

INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

Hydrodynamik

Georg Wolschin



Letzte Aktualisierung: 30. April 2015

Vorwort

Diese Vorlesung ist eine kurzgefasste Einführung in die Grundlagen der Hydrodynamik. Sie ist konzipiert als einsemestrige, zweistündige Veranstaltung für Bachelor- und Masterstudenten; einige der fortgeschritteneren Teile wie Hydrodynamik der Superfluide sollten auch für Promovierende von Interesse sein. In diesem Vorwort werden manche Gebiete besonders betont.

Nach der Einordnung der Hydrodynamik als Teilgebiet der Kontinuumsmechanik folgt ein einleitendes Kapitel über ideale Fluide mit den Euler-Gleichungen als Grundgleichungen für das Geschwindigkeitsfeld sowie der Kontinuitätsgleichung und der Gleichung für die Entropierhaltung. Die Nichtlinearität des konvektiven Terms in der Euler-Gleichung begründet ein im Vergleich zur Elastizitätstheorie wesentlich komplexeres Theoriegebäude, das nur in Spezialfällen analytische Lösungen hat.

Oft sind jedoch Linearisierungen möglich und zulässig, die dann beispielsweise Voraussetzung zur Ableitung der Schwingungsgleichung sind. Auch die Ausbreitung von Wasserwellen als Oberflächenwellen – je nach Wassertiefe mit oder ohne Dispersion oder im Fall von Kapillarwellen mit anomaler Dispersion – lässt sich so mit einfachen analytischen Methoden beschreiben.

Der Text zeichnet in manchen Passagen die historische Entwicklung der Hydrodynamik – eines der ältesten physikalischen Gebiete überhaupt – nach, und die Literaturverzeichnisse (jeweils am Kapitelende) enthalten dementsprechend auch einige der wissenschaftshistorisch interessanten Originalarbeiten, bilden aber die zeitliche Entwicklung nicht durchgängig ab. Ziel des Buches ist jedoch, ausgehend von der ursprünglichen Formulierung der Hydrodynamik zu aktuellen Forschungsfragestellungen zu kommen.

Der Hauptteil der Vorlesung beschäftigt sich mit viskosen Fluiden, und den entsprechend erweiterten Grundgleichungen. Die Navier-Stokes-Gleichungen berücksichtigen den Einfluss der dynamischen Viskosität (*shear viscosity*) und der Zähigkeit (*bulk viscosity*) auf das Geschwindigkeitsfeld. An festen Oberflächen verschwinden hier nicht nur die normalen, sondern – als Folge der Viskosität – auch die tangentialen Geschwindigkeitskomponenten; im Euler-Fall gibt es dagegen nur eine Randbedingung.

Aus Viskosität folgt Energiedissipation, die Umwandlung von Energie in Wärme. Für inkompressible Fluide lässt sich die dissipierte Energie relativ leicht berechnen, ebenso die Durchflussmenge und das Strömungsprofil bei einer Rohrströmung (Poiseuille-Strömung) in linearer Näherung.

Von besonderem Interesse, und nach wie vor Gegenstand aktueller Forschung in zahlreichen physikalischen Teildisziplinen wie etwa kalten Quantengasen, ist der Übergang von der laminaren zur turbulenten Strömung. Die kritische Reynolds-Zahl liefert nur ein erstes, grobes Kriterium für den Umschlag zur Turbulenz – eine genaueres Kriterium ist die doppelte Schwelle, bei der sowohl die Reynoldszahl, als auch die Störung eine kritische Größe überschreiten müssen. Unterschiedliche Szenarien zum Turbulenzeinsatz werden in der Vorlesung diskutiert, und die Stabilitätstheorie von Landau wird dargestellt. Besonders einprägsame Beispiele zur entwickelten Turbulenz findet man in astrophysikalischen Umgebungen.

Die vor mehr als hundert Jahren (1904) von Prandtl entwickelte theoretische Beschreibung des Fluidverhaltens in der Nähe fester Wände – der Grenzschicht – ist ein besonders interessanter Spezialfall des Gleichungssystems der Hydrodynamik, einschließlich des Umschlags von einer laminaren in eine turbulente Grenzschicht bei umströmten Körpern.

Berücksichtigt man Viskosität und Wärmeleitung, besteht das Gleichungssystem der Hydrodynamik aus der Navier-Stokes-Gleichung, der – im Vergleich zu idealen Fluiden unveränderten – Kontinuitätsgleichung, und einer fünften, thermodynamischen Gleichung; sie ersetzt die Adiabatangleichung bei idealen Fluiden. Aufgrund der irreversiblen Energiedissipation wächst die Entropie bei viskosen Fluiden an. Die Änderung der Gesamtenergie ist gleich dem Energiestrom, der jetzt auch Terme aufgrund innerer Reibung und Wärmeleitung enthält. Die entsprechende Wärmetransportgleichung lässt sich für inkompressible Fluide wieder stark vereinfachen, in einem ruhenden Fluid wird sie zur Fourier'schen Gleichung. Auch andere Spezialfälle ermöglichen analytische Lösungen.

