

- Quanten - Wahrscheinlichkeit ⟵
- Schrödinger-Gleichung ⟵

- Teilchen **– Welle Dualität**
- ~~scharfer Ort und Impuls~~
- ~~klassische Trajektorien~~

- ~~nur durch einen Spalt~~ **?**
- ~~maximale Energie beschränkt Bewegung~~ **?**

- klassische Wahrscheinlichkeit
- **modifizierte Evolutionsgleichung**

Einschränkung der möglichen Information
unvollständige Statistik

klassische Wahrscheinlichkeiten –
keine deterministische klassische Theorie

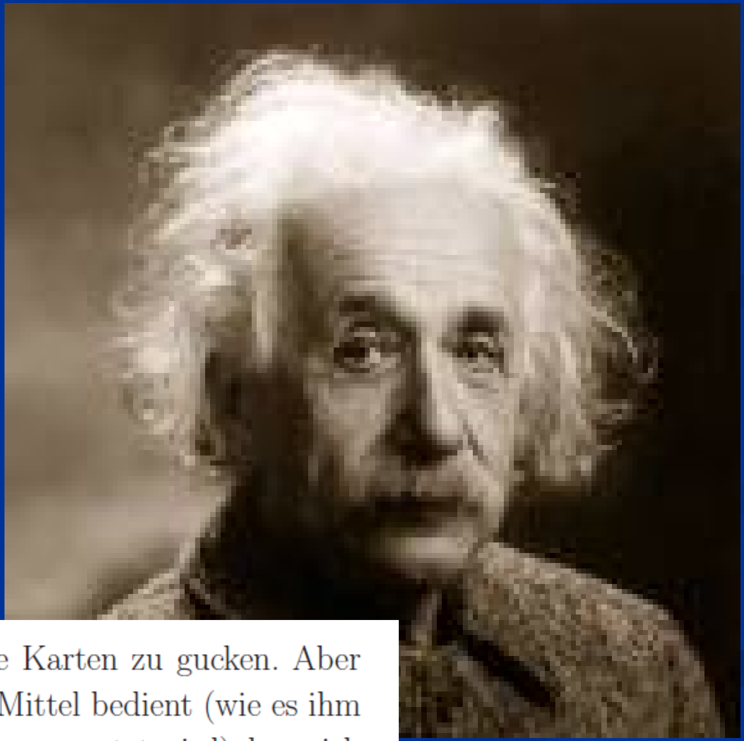
Physik beschreibt nur Wahrscheinlichkeiten

Gott würfelt

Physik beschreibt nur Wahrscheinlichkeiten

Gott würfelt

Gott würfelt nicht



“Es scheint hart, dem Herrgott in die Karten zu gucken. Aber dass er würfelt und sich telepatischer Mittel bedient (wie es ihm von der gegenwärtigen Quantentheorie zugemutet wird), kann ich keinen Augenblick glauben..”

Einstein: Brief an Cornelius Lanczos am 21. März 1942

Physik beschreibt nur Wahrscheinlichkeiten

Gott würfelt Gott würfelt nicht

Mensch kann nur Wahrscheinlichkeiten erkennen

Probabilistische Physik

- Es gibt eine Realität
- Diese kann nur durch Wahrscheinlichkeiten beschrieben werden

ein Tröpfchen Wasser …

- 10^{20} Teilchen
- elektromagnetisches Feld
- exponentielles Anwachsen der Entfernung zwischen zwei benachbarten Trajektorien

Gesetze basieren auf Wahrscheinlichkeiten

Determinismus als Spezialfall :

Wahrscheinlichkeit für Ereignis = 1

- Gesetz der großen Zahl
- eindeutiger Grundzustand …

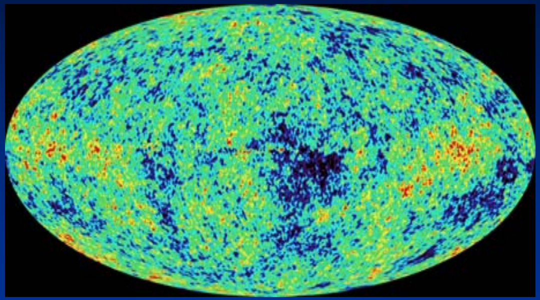
bedingte Wahrscheinlichkeit

Sequenzen von Ereignissen (Messungen) werden durch

bedingte Wahrscheinlichkeiten

beschrieben

sowohl in klassischer Statistik
als auch in Quantenstatistik

$w(t_1)$  :

nicht besonders geeignet
für Aussage , ob hier und jetzt
ein Geldstück herunterfällt

