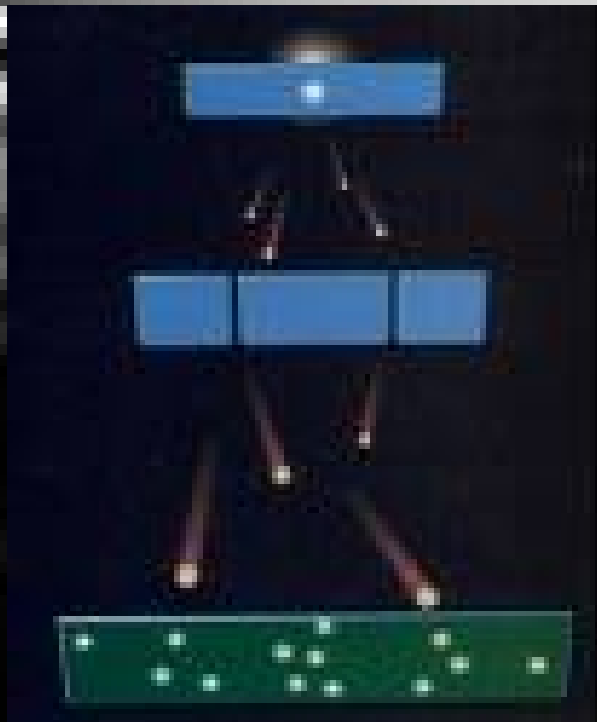


Quantenphysik aus klassischen Wahrscheinlichkeiten

C. Wetterich



Gott würfelt

Gott würfelt nicht

*Quanten – Teilchen
und
klassische Teilchen*

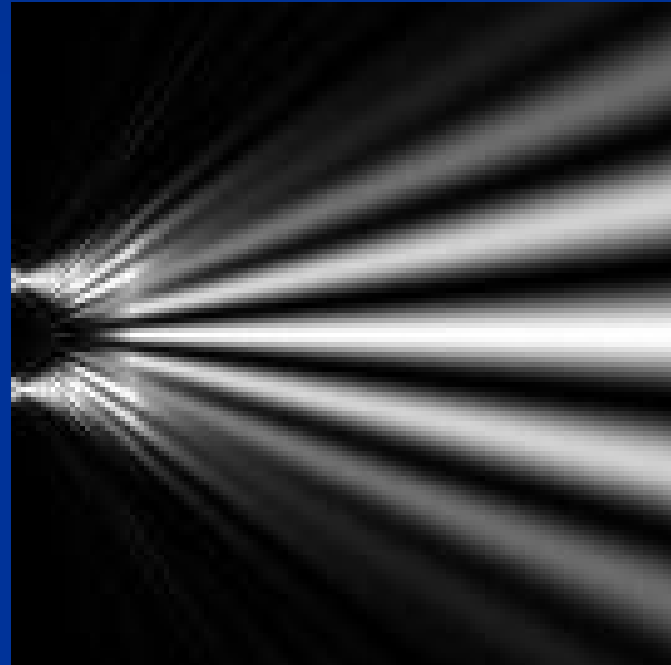
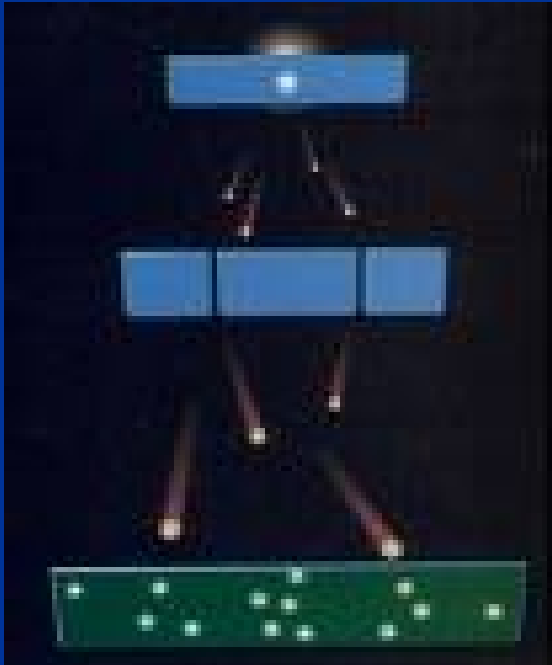
Quanten-Teilchen

- Teilchen-Welle Dualität
- Unschärfe
- keine Trajektorien
- Tunneln
- Interferenz bei Doppelspalt

klassische Teilchen

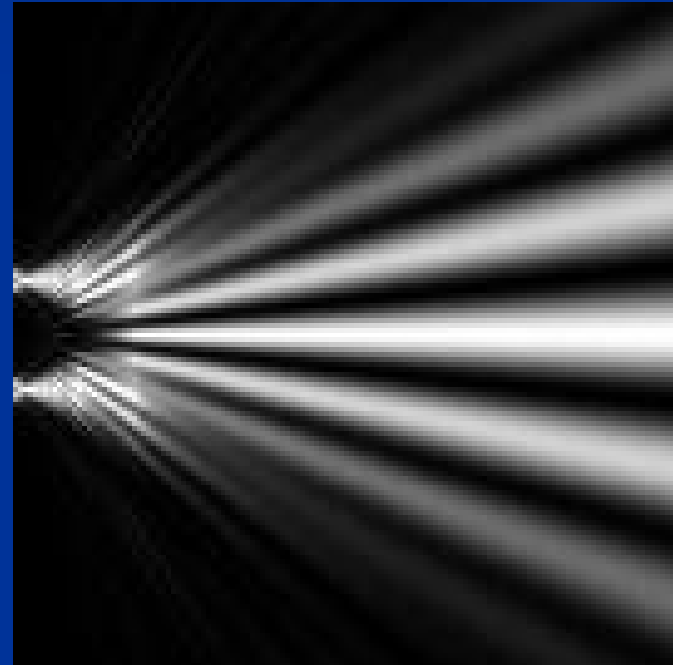
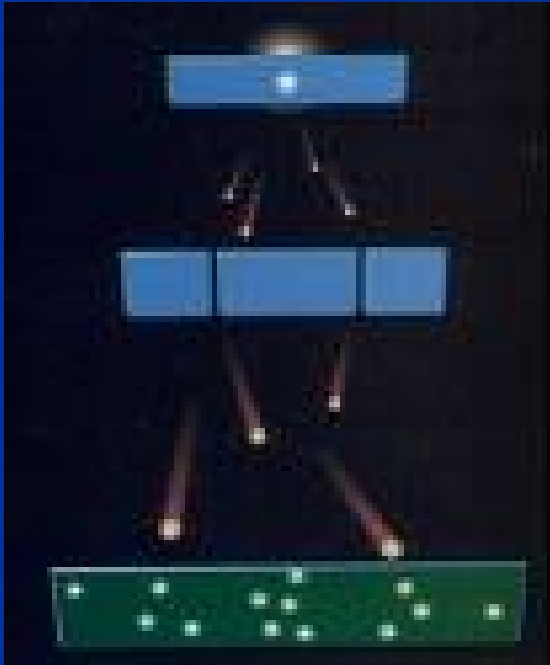
- Teilchen
- scharfer Ort und Impuls
- klassische Trajektorien
- maximale Energie beschränkt Bewegung
- nur durch einen Spalt

Doppelspalt - Experiment



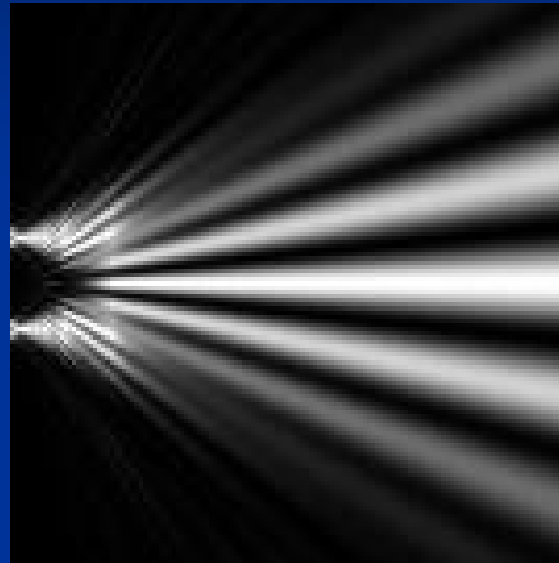
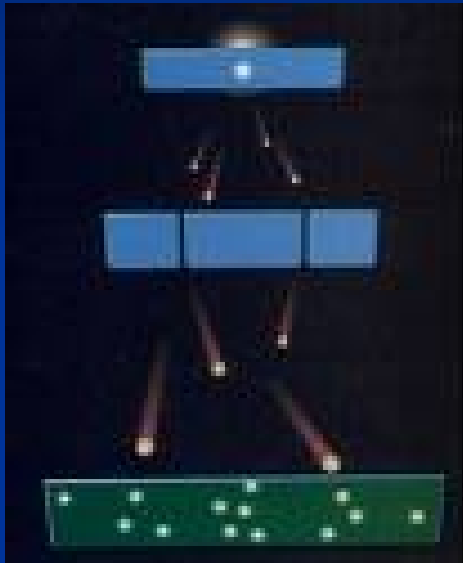
Doppelspalt - Experiment

Wahrscheinlichkeits –
Verteilung



ein isoliertes Teilchen ! keine Wechselwirkung
zwischen Atomen , die durch Spalt fliegen

Doppelspalt - Experiment



Kann man klassische Wahrscheinlichkeits –
Verteilung im Phasenraum und ein
Zeitentwicklungs – Gesetz für diese angeben ,
die Interferenzmuster beschreibt ?