Ist das Fluid nicht homogen, sondern beispielsweise ein Gemisch aus zwei Komponenten, kommen Diffusionsprozesse als zusätzliche Quelle von Energiedissipation hinzu. Auch Vorgänge wie die erstmals 1905 von Einstein beschriebene Brown'sche Bewegung von Teilchen, die in einer Flüssigkeit suspendiert sind, lassen sich in einer Diffusionstheorie modellieren, wie sie inzwischen in vielen Wissenschaftsbereichen angewandt wird.

Ein Beispiel sind Diffusionsvorgänge in der Teilchenerzeugung bei relativistischen Schwerionenreaktionen, wie man sie am Relativistic Heavy Ion Collider (RHIC) in Brookhaven und am Large Hadron Collider (LHC) in Genf experimentell untersucht. Der LHC nahm 2015 seinen Betrieb wieder auf, um Kollisionen zwischen Protonen bei einer Schwerpunktsenergie von 13 TeV und zwischen Bleiionen bei 5.1 TeV pro Teilchenpaar zu untersuchen.

Wenn die Geschwindigkeit der makroskopischen Fluidströmung – oder die der Fluidteilchen – mit der Lichtgeschwindigkeit vergleichbar werden, müssen relativistische Bewegungsgleichungen aufgestellt werden, die den Euler-Gleichungen bzw. den Navier-Stokes-Gleichungen im nichtrelativistischen Fall entsprechen; dabei geht man vom Energie-Impuls Tensor einer Flüssigkeit aus. Für ideale Fluide diskutieren wir auch die relativistische Verallgemeinerung der Bernoulli-Gleichung und den nichtrelativistischen Grenzfall.

Ein wichtiges Anwendungsgebiet der Hydrodynamik ist die Astrophysik, da Sterne und andere kosmische Materieansammlungen wie Galaxien und Galaxienhaufen auf bestimmten Längen- und Zeitskalen durch die hydrodynamische Approximation beschrieben werden können. Zwar würde eine ausführliche Darstellung den Rahmen dieser Vorlesung sprengen, aber Beispiele wie die Ausbreitung von Schockwellen im interstellaren Medium sollen exemplarisch zeigen, welche Probleme sich im Rahmen der Hydrodynamik behandeln lassen.

Das abschließende Kapitel über die Hydrodynamik der Superfluide behandelt die von Tisza (1940) und Landau (1941) aufgestellte Theorie von Helium II im Rahmen eines Zwei-Fluid-Modells, das sich insbesondere durch eine korrekte Beschreibung der Schallausbreitung in Superflüssigkeiten auszeichnet (zweiter Schall). Hier wie auch in anderen Teilen greift die Vorlesung nicht nur auf die Originalliteratur, sondern auch auf die vorhandenen Lehrbücher zurück (s. Bibliographie), vor allem auf das Lehrbuch von Landau und Lifschitz, das sich zum vertieften Studium und auch als Nachschlagwerk eignet. Die anderen in der Bibliographie genannten Bücher sind ebenfalls empfehlenswert; wenn man sich z. B. in ein neues Gebiet wie die astrophysikalische Hydrodynamik einarbeiten möchte, sind die Werke von Shore oder Choudhuri ein guter Einstieg.

Einige Testaufgaben am Ende des Buches sollen als Anreiz dienen, den Stoff dieses Kurses beispielhaft auch selbst nachzurechnen: Die Mehrzahl der Lösungen ist bereits im vorhergehenden Text versteckt.

Zahlreichen Studierenden bin ich für Fragen und Verbesserungsvorschläge dankbar. Das sorgfältige L^AT_EX-Skript hat Moritz Beutel erstellt und auch aus meinen Abbildungsskizzen satzfertige Druckvorlagen gemacht. Ihm und Wasilij Barsukow danke ich außerdem für viele gründliche Korrekturgänge und Manuela Wirschke für das Einfügen der Abbildungsbezüge im Text. Für die engagierte Betreuung des Projekts danke ich Bianca Alton und Vera Spillner vom Springer-Verlag. Hinweise auf dennoch verbleibende Ungenauigkeiten und Fehler – für die ich zuständig bin – bitte direkt an mich senden.