Schrödingers Katze

bedingte Wahrscheinlichkeit :
wenn Kern zerfallen
Katze tot mit w = 1
(Reduktion der Wellenfunktion)

Teilchen – Welle Dualität

Quanten–Teilchen	klassische Teilchen
Teilchen-Welle Dualität	Teilchen **– Welle Dualität**
Unschärfe	scharfer Ort und Impuls
keine Trajektorien	~~klassische Trajektorien~~
Interferenz bei Doppelspalt	nur durch einen Spalt
Tunneln	maximale Energie beschränkt Bewegung
Quanten - Wahrscheinlichkeit	klassische Wahrscheinlichkeit
Schrödinger-Gleichung	Liouville-Gleichung

Wahrscheinlichkeitsverteilung für klassisches Teilchen

klassische Wahrscheinlichkeits – verteilung im Phasenraum

$$w(x, p; t)$$

Wellenfunktion für klassisches Teilchen

klassische Wahrscheinlichkeits – verteilung im Phasenraum

$$w(x,p;t)$$

Wellenfunktion für klassisches Teilchen

$$\psi(x,p;t)$$

(hängt von Ort und Impuls ab)

$$w = \psi^2$$

Quantengesetze für Observable

$$\langle x^2 \rangle = \int_{x,p} \psi^*(x,p) x^2 \psi(x,p)$$

$$\langle x^2 \rangle = \int_{x,p} x^2 w(x,p)$$

Liouville - Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} w = -Lw$$

$$L = \frac{p}{m}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial}{\partial p}$$

beschreibt Zeitentwicklung der klassischen Wahrscheinlichkeitsverteilung für Teilchen in Potenzial V(x)

Zeitentwicklung der klassischen Wellenfunktion

$$\frac{\partial}{\partial t} w = -Lw$$

$$w = \psi^2$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \psi = -L\psi$$

$$\partial_t \psi^2 = 2\psi \partial_t \psi = -2\psi L \psi = -L\psi^2$$

Wellengleichung

$$\frac{\partial}{\partial t}\psi = -L\psi$$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = H_L\psi$$

$$H_L = -i\hbar L = -i\hbar\frac{p}{m}\frac{\partial}{\partial x} + i\hbar\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial}{\partial p}$$

modifizierte Schrödinger - Gleichung

Teilchen – Welle Dualität

Welleneigenschaften der Teilchen :

kontinuierliche Wahrscheinlichkeitsverteilung

Quanten - Zeitentwicklung

Quanten–Teilchen

- Teilchen-Welle Dualität
- Unschärfe
- keine Trajektorien

- Interferenz bei Doppelspalt
- Tunneln

- Quanten - Wahrscheinlichkeit
- Schrödinger-Gleichung

klassische Teilchen

- Teilchen **– Welle Dualität**
- scharfer Ort und Impuls
- ~~klassische Trajektorien~~

- nur durch einen Spalt
- maximale Energie beschränkt Bewegung

- klassische Wahrscheinlichkeit
- **Liouville-Gleichung**

Quanten–Teilchen	klassische Teilchen
Teilchen-Welle Dualität	Teilchen **– Welle Dualität**
Unschärfe	scharfer Ort und Impuls
keine Trajektorien	~~klassische Trajektorien~~
Interferenz bei Doppelspalt	nur durch einen Spalt **?**
Tunneln	maximale Energie beschränkt Bewegung **?**
Quanten - Wahrscheinlichkeit	klassische Wahrscheinlichkeit
Schrödinger-Gleichung	**modifizierte Evolutionsgleichung**

Modifikation der Evolution für klassische Wahrscheinlichkeitsverteilung

$$H_L = -i\hbar L = -i\hbar \frac{p}{m}\frac{\partial}{\partial x} + i\hbar \frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial}{\partial p}$$

$$H_L \longrightarrow \tilde{H}$$

$$\tilde{H} = -i\hbar \frac{p}{m}\frac{\partial}{\partial x} + V\left(x + \frac{i\hbar}{2}\frac{\partial}{\partial p}\right) - V\left(x - \frac{i\hbar}{2}\frac{\partial}{\partial p}\right)$$

modifizierte Evolution klassischer Wahrscheinlichkeiten

$$\begin{aligned} \partial_t \psi(x,p) &= -\frac{p}{m}\partial_x \psi(x,p) + K(x,\partial_p)\psi(x,p), \\ K &= -i\left[V\left(x+\frac{i}{2}\partial_p\right) - V\left(x-\frac{i}{2}\partial_p\right)\right] \end{aligned}$$