Quanten-Teilchen aus klassischen Wahrscheinlichkeiten

- Wahrscheinlichkeitsverteilung im Phasenraum für **ein** Teilchen

$$w(x, p)$$

$$w(x, p) \geq 0$$

$$\int_{x, p} w(x, p) = 1$$

wie für klassisches Teilchen !

- Observablen verschieden von klassischen Observablen
- Zeitentwicklung der Wahrscheinlichkeitsverteilung verschieden von klassischen Teilchen

*Quantenphysik kann durch
klassische Wahrscheinlichkeiten
beschrieben werden !*

Unterschiede zwischen Quantenphysik und klassischen Wahrscheinlichkeiten

Quanten - Konzepte

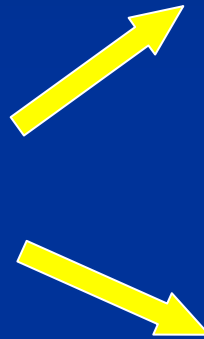
- Wahrscheinlichkeits - Amplitude
- Verschränkung
- Interferenz
- Superposition von Zuständen
- Fermionen und Bosonen
- unitäre Zeitentwicklung
- Übergangsamplitude
- nicht-kommutierende Operatoren
- Verletzung der Bell'schen Ungleichung

Quantenphysik

Wellenfunktion

Wahrscheinlichkeit

Phase



Kann Quantenphysik durch klassische Wahrscheinlichkeiten beschrieben werden ?

“No go “ Theoreme

Bell ,

Clauser , Horne , Shimony , Holt

Kochen , Specker

dennoch :

*Quantenphysik kann durch
klassische Wahrscheinlichkeiten
beschrieben werden !*

Zwitter

- Keine unterschiedlichen Konzepte für klassische Teilchen und Quanten – Teilchen
- Kontinuierliche Interpolation zwischen klassischen Teilchen und Quanten – Teilchen möglich

Quantenteilchen und klassische Wahrscheinlichkeiten

Quanten-Teilchen

- Teilchen-Welle Dualität
- Unschärfe
- keine Trajektorien
- Interferenz bei Doppelspalt
- Tunneln
- Quanten -
Wahrscheinlichkeit
- Schrödinger-Gleichung

klassische Teilchen

- Teilchen
- scharfer Ort und Impuls
- klassische Trajektorien
- nur durch einen Spalt
- maximale Energie
beschränkt Bewegung
- klassische
Wahrscheinlichkeit
- Liouville-Gleichung

Schritt 1

keine klassischen Trajektorien

Quanten-Teilchen

- Teilchen-Welle Dualität
- Unschärfe
- keine Trajektorien
- Interferenz bei Doppelspalt
- Tunneln
- Quanten - Wahrscheinlichkeit
- Schrödinger-Gleichung

klassische Teilchen

- Teilchen – **Welle Dualität**
- scharfer Ort und Impuls
- ~~klassische Trajektorien~~
- nur durch einen Spalt
- maximale Energie
beschränkt Bewegung
- klassische Wahrscheinlichkeit
- Liouville-Gleichung

Quanten-Teilchen

- Quanten –
Wahrscheinlichkeits-
Amplitude $\psi(x)$
- Schrödinger-Gleichung

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi_Q(x) = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi_Q(x) + V(x) \psi_Q(x)$$

klassische Teilchen

- klassische Wahrscheinlichkeit
im Phasenraum
 $w(x,p)$
- Liouville-Gleichung für w
(entspricht Newton Gl.
für Trajektorien)

$$\frac{\partial}{\partial t} w = -Lw$$

$$L = \frac{p}{m} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial}{\partial p}$$

keine klassischen Trajektorien

auch für klassische Teilchen in der Mikrophysik :

Trajektorien mit festem Ort und Impuls zu jedem Zeitpunkt sind inadequate Idealisierung !

aber zumindest formal möglich als Grenzfall

Schritt 2

Änderung der Liouville Gleichung

Quanten-Teilchen

- Teilchen-Welle Dualität
- Unschärfe
- keine Trajektorien
- Interferenz bei Doppelspalt
- Tunneln
- Quanten - Wahrscheinlichkeit
- Schrödinger-Gleichung

klassische Teilchen

- Teilchen – **Welle Dualität**
- scharfer Ort und Impuls
- ~~■ klassische Trajektorien~~
- nur durch einen Spalt
- maximale Energie
beschränkt Bewegung
- klassische Wahrscheinlichkeit
- ~~■ Liouville-Gleichung~~

Quanten-Teilchen

- Teilchen-Welle Dualität
- Unschärfe
- keine Trajektorien
- Interferenz bei Doppelspalt
- Tunneln
- Quanten - Wahrscheinlichkeit
- Schrödinger-Gleichung

klassische Teilchen

- Teilchen – **Welle Dualität**
- scharfer Ort und Impuls
- ~~klassische Trajektorien~~
- nur durch einen Spalt ?
- maximale Energie
beschränkt Bewegung ?
- klassische Wahrscheinlichkeit
- **modifizierte
Evolutionsgleichung**

Evolutionsgleichung

- Zeitentwicklung der Wahrscheinlichkeitsdichte muss als Gesetz vorgegeben werden
- nicht a priori bekannt
- Newton's Gleichung mit Trajektorien muss nur in geeignetem **Grenzfall** folgen

Zwitter

- *gleicher Formalismus für Quantenteilchen und klassische Teilchen*
- *unterschiedliche Zeitentwicklung der Wahrscheinlichkeitsverteilung*
- **Zwitter :**
zwischen Quanten und klassischen Teilchen –
kontinuierliche Interpolation der
Zeitentwicklungs - Gleichung

Schritt 3

modifizierte Observablen

Quanten-Teilchen ← klassische Teilchen

- Teilchen-Welle Dualität
- Unschärfe
- keine Trajektorien

- Interferenz bei Doppelspalt
- Tunneln

- Quanten - Wahrscheinlichkeit
- Schrödinger-Gleichung

- Teilchen – **Welle Dualität**
- ~~■ scharfer Ort und Impuls~~
- ~~■ klassische Trajektorien~~

- ~~■ nur durch einen Spalt ?~~
- ~~■ maximale Energie beschränkt
Bewegung ?~~

- klassische Wahrscheinlichkeit
- **modifizierte
Evolutionsgleichung**

Einschränkung der möglichen Information
unvollständige Statistik

Orts - Observable

- verschiedene Observablen je nach experimenteller Situation
- geeignete Observable für Mikrophysik muss gefunden werden
- klassische Ortsobservable : Idealisierung einer unendlich präzisen Auflösung
- Quanten – Observable auch mit ausgedünnter Information noch berechenbar