Heidelberg, im April 2015

Georg Wolschin

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	7
1.1	Strömungslehre	8
1.2	Hydrodynamische Beschreibung	9
2	Ideale Fluide	10
2.1	Kontinuitätsgleichung	10
2.2	Euler'sche Gleichungen	12
2.3	Bernoulli'sche Gleichung	16
2.4	Euler-Gleichungen im linearisierten Fall	19
2.5	Hydrostatik	23
2.6	Energie- und Impulsstrom im Fluid	25
2.7	Zirkulation, Thomson'scher Satz	27
2.8	Potenzialströmungen	29
2.9	Inkompressible Fluide	33
2.10	Stromfunktion	36
2.11	Wellen	41
3	Viskose Fluide	48
3.1	Navier-Stokes-Gleichungen	48
3.2	Energiedissipation in einem inkompressiblen viskosen Fluid	50
3.3	Hagen-Poiseuille'sches Gesetz	52
3.4	Reynolds'sche Zahl; Turbulenzkriterium	54

3.5	Strömungen mit kleinem Re : Stokes'sche Formel	58
3.6	Laminarer Nachlauf	59
4	Turbulenz	65
4.1	Übergang zur Turbulenz und doppelte Schwelle	65
4.2	Turbulenzeinsatz über Instabilität	68
4.3	Stabilität stationärer Strömungen	69
4.4	Entwickelte Turbulenz in astrophysikalischen Umgebungen	73
5	Grenzschichten	76
6	Wärmeleitung	79
6.1	Die Wärmetransportgleichung	79
6.2	Wärmetransport bei inkompressiblen Fluiden	81
6.3	Wärmetransport in einem unbegrenzten Medium	83
6.4	Konvektion	85
7	Diffusion	88
7.1	Flüssigkeitsgemische	88
7.2	Brown'sche Bewegung	91
7.3	Diffusion in relativistischen Systemen	94
8	Relativistische Hydrodynamik	100
8.1	Energie-Impuls-Tensor einer Flüssigkeit	100
8.2	Relativistische Bewegungsgleichungen	102
9	Astrophysikalische Hydrodynamik	106
9.1	Schockwellen	107
9.2	Rankine-Hugoniot-Bedingungen	110

10 Hydrodynamik der Superflüssigkeiten	115
10.1 Grundlagen	115
10.2 Hydrodynamische Gleichungen für He II	118
10.3 Schallausbreitung in Superfluiden	120
11 Aufgaben	124
11.1 Kontinuitätsgleichung für die Entropie	124
11.2 Schwingungsgleichung	124
11.3 Hydrostatik	124
11.4 Inkompressible Fluide	125
11.5 Wasserwellen	125
11.6 Poiseuille-Strömung	125
11.7 Laminarer Nachlauf	126
11.8 Stabilität stationärer Strömungen	126
11.9 Wärmeleitung	126
11.10 Diffusion	127
11.11 Energie-Impuls-Tensor	128
11.12 Entropieerhaltung in relativistischer Hydrodynamik	128
12 Bibliographie	129

1 Einleitung

Die Hydrodynamik ist ein Gebiet der Kontinuumsmechanik, der Mechanik der deformierbaren Medien, das sich auf die Betrachtung von Fluiden mit bestimmten Eigenschaften konzentriert. Die folgende Abb. 1.1 stellt den Zusammenhang zwischen der Hydrodynamik und den verwandten und übergeordneten Disziplinen dar:

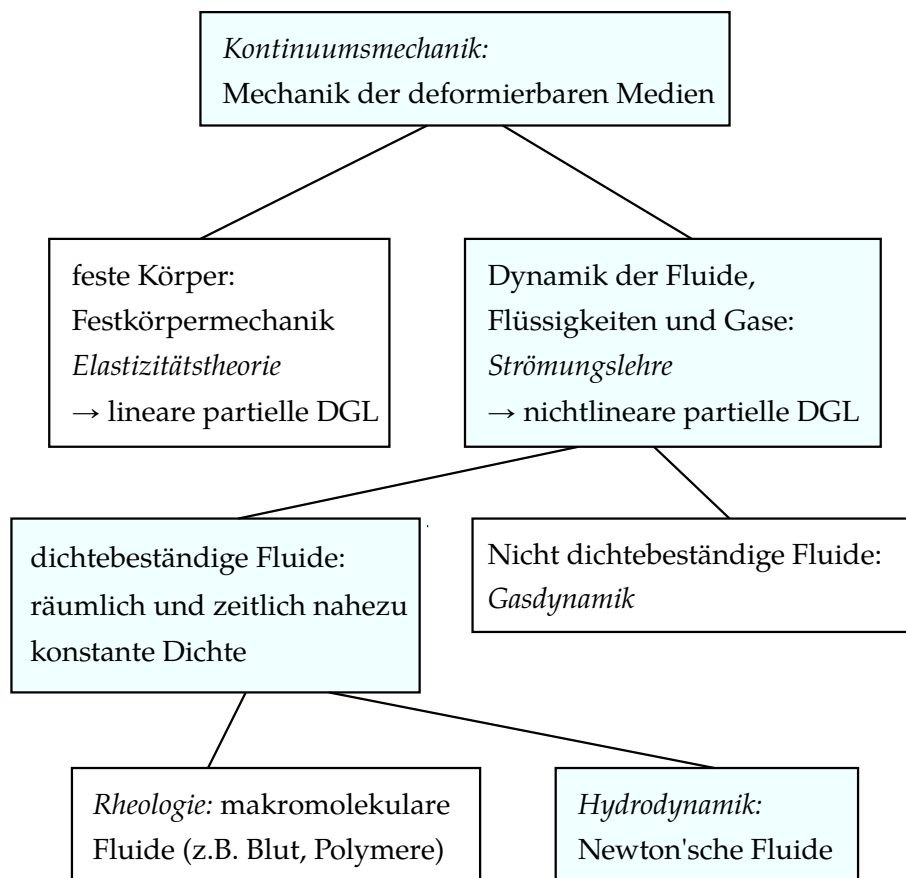


Abbildung 1.1: Übersicht über die Gebiete der Kontinuumsmechanik

1.1 Strömungslehre

Die *Strömungslehre* (Dynamik der Fluide) umfasst mehrere Gebiete der Physik:

1. *Hydrodynamik* für einfache (Newton'sche) Fluide wie Wasser,
2. *Rheologie*: makromolekulare Fluide wie polymere Flüssigkeiten, Blut usw., die sich wegen der komplizierten Struktur der Moleküle anders als einfache Fluide verhalten,
3. *Gasdynamik*: nicht dichtebeständige Fluide.

Während sich die *Thermodynamik* vor allem mit Systemen im thermodynamischen Gleichgewicht beschäftigt (Gleichgewichtsthermodynamik), ist in der *Strömungslehre* der räumliche und zeitliche Verlauf von Prozessen in Systemen von Interesse, die sich nicht im Gleichgewicht befinden. Infolgedessen sind die globalen Zustandsgrößen der Gleichgewichtsthermodynamik wie *Druck* p und *Temperatur* T nicht mehr ausreichend, um Strömungsprozesse zu beschreiben.

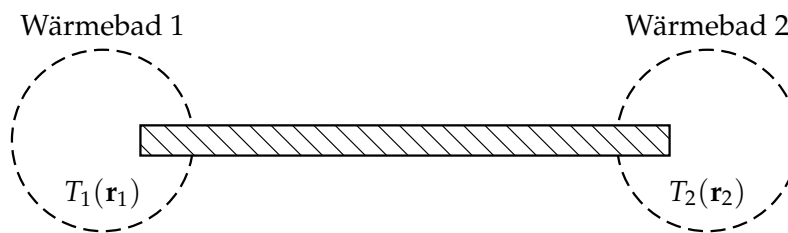


Abbildung 1.2: Stab in zwei Wärmebädern

Beispiel: Ein Stab wird an beiden Enden durch Eintauchen in Wärmebäder auf unterschiedliche Temperaturen gebracht (s. Abb. 1.2); die Temperatur ist also ortsabhängig:

$$T = T(\mathbf{r})$$

Nun wird der Stab von den Wärmebädern isoliert. Die Temperatur verändert sich durch den Angleichungsprozess und wird also auch eine Funktion der Zeit:

$$T = T(\mathbf{r}, t)$$

. Dabei sind kleine, aber makroskopische Teilsysteme zur Zeit t in einer Umgebung des Ortes $\mathbf{r}$ im *lokalen Gleichgewicht*.

Wird der Stab (oder ein anderes abgeschlossenes Makrosystem) sich selbst überlassen, geht er schließlich in ein *globales* Gleichgewicht über. Bis es dazu kommt, gelten zwischen den Zustandsfeldern dieselben Zusammenhänge wie in der Gleichgewichtsthermodynamik.

1.2 Hydrodynamische Beschreibung

Für ein *ideales Gas* im lokalen Gleichgewicht gilt die Zustandsgleichung

$$p(\mathbf{r}, t)V(\mathbf{r}, t) = k_B T(\mathbf{r}, t) \quad (1.2.1)$$

mit dem lokalen Druck $p(\mathbf{r}, t)$ und dem spezifischen Volumen $V(\mathbf{r}, t)$.

Gibt es *Bewegungen* im Inneren des Systems, so ist zur Zustandsbeschreibung auch ein *Geschwindigkeitsfeld* $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ bzw. ein *Stromdichtefeld* $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, t)\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ erforderlich.

Die Beschreibung eines räumlich und zeitlich unveränderlichen Systems auf der Basis der Annahme des *lokalen Gleichgewichts* nennt man die hydrodynamische Beschreibung. Auf der Basis dieser Beschreibung soll in dieser Vorlesung die Hydrodynamik im engeren Sinne (d. h., für *Newton'sche Fluide*) dargestellt werden. Die Substanzen werden dabei – anders als in der kinetischen Gastheorie und der molekularen Hydrodynamik – als *Kontinuum* angesehen, d. h., ihre detaillierte molekulare Struktur ($\rightarrow$ *Rheologie*) wird dabei nicht berücksichtigt.

Dies bedeutet wiederum, dass ein *infinitesimales Volumenelement* in der Hydrodynamik gegenüber dem Volumen des betrachteten Körpers klein sein muss, jedoch groß im Vergleich zu den zwischenmolekularen Volumina. Dies entspricht der Forderung, dass jedes Volumenelement ΔV hinreichend viele Moleküle für eine Kontinuumsbeschreibung enthalten muss.