K ist reeller Operator , $w = \psi^2$

… nicht kompatiblel mit klassischen Trajektorien

… ergibt Schrödinger – Gleichung der Quantenmechanik

Quanten – Observablen
und
klassische Observablen

Quanten - Observablen

Observablen für klassischen Ort und Impuls

$$X_{cl} = x \ , \ P_{cl} = p \ , \ [X_{cl}, P_{cl}] = 0$$

Observablen für Quanten - Ort und Impuls

$$X_Q = x + \frac{i\hbar}{2}\frac{\partial}{\partial_p}$$

$$P_Q = p - \frac{i\hbar}{2}\frac{\partial}{\partial x}$$

… *kommutieren nicht*

$$[X_Q, P_Q] = i\hbar$$

Unschärfe

$$[X_Q, P_Q] = i\hbar$$

$$\langle P_Q^2 \rangle = \langle P_{cl}^2 \rangle + \frac{1}{16} \langle (\partial_x \ln w)^2 \rangle$$

Quanten – Observablen enthalten statistischen Anteil

(ähnlich Entropie , Temperatur)

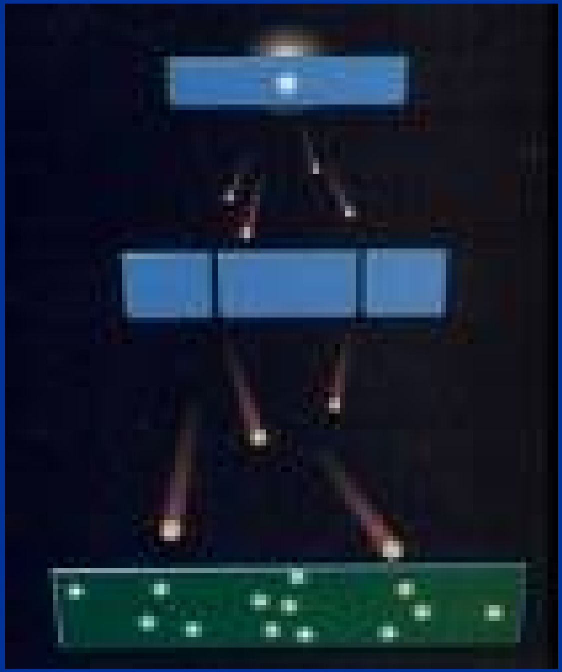
Quantenteilchen

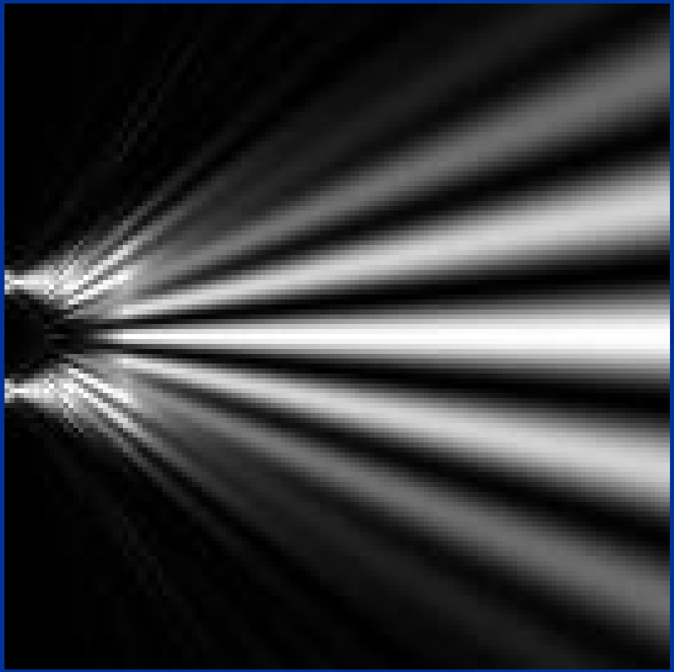
mit Evolutionsgleichung

$$\begin{aligned} \partial_t \psi(x,p) &= -\frac{p}{m}\partial_x \psi(x,p) + K(x,\partial_p)\psi(x,p), \\ K &= -i\left[V\left(x+\frac{i}{2}\partial_p\right) - V\left(x-\frac{i}{2}\partial_p\right)\right] \end{aligned}$$