*klassische Wahrscheinlichkeiten –
keine deterministische klassische Theorie*

Probabilistischer Realismus

*Physikalische Theorien und Gesetze
beschreiben immer nur Wahrscheinlichkeiten*

Physik beschreibt nur Wahrscheinlichkeiten



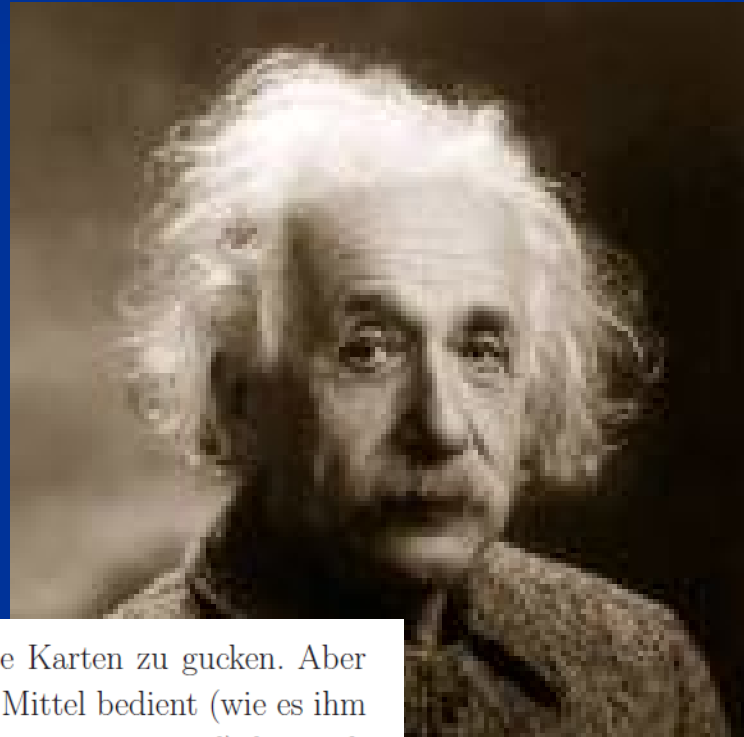
Gott würfelt

Physik beschreibt nur Wahrscheinlichkeiten

Gott würfelt



Gott würfelt nicht



“Es scheint hart, dem Herrgott in die Karten zu gucken. Aber dass er würfelt und sich telepatischer Mittel bedient (wie es ihm von der gegenwärtigen Quantentheorie zugemutet wird), kann ich keinen Augenblick glauben..”

Einstein: Brief an Cornelius Lanczos am 21. März 1942

Physik beschreibt nur Wahrscheinlichkeiten

Gott würfelt

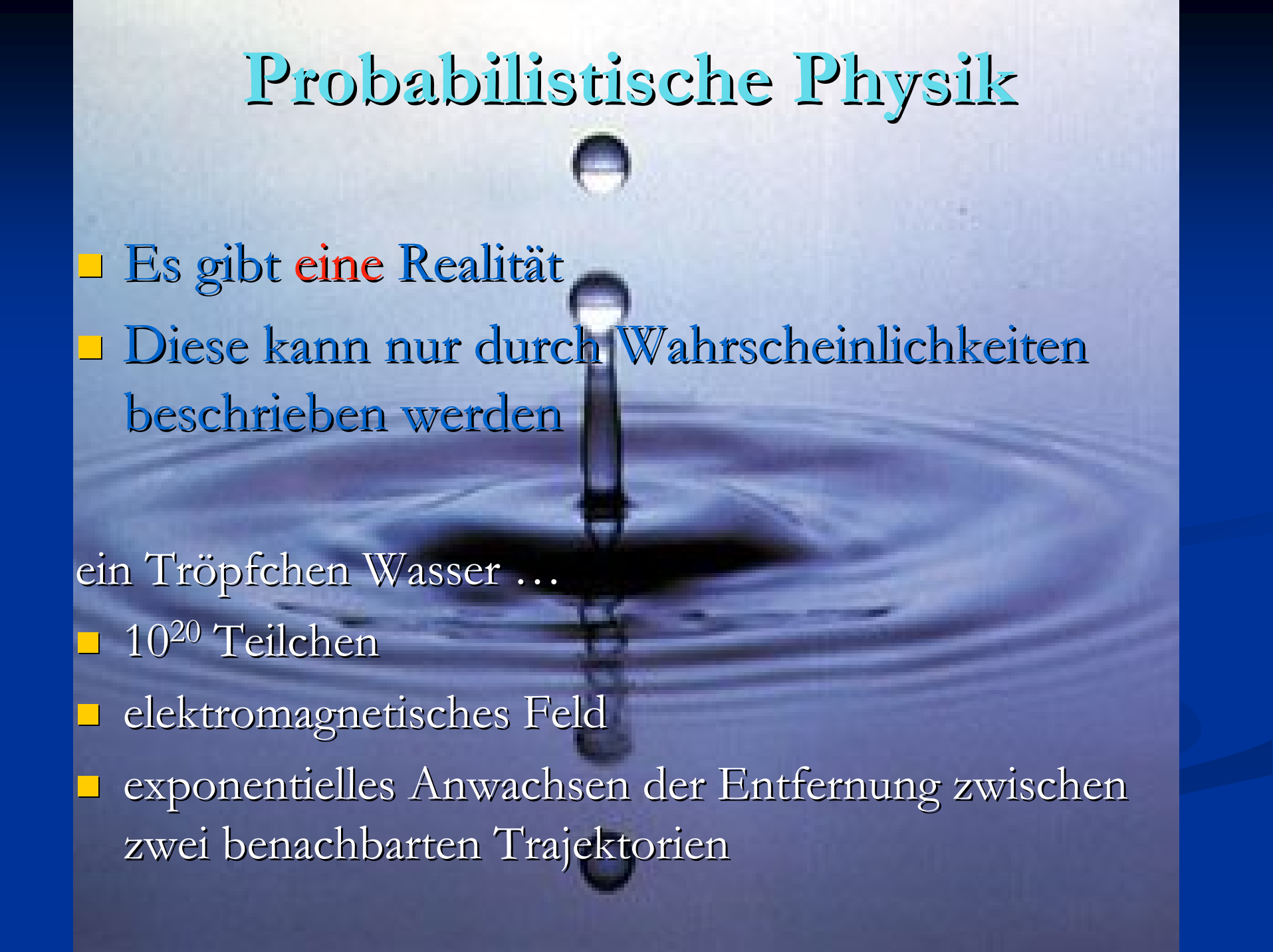
Gott würfelt nicht



*Mensch kann nur
Wahrscheinlichkeiten erkennen*



Probabilistische Physik

A background image showing a water droplet falling into a pool of water, creating concentric ripples. The droplet is captured mid-fall, just above the surface, with a small splash visible below it. The water is a deep blue color, and the ripples are lighter blue, creating a sense of motion and depth.

- Es gibt **eine** Realität
- Diese kann nur durch Wahrscheinlichkeiten beschrieben werden

ein Tröpfchen Wasser ...

- 10^{20} Teilchen
- elektromagnetisches Feld
- exponentielles Anwachsen der Entfernung zwischen zwei benachbarten Trajektorien

Probabilistischer Realismus

*Die Grundlage der Physik sind
Wahrscheinlichkeiten zur Vorhersage von reellen
Ereignissen*

Gesetze basieren auf Wahrscheinlichkeiten

Determinismus als Spezialfall :

Wahrscheinlichkeit für Ereignis = 1 oder 0

- Gesetz der großen Zahl
- eindeutiger Grundzustand ...