Der *Zustand einer bewegten Flüssigkeit* wird dann durch fünf Größen vollständig festgelegt:

- Geschwindigkeitsverteilung $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ (drei Komponenten),
- zwei beliebige *thermodynamische Größen*, die über die Zustandsgleichung der Substanz alle anderen thermodynamischen Größen festlegen. Wir wählen hier den *Druck* $p(\mathbf{r}, t)$ und die *Dichte* $\rho(\mathbf{r}, t)$.

Also wird das vollständige Gleichungssystem der Hydrodynamik *fünf Gleichungen* enthalten. Für eine *ideale Flüssigkeit* (keine Viskosität, keine Wärmeleitfähigkeit) sind dies:

- die *Euler'schen Gleichungen* (drei Komponenten),
- die *Kontinuitätsgleichung*,
- die *Adiabatengleichung* (kein Wärmeaustausch mit der Umgebung für $S = \text{const}$).

Während in der *Elastizitätstheorie* für Festkörper die Probleme oft mit *linearen partiellen Differenzialgleichungen* formulierbar und exakt lösbar sind, ist dies in der *Hydrodynamik* nicht der Fall: die Gleichungen sind *nichtlinear*, exakte Lösungen existieren nur selten. Die Entwicklung der Hydrodynamik erfolgte auch deshalb in engem Kontakt zum Experiment.

2 Ideale Fluide

Bereits im vorigen Kapitel wurden die Charakteristika idealer Fluide erwähnt: sie haben *keine Viskosität* und *keine Wärmeleitfähigkeit*. Im Folgenden werden die Grundgleichungen der Hydrodynamik für ideale Fluide abgeleitet.

2.1 Kontinuitätsgleichung

Die Kontinuitätsgleichung drückt die Erhaltung der Masse in der Hydrodynamik aus und gilt auch für viskose Fluide.

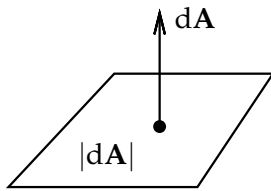


Abbildung 2.1:
Oberflächeninfinitesimal

Die relevanten Größen sind die Dichte ρ , das Volumen V_0 und die Masse $m = \int \rho dV$ als Integral der Dichte über V_0 . Das Differenzial des Flusses durch die Oberfläche ∂V_0 des Volumens ist gegeben durch

$$d\Phi = \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} , \quad (2.1.1)$$

wobei $|d\mathbf{A}|$ die Größe des Flächenelements angibt und der Vektor $d\mathbf{A}$ in Richtung der äußeren Normalen zeigt (Abb. 2.1). Demnach gilt hinsichtlich des Vorzeichens:

$$d\Phi > 0 \quad \text{für Fluss aus } dV \text{ heraus,} \quad (2.1.2)$$

$$d\Phi < 0 \quad \text{für Fluss in } dV \text{ hinein.} \quad (2.1.3)$$

Der Fluss – die Flüssigkeitsmenge, die pro Zeiteinheit aus V_0 herausfließt – ist also gegeben durch das Integral des differenziellen Flusses über die geschlossene Oberfläche von V_0 :

$$\Phi = \oint_{\partial V_0} \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} . \quad (2.1.4)$$

Die gleichzeitige Abnahme der Flüssigkeitsmenge in V_0 ist

$$\Phi' = -\partial_t \int_{V_0} \rho dV . \quad (2.1.5)$$

Gleichsetzen von Φ und Φ' ergibt

$$-\partial_t \int_{V_0} \rho \, dV = \oint_{\partial V_0} \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} . \quad (2.1.6)$$

Auf der rechten Seite der Gleichung können wir den *Gauß'schen Integralsatz* anwenden, der für ein kompaktes Volumen V und ein stetig differenzierbares Vektorfeld $\mathbf{a}$ einen allgemeinen Zusammenhang zwischen einem Volumenintegral und einem Oberflächenintegral über den Rand des Volumens herstellt:

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{a} \, dV = \oint_{\partial V} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{A} . \quad (2.1.7)$$

Aus (2.1.6) folgt also

$$-\partial_t \int_{V_0} \rho \, dV = \int_{V_0} \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \, dV \quad (2.1.8)$$

$$\Rightarrow \int_{V_0} [\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v})] \, dV = 0 , \quad (2.1.9)$$

was für jedes beliebige Volumenelement V_0 gelten muss, so dass für den Integranden die *Kontinuitätsgleichung* folgt:

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 . \quad (2.1.10)$$

Unter Zuhilfenahme des Zusammenhanges

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = \rho \nabla \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho \quad (2.1.11)$$

aus der Vektoranalysis lässt sich die Kontinuitätsgleichung auch schreiben als

$$\partial_t \rho + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho = 0 \quad (2.1.12)$$

oder als

$$\frac{d}{dt} \rho + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (2.1.13)$$

mit der totalen Ableitung

$$\frac{d}{dt} = \partial_t + \frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \quad (2.1.14)$$

$$= \partial_t + \mathbf{v} \cdot \nabla . \quad (2.1.15)$$

Alternativ kann die Kontinuitätsgleichung mit dem Stromdichtevektor $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$ formuliert werden:

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad (2.1.16)$$

Der Stromdichtevektor weist in die Richtung des Geschwindigkeitsvektors $\mathbf{v}$, und sein Betrag $|\mathbf{j}|$ gibt die Flüssigkeitsmenge an, die pro Zeiteinheit durch eine zur Geschwindigkeit orthogonale Flächeneinheit fließt.

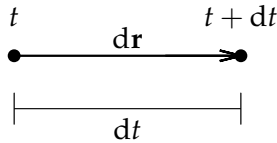
2.2 Euler'sche Gleichungen

Auf die geschlossene Oberfläche eines Flüssigkeitsvolumens V_0 wirkt die Kraft

$$\mathbf{F} = - \oint_{\partial V_0} p \, d\mathbf{A} \quad (2.2.1)$$

$$= - \int_{V_0} \nabla p \, dV, \quad (2.2.2)$$

die wir erneut mithilfe des Gauß'schen Integralsatzes als Volumenintegral ausgedrückt haben. Auf jedes Volumenelement dV wirkt die Kraft $-\nabla p \, dV$.



Die *Bewegungsgleichung* für ein Volumenelement folgt aus dem zweiten Newton'schen Gesetz, das die Kraft pro Volumeneinheit mit dem Produkt aus Dichte und Beschleunigung gleichsetzt:

$$-\nabla p = \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} \quad (2.2.3)$$

Abbildung 2.2:
Infinitesimale Verschiebung
eines Teilchens

Dabei ist $d\mathbf{v}/dt$ nicht allein die (lokale) Geschwindigkeitsänderung des Fluids in einem festen Raumpunkt, sondern diejenige eines sich im Raum bewegenden Fluidteilchens im Zeitintervall dt (Abb. 2.2). Folglich hat $d\mathbf{v}$ zwei Anteile:

(1) Änderung im Raumpunkt $\mathbf{r}$ während dt : lokale Ableitung

$$\partial_t \mathbf{v} \, dt \quad (2.2.4)$$

bei konstantem $\mathbf{r} = (x, y, z)$.

(2) Differenz der Geschwindigkeiten zum gleichen Zeitpunkt in zwei Raumpunkten mit Abstand $d\mathbf{r}$ ($\equiv$ dem in dt zurückgelegten Weg):

$$dx \partial_x \mathbf{v} + dy \partial_y \mathbf{v} + dz \partial_z \mathbf{v} = (d\mathbf{r} \cdot \nabla) \mathbf{v}, \quad (2.2.5)$$

auch *konvektive Ableitung* genannt.

Die Summe aus (1) und (2) ergibt die infinitesimale Geschwindigkeitsänderung

$$d\mathbf{v} = \partial_t \mathbf{v} dt + (d\mathbf{r} \cdot \nabla) \mathbf{v} , \quad (2.2.6)$$

aus der wir per Division durch dt die *substantielle Ableitung* gewinnen:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} . \quad (2.2.7)$$

Die substantielle Ableitung ist ein physikalischer Begriff; aus mathematischer Sicht ist sie identisch mit dem totalen Differenzial (2.1.14). Substanziell wird sie genannt, da sie die Änderung der Größe entlang der Bewegung der Substanz, also des bewegten Fluids, beschreibt.

Die Bewegungsgleichung (2.2.3) kann also ausgeschrieben werden zu [1]

$$\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} . \quad (2.2.8)$$

Dies sind die *Euler'schen Gleichungen für ideale Fluide*¹.

Die *Nichtlinearität* im Konvektionsglied erschwert die Integration erheblich, denn das Superpositionsprinzip hat hier keine Gültigkeit mehr. Gerade die Nichtlinearität der Gleichungen zeichnet verantwortlich für die Vielzahl hydrodynamischer Phänomene, und – unter bestimmten Bedingungen – für den Übergang zu *chaotischem* (turbulentem) Verhalten.

Im *Schwerefeld* wirkt auf jede Volumeneinheit zusätzlich die Kraft $\rho \mathbf{g}$; die *Euler-Gleichungen im Schwerefeld* lauten also

$$\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \mathbf{g} . \quad (2.2.9)$$

Diese Gleichungen gelten für *ideale Fluide*, bei denen Wärmeleitung und Zähigkeit vernachlässigbar sind. Beide Prozesse erzeugen *Energiedissipation*. Ohne sie ist die Bewegung in jedem Teil der Flüssigkeit *adiabatisch*: Die Entropie jedes Flüssigkeitselements bleibt bei der Bewegung im Raum konstant.