Quanten – Observablen erfüllen alle Vorhersagen der Quantenmechanik für Teilchen in Potenzial V

Doppelspalt - Experiment





Quantenformalismus aus klassischen Wahrscheinlichkeiten

reiner Zustand

wird beschrieben durch
quantenmechanische Wellenfunktion

$$\psi_Q(x)$$

realisiert für
klassische Wahrschein-
lichkeiten der Form

$$w(x,p) = \int_{r,r'} e^{ip(r'-r)}$$
$$\psi_Q^*\left(x+\frac{r'}{2}\right)\psi_Q\left(x-\frac{r'}{2}\right)\psi_Q^*\left(x-\frac{r}{2}\right)\psi_Q\left(x+\frac{r}{2}\right)$$

Zeitentwicklung beschrieben durch
Schrödinger – Gleichung

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi_Q(x) = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi_Q(x) + V(x)\psi_Q(x)$$

Dichte – Matrix und Wigner-transform

Wigner – transformierte Dichtematrix in der Quantenmechanik

$$\bar{\rho}_W$$

erlaubt einfache Berechnung der Erwartungswerte quanten-mechanischer Observablen

$$\langle F(X_Q, P_Q) \rangle = \int_{x,p} F(x,p)\,\bar{\rho}_W(x,p)$$

kann aus Wellenfunktion für klassisches Teilchen konstruiert werden !

$$\bar{\rho}_W(x,p) = \int_{r,r',s,s'} \psi(x+\frac{r}{2}, p+s)\,\psi(x+\frac{r'}{2}, p+s')\cos(s'r - sr')$$

Quanten – Observablen und klassische Observablen

$$\langle F(X_{cl}, P_{cl}) \rangle = \int_{x,p} F(x,p) w(x,p)$$

$$\langle F(X_Q, P_Q) \rangle = \int_{x,p} F(x,p) \bar{\rho}_w(x,p)$$

Zwitter

Unterschied zwischen Quanten – Teilchen und klassischen Teilchen nur durch unterschiedliche Zeitentwicklung

$$H_L = -i\hbar L = -i\hbar \frac{p}{m}\frac{\partial}{\partial x} + i\hbar \frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial}{\partial p}$$

CL

kontinuierliche Interpolation

$$\tilde{H} = -i\hbar \frac{p}{m}\frac{\partial}{\partial x} + V\left(x + \frac{i\hbar}{2}\frac{\partial}{\partial p}\right) - V\left(x - \frac{i\hbar}{2}\frac{\partial}{\partial p}\right)$$

QM

Quantenteilchen und klassische Statistik

- Gemeinsame Konzepte und gemeinsamer Formalismus für Quanten- und klassische Teilchen : klassische Wahrscheinlichkeitverteilung , Wellenfunktion
- Unterschiedliche Zeitentwicklung , unterschiedliche Hamilton- Operatoren
- Kontinuierliche Interpolation zwischen Quanten- und klassischen Teilchen möglich - Zwitter

Quantenmechanik aus klassischen Wahrscheinlichkeiten

klassische Wahrscheinlichkeitsverteilung kann explizit angegeben werden für :

- quantenmechanisches Zwei-Zustands-System Quantencomputer : Hadamard gate
- Vier-Zustands-System (CNOT gate)
- verschränkte Quantenzustände
- Interferenz

Bell’sche Ungleichungen

werden verletzt durch bedingte Korrelationen

Bedingte Korrelationen für zwei Ereignisse
oder Messungen reflektieren bedingte Wahrscheinlichkeiten

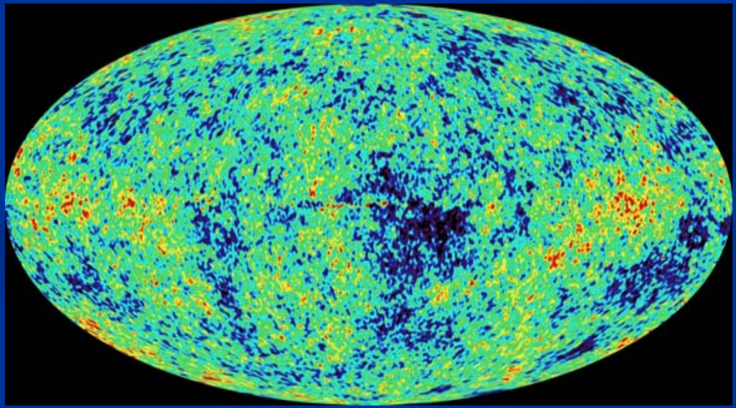
Unterschied zu klassischen Korrelationen
(Klassische Korrelationen werden implizit zur Herleitung der Bell’schen Ungleichungen verwandt.)