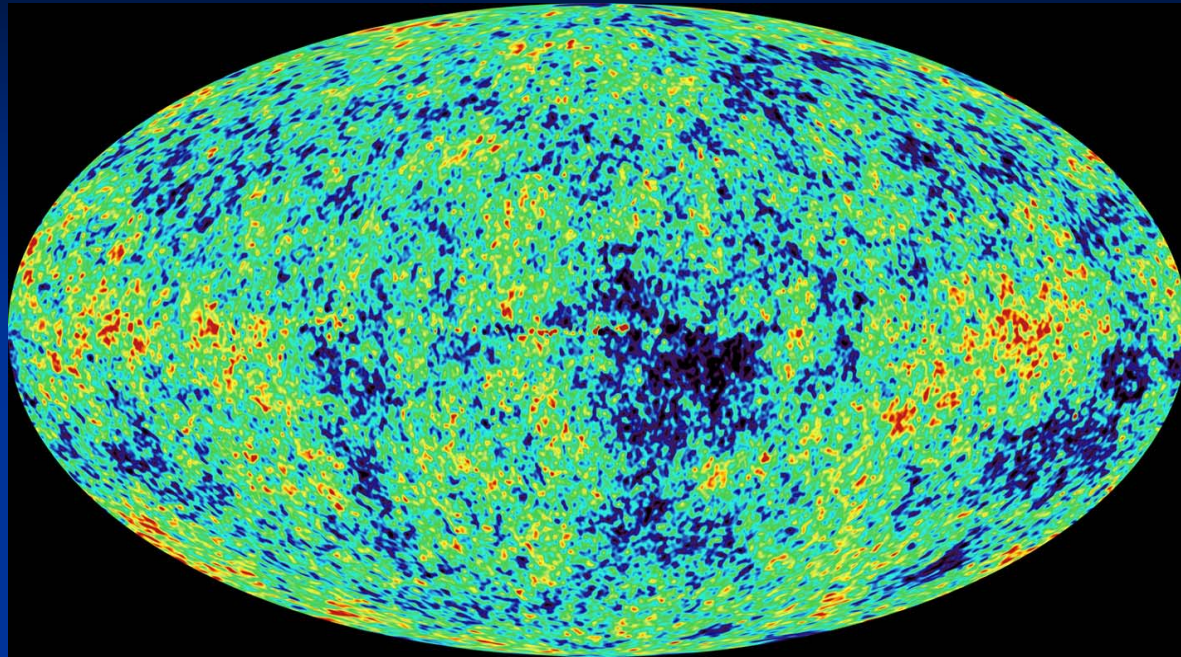
bedingte Wahrscheinlichkeit

Sequenzen von Ereignissen (Messungen)
werden durch

bedingte Wahrscheinlichkeiten
beschrieben

*sowohl in klassischer Statistik
als auch in Quantenstatistik*

$w(t_1)$



:

nicht besonders geeignet
für Aussage , ob hier und jetzt
ein Geldstück herunterfällt

Schrödingers Katze



bedingte Wahrscheinlichkeit :
wenn Kern zerfallen
dann Katze tot mit $w_c = 1$
(Reduktion der Wellenfunktion)

Teilchen – Welle Dualität

Quanten-Teilchen

- Teilchen-Welle Dualität
- Unschärfe
- keine Trajektorien
- Interferenz bei Doppelspalt
- Tunneln
- Quanten - Wahrscheinlichkeit
- Schrödinger-Gleichung

klassische Teilchen

- Teilchen – **Welle Dualität**
- scharfer Ort und Impuls
- ~~klassische Trajektorien~~
- nur durch einen Spalt
- maximale Energie
beschränkt Bewegung
- klassische Wahrscheinlichkeit
- Liouville-Gleichung

Quanten Formalismus für klassisches Teilchen

Wahrscheinlichkeitsverteilung für **ein** klassisches Teilchen

klassische Wahrscheinlichkeits –
verteilung im Phasenraum

$$w(x, p; t)$$

Wellenfunktion für klassisches Teilchen

klassische Wahrscheinlichkeits –
verteilung im Phasenraum

$$w(x, p; t)$$

Wellenfunktion für
klassisches Teilchen

$$\psi_{\text{C}}(x, p; t)$$

(hängt von Ort
und Impuls ab)

$$w = \psi_{\text{C}}^2$$

Wellenfunktion für ein klassisches Teilchen

$$\psi_{\text{c}}(x, p; t)$$

$$w = \psi_{\text{c}}^2$$

- reell
- hängt von Ort und Impuls ab
- Quadrat ergibt Wahrscheinlichkeit

Quantengesetze für Observable

$$\langle x^2 \rangle = \int_{x,p} \underbrace{\psi^*}_{\mathbf{C}}(x,p) x^2 \underbrace{\psi}_{\mathbf{C}}(x,p)$$

$$\langle x^2 \rangle = \int_{x,p} x^2 w(x,p)$$

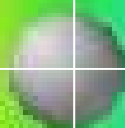
ψ

y

$p_z < 0$

$p_z > 0$

x



Liouville - Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} w = -Lw$$

$$L = \frac{p}{m} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial}{\partial p}$$

beschreibt **klassische** Zeitentwicklung der klassischen Wahrscheinlichkeitsverteilung für Teilchen in Potenzial $V(x)$

Zeitentwicklung der klassischen Wellenfunktion

$$\frac{\partial}{\partial t} w = -Lw$$

$$w = \psi^2_{\mathbf{C}}$$



$$\frac{\partial}{\partial t} \psi_{\mathbf{C}} = -L\psi_{\mathbf{C}}$$

$$\partial_t \psi^2 = 2\psi \partial_t \psi = -2\psi L\psi = -L\psi^2$$

Wellengleichung

$$\frac{\partial}{\partial t}\psi = -L\psi$$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi_{\mathbf{C}} = H_L\psi_{\mathbf{C}}$$

$$H_L = -i\hbar L = -i\hbar\frac{p}{m}\frac{\partial}{\partial x} + i\hbar\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial}{\partial p}$$

modifizierte Schrödinger - Gleichung

Wellengleichung

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi_{\mathbf{C}} = H_L \psi_{\mathbf{C}}$$

$$H_L = -i\hbar L = -i\hbar \frac{p}{m} \frac{\partial}{\partial x} + i\hbar \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial}{\partial p}$$

fundamentale Gleichung für klassisches Teilchen in
Potenzial $V(\mathbf{x})$

ersetzt Newton Gleichung

Teilchen – Welle Dualität

Welleneigenschaften der Teilchen :

kontinuierliche Wahrscheinlichkeitsverteilung

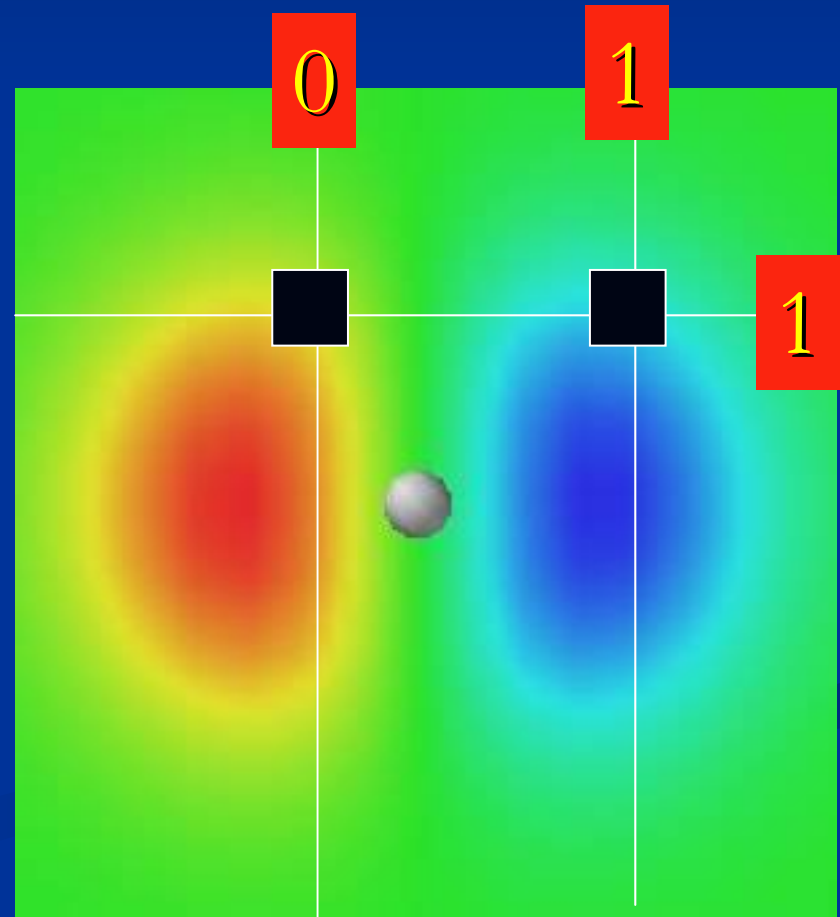
Teilchen – Welle Dualität

Experiment ob Teilchen an Ort x - ja oder nein :

diskrete Alternative

Wahrscheinlichkeitsverteilung,
Teilchen an Ort x anzutreffen :

kontinuierlich



Teilchen – Welle Dualität

*Alle statistischen Eigenschaften klassischer Teilchen
können im Quanten – Formalismus beschrieben werden !*

noch keine Quanten - Teilchen

*Quanten – Observable
und
klassische Observable*

Welche Observablen wählen ?