Mit

$$s = \frac{\text{Entropie}}{\text{Masseneinheit}} \quad \Rightarrow \quad \frac{ds}{dt} = 0 \quad (2.2.10)$$

¹Die Gleichungen wurden von Leonhard Euler (*1707 Basel, +1783 St. Petersburg) im Jahr 1755 gefunden und 1757 veröffentlicht.

analog zu dv/dt gilt hier für die totale Zeitableitung, also die Entropieänderung eines sich bewegendes Fluidelements, die *Adiabatengleichung*

$$\frac{ds}{dt} = \partial_t s + \mathbf{v} \cdot \nabla s = 0 . \quad (2.2.11)$$

Mit der Kontinuitätsgleichung (2.1.10) lässt sie sich als Kontinuitätsgleichung für die Entropie schreiben,

$$\partial_t (\rho s) + \nabla \cdot (\rho s \mathbf{v}) = 0 \quad (2.2.12)$$

mit der Entropiestromdichte $\rho s \mathbf{v}$.

Oft vereinfacht sich die Adiabatengleichung: Ist die Entropie anfangs in allen Punkten des Flüssigkeitsvolumens gleich, so bleibt sie auch während der weiteren Bewegung der Flüssigkeit zeitlich unverändert:

$$S(\mathbf{r})|_{t=0} = \text{const} \quad \Rightarrow \quad S(\mathbf{r}, t) = \text{const} \quad \forall t. \quad (2.2.13)$$

Dieser Fall heißt *isentrop* (oder *homentrop*) *Bewegung*.

Für diesen Fall lassen sich mit der *Enthalpie* w (pro Masseneinheit), die auch bei der Beschreibung isobarer Prozesse wichtig ist, die Euler-Gleichungen (2.2.8) vereinfachen, indem man vom Differenzial der Enthalpie ausgeht:

$$dw = \underbrace{T ds}_{\text{innere Energie}} + \underbrace{V dp}_{\text{Verdrängungsarbeit}}, \quad (2.2.14)$$

wobei $V = 1/\rho$ das spezifische Volumen und T die Temperatur angeben. Falls die Entropie konstant ist, $s = \text{const} \Rightarrow ds = 0$, vereinfacht sich der Ausdruck zu

$$dw = V dp = \frac{dp}{\rho}. \quad (2.2.15)$$

Also folgt für den Gradienten der Enthalpie

$$\nabla w = \frac{1}{\rho} \nabla p. \quad (2.2.16)$$

Damit werden die Euler-Gleichungen (2.2.8) zu

$$\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla w, \quad (2.2.17)$$

und im Schwerfeld

$$\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla w + \mathbf{g} . \quad (2.2.18)$$

Nun bildet man die Rotation auf beiden Seiten und macht sich zunutze, dass nach den Resultaten der Vektoranalysis

$$\nabla \times \nabla = 0 \quad (2.2.19)$$

und

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \frac{\nabla \mathbf{v}^2}{2} - \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) \quad (2.2.20)$$

gilt. Damit werden im *isentropen Fall* die Euler-Gleichungen zu den *Euler-Gleichungen für isentrope Bewegung*, die nur das Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ enthalten²:

$$\partial_t (\nabla \times \mathbf{v}) = \nabla \times [\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v})] . \quad (2.2.21)$$

Dazu folgt bei *inkompressiblen* Fluiden (also für $\rho = \text{const}$) aus der Kontinuitätsgleichung (2.3) die Bedingung

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 . \quad (2.2.22)$$

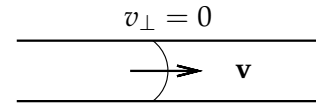


Abbildung 2.3:
Geschwindigkeitsprofil eines
umgrenzten Fluids

(Der Unterschied zwischen kompressiblen und inkompressiblen Fluiden fällt allerdings erst ins Gewicht, wenn sich $|\mathbf{v}|$ in der Größenordnung der Schallgeschwindigkeit bewegt.)

Außerdem können wir die *Randbedingung*

$$v_{\perp} = 0 \quad \text{am Rand des Fluids} \quad (2.2.23)$$

aufstellen, die einfach besagt, dass das Fluid nicht in die Wand eindringen kann (Abb. 2.3). Bei zwei sich nicht mischenden Fluiden lautet die Randbedingung

$$v_{\perp}^1 = v_{\perp}^2 = v_{\perp}^{\text{Grenzfläche (1-2)}} . \quad (2.2.24)$$

In den Euler-Gleichungen für die isentrope Bewegung (2.2.21) fällt der Gravitationsterm weg, da Gravitation eine konservative Kraft ist – d. h., sie lässt sich als Gradient eines Potentials darstellen – und da $\nabla \times \nabla = 0$:

$$\mathbf{F}_g = m\mathbf{g} = -\nabla U . \quad (2.2.25)$$

²Dies ist nicht möglich, wenn s nicht konstant ist, da dann im Allgemeinen $\nabla \times \frac{\nabla p}{\rho} \neq 0$.