Bedingte Dreipunkt- Korrelation nicht kommutativ

Realität

- Korrelationen sind physikalische Realität , nicht nur Erwartungswerte oder Messwerte einzelner Observablen

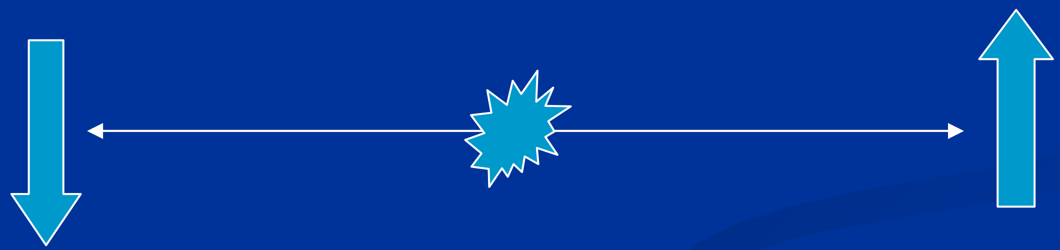
- Korrelationen können nicht-lokal sein (auch in klassischer Statistik) ; kausale Prozesse zur Herstellung nicht-lokaler Korrelationen erforderlich



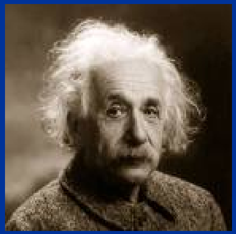
- Korrelierte Untersysteme sind nicht separabel in unabhängige Teilsysteme – Ganzes mehr als Summe der Teile

EPR - Paradoxon

Korrelation zwischen zwei Spins wird bei Teilchenzerfall hergestellt



Kein Widerspruch zu Kausalität oder Realismus wenn Korrelationen als Teil der Realität verstanden werden

( hat mal nicht Recht)

Untersystem und Umgebung: unvollständige Statistik

typische Quantensysteme sind Untersysteme
von klassischen Ensembles mit unendlich vielen
Freiheitsgraden (Umgebung)

probabilistische Observablen für Untersysteme :
Wahrscheinlichkeitsverteilung für Messwerte
in Quantenzustand

Was ist ein Atom ?

- Quantenmechanik : isoliertes Objekt
- Quantenfeldtheorie : Anregung eines komplizierten Vakuums
- Klassische Statistik : Untersystem eines Ensembles mit unendlich vielen Freiheitsgraden

Essenz des Quanten - Formalismus

Beschreibung geeigneter Untersysteme von klassicchen statistischen Ensembles

1) Äquivalenz - Klassen vn probabilistischen Observablen
2) Unvollständige Statistik
3) Korrelation zwischen Messungen oder Ereignissen basieren auf bedingten Wahrscheinlichkeiten
4) Unitäre Zeitentwicklung für isolierte Untersysteme

Zusammenfassung

- Quantenstatistik entsteht aus klassischer Statistik

  Quantenzustand, Superposition , Interferenz , Verschränkung , Wahrscheinlichkeits-Amplitude
- Unitäre Zeitentwicklung in der Quantenmechanik beschreibbar durch Zeitentwicklung klassischer Wahrscheinlichkeiten
- Bedingte Korrelationen für Messungen sowohl in Quantensystem als auch klassischer Statistik

Quantenteilchen und klassische Statistik

- Gemeinsame Konzepte und gemeinsamer Formalismus für Quanten- und klassische Teilchen : klassische Wahrscheinlichkeitverteilung , Wellenfunktion
- Unterschiedliche Zeitentwicklung , unterschiedliche Hamilton- Operatoren
- Kontinuierliche Interpolation zwischen Quanten- und klassischen Teilchen möglich - Zwitter

Ende

conditional correlations

conditional probability

$w^{AB}_{+,\alpha}$ probability to find value +1 for product of measurements of A and B

$$\begin{aligned} w^{AB}_{+,\alpha} &= (w^A_+)^B_+ w^B_{+,\alpha} + (w^A_-)^B_- w^B_{-,\alpha} \\ w^{AB}_{-,\alpha} &= (w^A_+)^B_- w^B_{-,\alpha} + (w^A_-)^B_+ w^B_{+,\alpha} \end{aligned}$$