- Impuls: p oder $-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$?
- Ort : x oder $i\hbar\frac{\partial}{\partial p}$?
- Verschiedene Möglichkeiten , im Prinzip der Messanordnung angepasst

Quanten - Observablen

Observablen für klassischen
Ort und Impuls

$$X_{cl} = x, P_{cl} = p, [X_{cl}, P_{cl}] = 0$$

Observablen für Quanten -
Ort und Impuls

$$X_Q = x + \frac{i\hbar}{2} \frac{\partial}{\partial p}$$

$$P_Q = p - \frac{i\hbar}{2} \frac{\partial}{\partial x}$$

... *kommutieren nicht*

$$[X_Q, P_Q] = i\hbar$$

Unschärfe

$$[X_Q, P_Q] = i\hbar$$



Heisenberg'sche
Unschärfe-Relation

$$\langle P_Q^2 \rangle = \langle P_{cl}^2 \rangle + \frac{1}{16} \langle (\partial_x \ln w)^2 \rangle$$

Quanten – Observablen enthalten
statistischen Anteil
(ähnlich Entropie , Temperatur)

*verwende Quanten – Observablen
zur Beschreibung von
Orts- und Impuls- Messungen von Teilchen*

Quanten - Zeitentwicklung

Quanten-Teilchen

- Teilchen-Welle Dualität
- Unschärfe
- keine Trajektorien
- Interferenz bei Doppelspalt
- Tunneln
- Quanten - Wahrscheinlichkeit
- Schrödinger-Gleichung

klassische Teilchen

- Teilchen – **Welle Dualität**
- scharfer Ort und Impuls
- ~~klassische Trajektorien~~
- nur durch einen Spalt
- maximale Energie
beschränkt Bewegung
- klassische Wahrscheinlichkeit
- **Liouville-Gleichung**

Quanten-Teilchen

- Teilchen-Welle Dualität
- Unschärfe
- keine Trajektorien
- Interferenz bei Doppelspalt
- Tunneln
- Quanten - Wahrscheinlichkeit
- Schrödinger-Gleichung

klassische Teilchen

- Teilchen – **Welle Dualität**
- scharfer Ort und Impuls
- ~~klassische Trajektorien~~
- nur durch einen Spalt ?
- maximale Energie
beschränkt Bewegung ?
- klassische Wahrscheinlichkeit
- **modifizierte
Evolutionsgleichung**

Modifikation der Evolution für klassische Wahrscheinlichkeitsverteilung

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi_{\mathbf{C}} = H_L \psi_{\mathbf{C}}$$

$$H_L = -i\hbar L = -i\hbar \frac{p}{m} \frac{\partial}{\partial x} + i\hbar \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial}{\partial p}$$

$$H_L \rightarrow H_{\mathcal{W}}$$

$$H_{\mathcal{W}} = -i\hbar \frac{p}{m} \frac{\partial}{\partial x} + V \left(x + \frac{i\hbar}{2} \frac{\partial}{\partial p} \right) - V \left(x - \frac{i\hbar}{2} \frac{\partial}{\partial p} \right)$$

Quantenteilchen

Evolutionsgleichung

$$\begin{aligned}\partial_t \psi_C(x, p) &= -\frac{p}{m} \partial_x \psi_C(x, p) + K(x, \partial_p) \psi_C(x, p), \\ K &= -i \left[V \left(x + \frac{i}{2} \partial_p \right) - V \left(x - \frac{i}{2} \partial_p \right) \right]\end{aligned}$$

**fundamentale Gleichung für Quanten -
Teilchen in Potenzial V
ersetzt Newton Gleichung**

Quantenteilchen

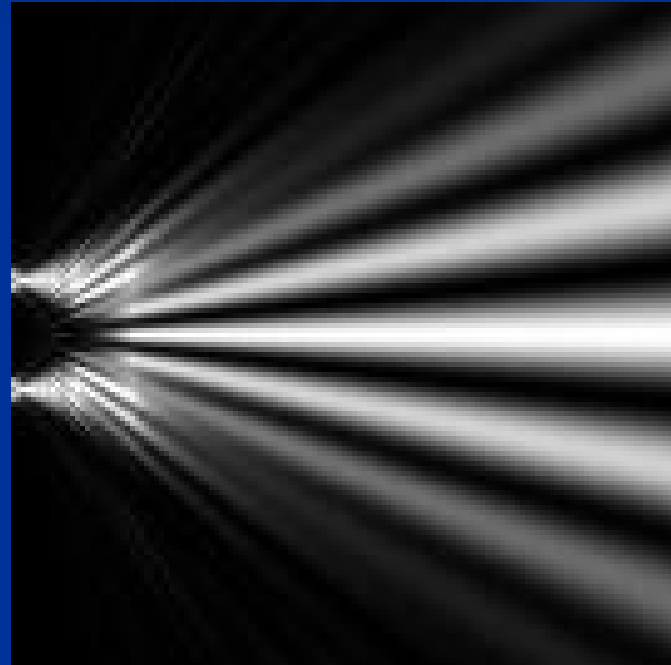
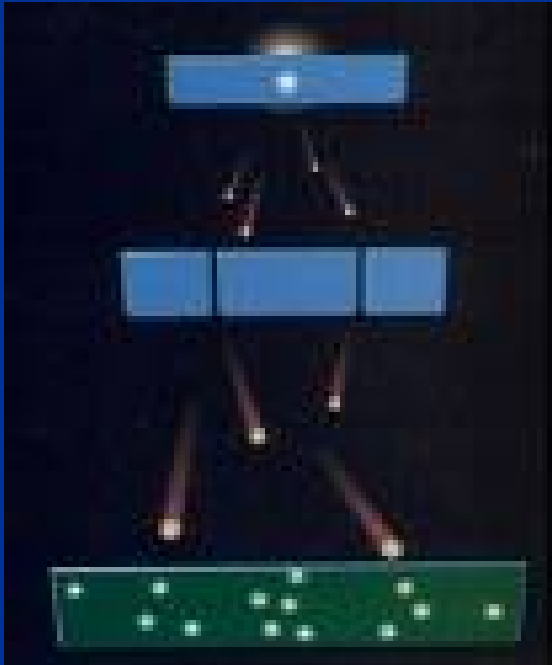
mit Evolutionsgleichung

$$\begin{aligned}\partial_t \psi_C(x, p) &= -\frac{p}{m} \partial_x \psi_C(x, p) + K(x, \partial_p) \psi_C(x, p), \\ K &= -i \left[V \left(x + \frac{i}{2} \partial_p \right) - V \left(x - \frac{i}{2} \partial_p \right) \right]\end{aligned}$$

Quanten – Observablen erfüllen alle Vorhersagen der Quantenmechanik für Teilchen in Potenzial V

*Quantenphysik kann durch
klassische Wahrscheinlichkeiten
beschrieben werden !*

Doppelspalt - Experiment



Quantenformalismus aus klassischen Wahrscheinlichkeiten

reiner Zustand

wird beschrieben durch **komplexe**
quantenmechanische Wellenfunktion

$$\psi_Q(x)$$

realisiert für
klassische Wahrscheinlichkeiten der Form

$$w(x, p) = \int_{r, r'} e^{ip(r' - r)} \psi_Q^* \left(x + \frac{r'}{2} \right) \psi_Q \left(x - \frac{r'}{2} \right) \psi_Q^* \left(x - \frac{r}{2} \right) \psi_Q \left(x + \frac{r}{2} \right)$$

**Zeitentwicklung beschrieben durch
Schrödinger – Gleichung**

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi_Q(x) = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi_Q(x) + V(x) \psi_Q(x)$$

Dichte – Matrix und Wigner-transform

Wigner – transformierte Dichtematrix
in der Quantenmechanik

$$\bar{\rho}_w$$

erlaubt einfache Berechnung
der Erwartungswerte quanten-
mechanischer Observablen

$$\langle F(X_Q, P_Q) \rangle = \int_{x,p} F(x,p) \bar{\rho}_w(x,p)$$

kann aus Wellenfunktion für klassisches Teilchen
konstruiert werden !

$$\bar{\rho}_w(x,p) = \int_{r,r',s,s'} \psi_{\text{C}}\left(x + \frac{r}{2}, p + s\right) \psi_{\text{C}}^*\left(x + \frac{r'}{2}, p + s'\right) \cos(s'r - sr')$$

Quanten – Observablen und klassische Observablen

$$\langle F(X_{cl}, P_{cl}) \rangle = \int_{x,p} F(x, p) w(x, p)$$

$$\langle F(X_Q, P_Q) \rangle = \int_{x,p} F(x, p) \bar{\rho}_w(x, p)$$

Zwitter

Unterschied zwischen Quanten – Teilchen und klassischen Teilchen nur durch unterschiedliche Zeitentwicklung

$$H_L = -i\hbar L = -i\hbar \frac{p}{m} \frac{\partial}{\partial x} + i\hbar \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial}{\partial p}$$

CL

kontinuierliche
Interpolation

$$H_W = -i\hbar \frac{p}{m} \frac{\partial}{\partial x} + V \left(x + \frac{i\hbar}{2} \frac{\partial}{\partial p} \right) - V \left(x - \frac{i\hbar}{2} \frac{\partial}{\partial p} \right)$$

QM

Zwitter - Hamiltonian

$$H_\gamma = \cos^2 \gamma H_W + \sin^2 \gamma H_L$$

- $\gamma=0$: Quanten – Teilchen
- $\gamma=\pi/2$: klassisches Teilchen

auch andere Interpolationen möglich !

Wie gut ist Quantenmechanik ?

Kleiner Parameter γ kann experimentell getestet werden

Zwitter : keine erhaltene Energie mikroskopisch

($H_\gamma = \cos^2 \gamma H_W + \sin^2 \gamma H_L$ ist erhalten)

Statischer Zustand: $H_\gamma \psi = 0$ oder $[H_\gamma, \rho_Q] = 0$

Grundzustand für Zwitter

statischer Zustand mit niedrigstem $\langle H_Q \rangle$

$$H_Q = \frac{1}{2m} P_Q^2 + V(X_Q) \quad \text{Quanten - Energie}$$

Eigenzustände für Quantenenergie $H_Q \psi_n = E_n \psi_n$

Zwitter – Grundzustand hat Beimischung von
angeregten Niveaus der Quantenenergie

$$\psi_Q = \psi_0 + c_1 \sin^2 \gamma \psi_1 + \dots$$

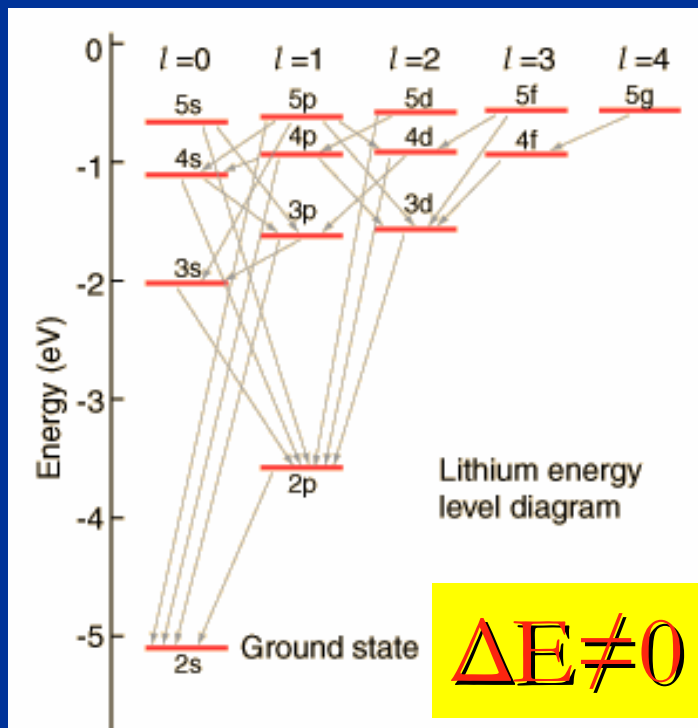
Energie – Unschärfe des Zwitter - Grundzustands

$$\Delta E = (\langle H_Q^2 \rangle - \langle H_Q \rangle^2)^{1/2} = f_1 \sin^2 \gamma |E_0|$$

auch winzige Energieverschiebung

$$\langle H_Q \rangle = E_0 + \delta E^{(\gamma)}, \quad \delta E^{(\gamma)} = f_2 \sin^2 \gamma \Delta E$$

Experimente zur Bestimmung oder Einschränkung des Zwitter – parameters γ ?



fast entartete
Energieniveaus ...?

Grenzen für Zwitter – Parameter γ ?

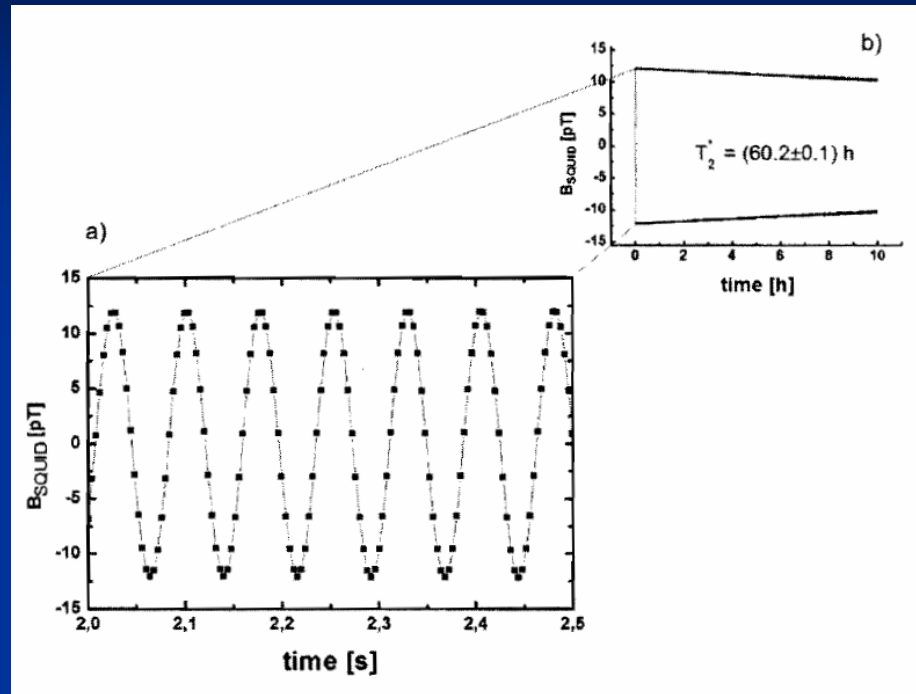


Fig.3 : a) Free spin-precession signal of a polarized ^3He sample cell recorded by means of a low- T_c SQUID (sampling rate: 250 Hz). b) Envelope of the decaying signal amplitude. From an exponential fit to the data, a transverse relaxation time of $T_2^* = (60.2 \pm 0.1) [\text{h}]$ can be deduced.

Lebensdauer nuklearer Spin-Zustände $> 60 \text{ h}$ (Heil et al.) :

$$\gamma < 10^{-14}$$

Quantenteilchen und klassische Statistik

- Gemeinsame Konzepte und gemeinsamer Formalismus für Quanten- und klassische Teilchen : klassische Wahrscheinlichkeitsverteilung , Wellenfunktion
- Unterschiedliche Zeitentwicklung , unterschiedliche Hamilton- Operatoren
- Kontinuierliche Interpolation zwischen Quanten- und klassischen Teilchen möglich - Zwitter

Nicht – Kommutativität in der klassischen Statistik

Untersystem und Umgebung: unvollständige Statistik

typische Quantensysteme sind **Untersysteme**
von klassischen Ensembles mit unendlich vielen
Freiheitsgraden (Umgebung)

probabilistische Observablen für Untersysteme :
Wahrscheinlichkeitsverteilung für Messwerte
in Quantenzustand

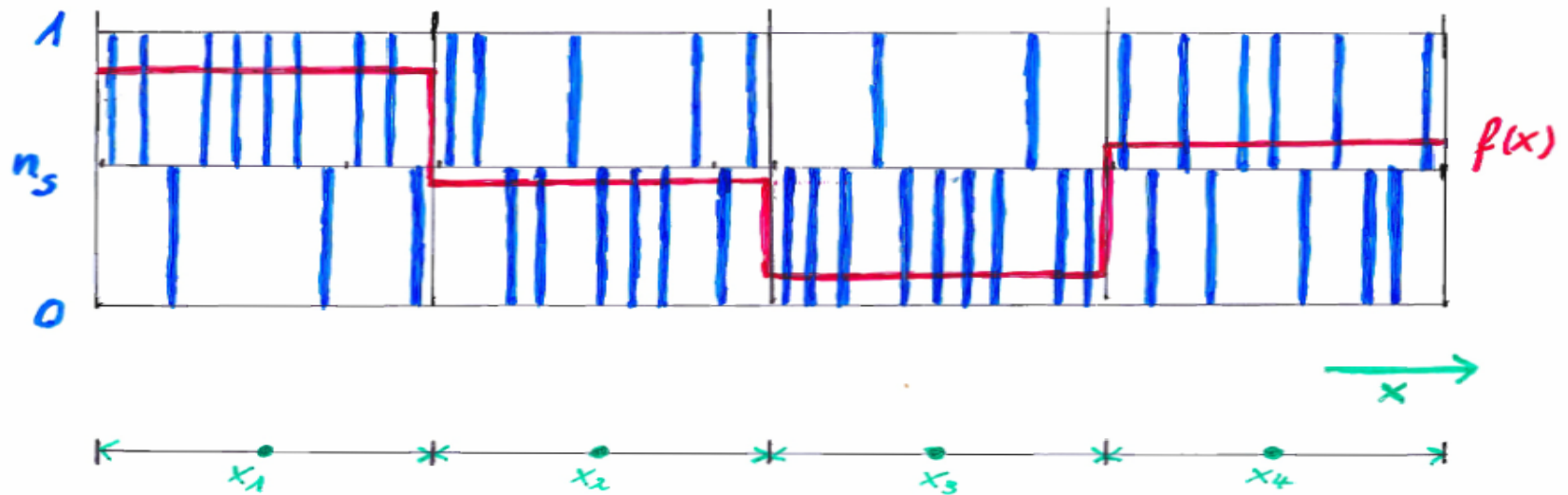
Was ist ein Atom ?