$(w^A_+)^B_+$ probability to find A=1 after measurement of B=1

… can be expressed in terms of expectation value of A in eigenstate of B

$$\begin{aligned} (w^A_\pm)^B_+ &= \frac{1}{2}(1 \pm \langle A \rangle_{+B}) \\ (w^A_\pm)^B_- &= \frac{1}{2}(1 \pm \langle A \rangle_{-B}) \end{aligned}$$

measurement correlation

$$\langle BA \rangle_m = (w_+^B)_+^A w_{+,s}^A - (w_-^B)_+^A w_{+,s}^A - (w_+^B)_-^A w_{-,s}^A + (w_-^B)_-^A w_{-,s}^A$$

After measurement A=+1 the system must be in eigenstate with this eigenvalue. Otherwise repetition of measurement could give a different result ! ρ_{A+}

$$(w_+^B)_+^A - (w_-^B)_+^A = \mathrm{tr}(\hat{B}\rho_{A+})$$

measurement changes state
in all statistical systems !

quantum and classical

eliminates possibilities that are not realized

physics makes statements
about possible
sequences of events
and their probabilities

unique eigenstates for M=2

$M = 2:$

$$\rho_{A+} = \frac{1}{2}(1 + \hat{A})$$

$$(w_{\pm}^{B})_{+}^{A} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{4}\mathrm{tr}(\hat{B}\hat{A}) \;,\; (w_{\pm}^{B})_{-}^{A} = \frac{1}{2} \mp \frac{1}{4}\mathrm{tr}(\hat{B}\hat{A})$$

eigenstates with A = 1

$$\rho_{A+} = \frac{1}{M}(1 + \hat{A} + X)\ ,\ \mathrm{tr}(\hat{A}X) = 0\ ,\ \mathrm{tr}X = 0$$

$$P = M\mathrm{tr}(\rho_{A+}^2) = 1 + \frac{1}{M}\mathrm{tr}X^2$$

$$\rho_{A+}^2 - \rho_{A+} = \frac{1}{M^2}(X^2 + \{\hat{A}, X\}) - \left(1 - \frac{2}{M}\right)\rho_{A+}$$

measurement preserves pure states if projection

$$\rho_{A+} = \frac{1}{2(1 + \langle A \rangle)}(1 + \hat{A})\rho(1 + \hat{A})$$

measurement correlation equals quantum correlation

$$\langle BA \rangle_m = \frac{1}{2} \mathrm{tr}(\{\hat{A}, \hat{B}\}\rho)$$

probability to measure A=1 and B=1 :

$$w_{++} = \frac{1}{4}(1 + \langle A \rangle + \langle B \rangle + \langle AB \rangle_m)$$

$$w_{++} = \frac{1}{4}\Big(1 + e_k^{(A)} e_k^{(B)} + \rho_k [e_k^{(A)} + e_k^{(B)} + d_{mlk} e_m^{(A)} e_l^{(B)}]\Big)$$

probability that A and B have both the value +1 in classical ensemble

$$p_{++} = \frac{1}{4}(1 + \langle A \rangle + \langle B \rangle + \langle A \cdot B \rangle)$$

$$\langle A \cdot B \rangle = \sum_{\tau} p_\tau A_\tau B_\tau$$

not a property of the subsystem

probability to measure A and B both +1

$$w_{++} = \frac{1}{4}(1 + \langle A \rangle + \langle B \rangle + \langle AB \rangle_m)$$

$$w_{++} = \frac{1}{4}\left(1 + e_k^{(A)} e_k^{(B)} + \rho_k [e_k^{(A)} + e_k^{(B)} + d_{mlk} e_m^{(A)} e_l^{(B)}]\right)$$

can be computed from the subsystem

sequence of three measurements and quantum commutator

$$
\begin{aligned}
\langle ABC\rangle_m - \langle ACB\rangle_m &= \frac{1}{4}\mathrm{tr}\left([\hat{A},[\hat{B},\hat{C}]]\,\rho\right),\\
\langle ABC\rangle_m - \langle CBA\rangle_m &= \frac{1}{4}\mathrm{tr}\left([\hat{B},[\hat{A},\hat{C}]]\,\rho\right),\\
\langle ABC\rangle_m - \langle BAC\rangle_m &= 0
\end{aligned}
$$

two measurements commute , not three