- Quantenmechanik : isoliertes Objekt
- Quantenfeldtheorie : Anregung eines komplizierten Vakuums
- Klassische Statistik : Untersystem eines Ensembles mit unendlich vielen Freiheitsgraden

Mikrophysikalisches Ensemble

- Zustände τ
- entsprechen Sequenzen von Bestungszahlen oder Bits $n_s = 0$ or 1
- $\tau = [n_s] = [0,0,1,0,1,1,0,1,0,1,1,1,1,0,\dots]$
etc.
- Wahrscheinlichkeiten $p_\tau > 0$

Funktionen -Observable



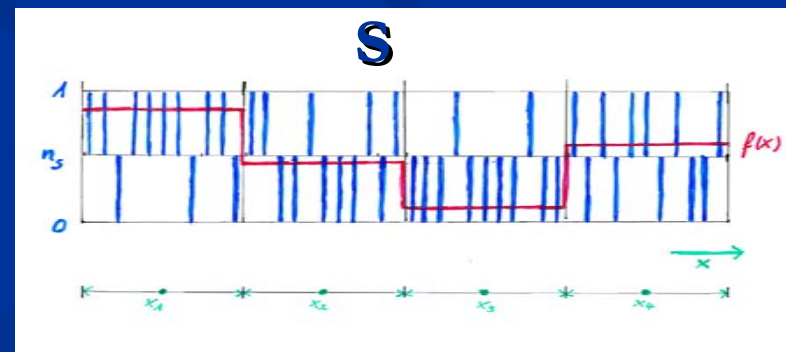
Funktions - Observable

$$f_{\tau}(x_i) = \mathcal{N}^{-\frac{1}{2}} \sum_{s \in I(x_i)} (2n_s - 1)$$

normalisierte Differenz zwischen besetzten und leeren Bits im Intervall

$$\int dx f_{\tau}^2(x) = \sum_i f_{\tau}^2(x_i) = 1$$

$$\mathcal{N} = \sum_{x_i} \left(\sum_{s \in I(x_i)} (2n_s - 1) \right)^2$$



$I(x_1) \quad I(x_2) \quad I(x_3) \quad I(x_4)$

Teilchen - Position

$$X_\tau = \int dx x f_\tau^2(x)$$

klassische Observable :
fester Wert für jeden Zustand τ

Teilchen Impuls

- Ableitungs – Observable : involviert zwei Funktions - Observablen

$$P_\tau = \int dx [f_{1,\tau}(x) \partial_x f_{2,\tau}(x) - f_{2,\tau}(x) \partial_x f_{1,\tau}(x)]$$

klassische Observable :

fester Wert für jeden Zustand τ

komplexe Struktur

$$f_{\tau}(x) = f_{1,\tau}(x) + i f_{2,\tau}(x)$$

$$\int dx f_{\tau}^{*}(x) f_{\tau}(x) = 1$$

$$P_{\tau} = \int dx f_{\tau}^{*}(x) (-i \partial_x) f_{\tau}(x)$$

$$X_{\tau} = \int dx f_{\tau}^{*}(x) x f_{\tau}(x)$$

$$P_{\tau} = \int dx [f_{1,\tau}(x) \partial_x f_{2,\tau}(x) - f_{2,\tau}(x) \partial_x f_{1,\tau}(x)]$$

Dichtematrix und Ausdünnen der Information (“ coarse graining “)

- Position und Impuls benötigen nur kleinen Teil der Information in p_τ
- Relevanter Teil kann durch Dichtematrix beschrieben werden

$$\rho(x, x') = \sum_{\tau} p_{\tau} f_{\tau}(x) f_{\tau}^*(x')$$

- Untersystem wird durch Information beschrieben ,
die in Dichtematrix enthalten ist
- “ coarse graining of information “

Quantum - Dichtematrix

alle Eigenschaften der Dichtematrix in der Quantenmechanik

$$\text{Tr}\rho = \int dx \rho(x, x) = 1, \quad \rho^*(x, x') = \rho(x', x)$$

Positivität

$$\rho(x, x') = \sum_{\tau} p_{\tau} f_{\tau}(x) f_{\tau}^*(x')$$

Quantum Operatoren

$$\begin{aligned}\hat{X}(x', x) &= \delta(x' - x)x \\ \hat{P}(x', x) &= -i\delta(x' - x)\frac{\partial}{\partial x}\end{aligned}$$

$$\langle X \rangle = \sum_{\tau} p_{\tau} X_{\tau} = \text{Tr}(\hat{X}\rho) = \int dx x \rho(x, x)$$

$$\begin{aligned}\langle P \rangle &= \sum_{\tau} p_{\tau} P_{\tau} = \text{Tr}(\hat{P}\rho) \\ &= -i \int dx' dx \delta(x' - x) \partial_x \rho(x, x')\end{aligned}$$

Quanten - Produkt von Observablen

Das Produkt

$$(X^2)_\tau = \int dx f_\tau^*(x) x^2 f_\tau(x)$$

$$\langle X^2 \rangle = \sum_\tau p_\tau (X^2)_\tau$$

ist mit dem “coarse graining” kompatibel

$$\langle X^2 \rangle = \int dx x^2 \rho(x, x)$$

und kann durch Operatorprodukt dargestellt werden

Unvollständige Statistik

klassisches Produkt

$$\begin{aligned}\langle X \cdot X \rangle &= \sum_{\tau} p_{\tau} X_{\tau}^2 \\ &= \sum_{\tau} p_{\tau} \left(\int dx f_{\tau}^*(x) x f_{\tau}(x) \right)^2\end{aligned}$$

- kann nicht aus der Information berechnet werden , die für das Untersystem verfügbar ist !
- kann nicht für Messungen im Untersystem verwendet werden !

coarse graining

*von fundamentalen Fermionen
an der Planck Skala*

$p([n_s])$

zu Atomen an der Bohr Skala

$q(x, x')$

Verallgemeinerungen

Quantenmechanik aus klassischen Wahrscheinlichkeiten

klassische Wahrscheinlichkeitsverteilung kann explizit angegeben werden für :

- quantenmechanisches Zwei-Zustands-System
Quantencomputer : Hadamard gate
- Vier-Zustands-System (CNOT gate)
- verschränkte Quantenzustände
- Interferenz

Bell'sche Ungleichungen

werden verletzt durch **bedingte** Korrelationen

**Bedingte Korrelationen für zwei Ereignisse
oder Messungen reflektieren bedingte Wahrscheinlichkeiten**

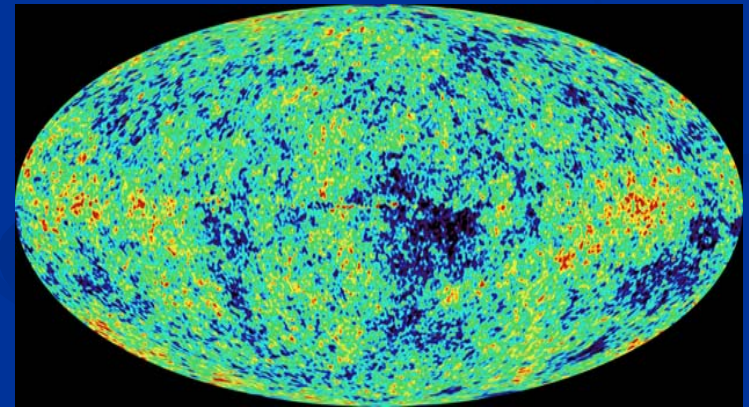
Unterschied zu klassischen Korrelationen

(Klassische Korrelationen werden implizit zur Herleitung der
Bell'schen Ungleichungen verwandt.)

Bedingte Dreipunkt- Korrelation nicht kommutativ

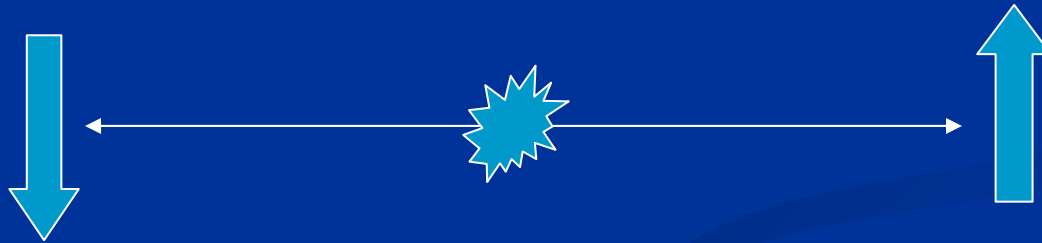
Realität

- **Korrelationen** sind physikalische Realität , nicht nur Erwartungswerte oder Messwerte einzelner Observablen
- Korrelationen können **nicht-lokal** sein (auch in klassischer Statistik) ; kausale Prozesse zur Herstellung nicht-lokaler Korrelationen erforderlich
- Korrelierte Untersysteme sind nicht separabel in unabhängige Teilsysteme – **Ganzes mehr als Summe der Teile**



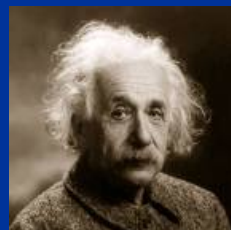
EPR - Paradoxon

Korrelation zwischen zwei Spins wird bei Teilchenzerfall hergestellt



Kein Widerspruch zu Kausalität oder Realismus wenn Korrelationen als Teil der Realität verstanden werden

(



hat mal nicht Recht)

Essenz des Quanten - Formalismus

*Beschreibung geeigneter Untersysteme von
klassischen statistischen Ensembles*

- 1) Äquivalenz - Klassen von probabilistischen Observablen
- 2) Unvollständige Statistik
- 3) Korrelation zwischen Messungen oder Ereignissen basieren auf bedingten Wahrscheinlichkeiten
- 4) Unitäre Zeitentwicklung für isolierte Untersysteme

Zusammenfassung

- Quantenstatistik entsteht aus klassischer Statistik
Quantenzustand, Superposition , Interferenz ,
Verschränkung , Wahrscheinlichkeits-Amplitude
- Unitäre Zeitentwicklung in der Quantenmechanik
beschreibbar durch Zeitentwicklung klassischer
Wahrscheinlichkeiten
- Bedingte Korrelationen für Messungen sowohl in
Quantensystem als auch klassischer Statistik

Experimentelle Herausforderung

- Teste quantitativ , wie gut die Vorhersagen der Quantenmechanik erfüllt sind
- Zwitter
- Geschärfte Observablen
- Kleine Parameter : “fast Quantenmechanik “

The background is a solid dark blue color. In the lower right quadrant, there are several faint, lighter blue wavy lines that create a sense of movement or depth, resembling stylized waves or smoke.

Ende

Geschärfte Observablen – zwischen Quantum und klassisch

$$\begin{aligned}X_{\beta} &= \cos^2 \beta X_Q + \sin^2 \beta X_{cl} \\P_{\beta} &= \cos^2 \beta P_Q + \sin^2 \beta P_{cl}\end{aligned}$$

$\beta=0$: Quantenobservablen , $\beta=1$: klassische Observablen

$$[P_{\beta}, X_{\beta}] = -i\hbar \cos^2 \beta$$

Abschwächung der Unschärferelation

$$\langle X_{\beta}^2 \rangle = \frac{\hbar}{4m\omega}(1 + \cos^4 \beta)$$

$$\langle P_{\beta}^2 \rangle = \frac{m\omega\hbar}{4}(1 + \cos^4 \beta)$$

$$\Delta X_{\beta} \Delta P_{\beta} = \frac{\hbar}{4}(1 + \cos^4 \beta)$$

Experiment?

generalized function observable

normalization

$$\int dx f_{\tau}^2(x) = 1$$

classical
expectation
value

$$\langle f(x) \rangle = \sum_{\tau} p_{\tau} f_{\tau}(x)$$

several species α

$$\sum_{\alpha} \int dx f_{\alpha,\tau}^2(x) = 1$$

classical product of position and momentum observables

$$\langle X \cdot P \rangle_{cl} = \langle P \cdot X \rangle_{cl} = \sum_{\tau} p_{\tau} X_{\tau} P_{\tau}$$

commutes !

different products of observables

$$(X^2)_\tau = \int dx f_\tau^*(x) x^2 f_\tau(x)$$

$$\langle X^2 \rangle = \sum_\tau p_\tau (X^2)_\tau$$

differs from classical product

$$\begin{aligned} \langle X \cdot X \rangle &= \sum_\tau p_\tau X_\tau^2 \\ &= \sum_\tau p_\tau \left(\int dx f_\tau^*(x) x f_\tau(x) \right)^2 \end{aligned}$$

classical and quantum dispersion

$$\Delta_x^2 = \langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2, \quad (\Delta_x^{(cl)})^2 = \langle X \cdot X \rangle - \langle X \rangle^2$$

$$\Delta_x^2 - (\Delta_x^{(cl)})^2 = \sum_{\tau} p_{\tau} \int dx f_{\tau}^*(x) (x - X_{\tau})^2 f_{\tau}(x) \geq 0$$

$$\begin{aligned} \langle X \cdot X \rangle &= \sum_{\tau} p_{\tau} X_{\tau}^2 \\ &= \sum_{\tau} p_{\tau} \left(\int dx f_{\tau}^*(x) x f_{\tau}(x) \right)^2 \end{aligned}$$

$$(X^2)_{\tau} = \int dx f_{\tau}^*(x) x^2 f_{\tau}(x)$$

$$\langle X^2 \rangle = \sum_{\tau} p_{\tau} (X^2)_{\tau}$$

subsystem probabilities

$$w(x) = \rho(x, x) = \sum_{\tau} p_{\tau} |f_{\tau}(x)|^2$$

$$w(x) \geq 0, \quad \int dx w(x) = 1$$

$$\langle X^n \rangle = \int dx x^n w(x)$$

in contrast :

$$\langle X \cdot X \rangle = \int dx dy xy w_{cl}(x, y)$$

$$w_{cl}(x, y) = \sum_{\tau} p_{\tau} |f_{\tau}|^2(x) |f_{\tau}|^2(y)$$

squared momentum

$$\begin{aligned}(P^2)_\tau &= \int dx f_\tau^*(x) (-\partial_x^2) f_\tau(x) \\ &= \int dx |\partial_x f_\tau(x)|^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle P^2 \rangle &= \sum_\tau p_\tau (P^2)_\tau = \text{tr}(\hat{P}^2 \rho) \\ &= \int dx dx' \delta(x' - x) (-\partial_x^2) \rho(x, x')\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle P \cdot P \rangle &= \sum_\tau p_\tau P_\tau^2 \\ &= - \sum_\tau p_\tau \left(\int dx f_\tau^*(x) \partial_x f_\tau(x) \right)^2\end{aligned}$$

quantum product between classical observables :
maps to product of quantum operators

non – commutativity in classical statistics

$$(XP)_\tau = \int dx f_\tau^*(x) x (-i\partial_x) f_\tau(x)$$

$$(PX)_\tau = \int dx f_\tau^*(x) (-i\partial_x) x f_\tau(x)$$

$$\langle XP \rangle = \text{tr}(\hat{X}\hat{P}\rho) , \quad \langle PX \rangle = \text{tr}(\hat{P}\hat{X}\rho)$$

$$XP - PX = i$$

commutator depends on choice of product !

measurement correlation

- correlation between measurements of position and momentum is given by quantum product
- this correlation is compatible with information contained in subsystem

$$\langle XP \rangle_m = \frac{1}{2}(\langle XP \rangle + \langle PX \rangle)$$