In der nur durch das Geschwindigkeitsfeld bestimmten Form der Euler-Gleichungen gibt es also keine Abhängigkeit von konservativen äußeren Kräften mehr. Der Einfluss einer äußeren Kraft kann sich jedoch in den *Randbedingungen* beim Lösen der Differenzialgleichung bemerkbar machen.

2.3 Bernoulli'sche Gleichung

Bei einer *stationären Strömung* ist die Strömungsgeschwindigkeit in jedem Raumpunkt, den das Fluid einnimmt, zeitlich konstant:

$$\partial_t \mathbf{v} = 0 . \quad (2.3.1)$$

Die isentropen Euler'schen Gleichungen (2.2.21) in der Form

$$\partial_t \mathbf{v} - \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) = -\nabla \left(w + \frac{\mathbf{v}^2}{2} \right) \quad (2.3.2)$$

werden dann zu

$$\nabla \frac{\mathbf{v}^2}{2} - \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) = -\nabla w . \quad (2.3.3)$$

Daraus lässt sich die *Bernoulli'sche Gleichung*³ ableiten [2]:

$$\frac{\mathbf{v}^2}{2} + w = \text{const} \quad (2.3.4)$$

Der Wert der Konstanten ist dabei unterschiedlich für verschiedene *Stromlinien*.

Bei *stationären Strömungen* stimmen Stromlinien und *Bahnkurven* der Flüssigkeitspartikel überein. Bei einer nichtstationären Strömung ist das nicht der Fall (Abb. 2.4):

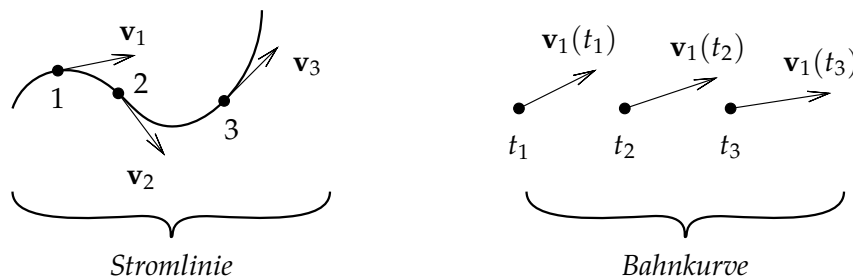


Abbildung 2.4: Bahnkurven und Stromlinien

³Daniel Bernoulli (★1700 Groningen, †1782 Basel), 1738.

Die Tangenten der *Stromlinien* geben die Richtung des Geschwindigkeitsvektors zu einem gegebenen Zeitpunkt an (für *verschiedene* Fluidteilchen in aufeinanderfolgenden Raumpunkten).

Die Tangenten der *Bahnkurven* geben die Richtungen der Geschwindigkeiten $\mathbf{v}$ bestimmter Fluidteilchen zu aufeinanderfolgenden Zeitpunkten an.

Im Schwerfeld muss in der Euler-Gleichung – und dementsprechend in der Bernoulli-Gleichung – $\mathbf{g}$ ergänzt werden. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit wählen wir dafür die z -Richtung:

$$\frac{\mathbf{v}^2}{2} + w + gz = \text{const.} \quad (2.3.5)$$

Daniel Bernoulli fand die Gleichung jedoch nicht als Ableitung aus der (damals noch unbekannten) Euler-Gleichung, sondern direkt aus dem Energiesatz als

$$\underbrace{\rho \frac{\mathbf{v}^2}{2}}_{\text{kinetische Energie pro Volumeneinheit}} + \underbrace{p}_{\text{Druck: potenzielle Energie der inneren Kräfte}} + \underbrace{\rho gz}_{\text{potenzielle Energie der äußeren Kraft pro Volumeneinheit}} = \text{const.} \quad (2.3.6)$$

Die Bernoulli'sche Gleichung hat wichtige Anwendungen im Turbinenbau, der Aerodynamik etc. Obwohl ihre Ableitung aus den Euler'schen Gleichungen zunächst nur für stationäre Strömungen gilt, lässt sich die Bernoulli'sche Gleichung auch auf nichtstationäre Strömungen verallgemeinern.

Beispiel 1: Aus der Bernoulli'schen Gleichung folgt das *Torricelli'sche Theorem*, das Torricelli⁴ – ein Schüler Galileis – etwa 100 Jahre vor Bernoulli fand.

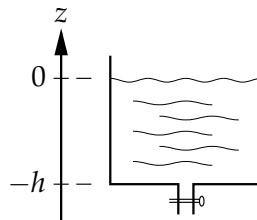


Abbildung 2.5: Gefäß mit Hahn

Ein Gefäß ist bis zu einer Höhe h mit einem Fluid gefüllt (Abb. 2.5). Der Auslass ist geschlossen, so dass im ganzen Gefäß $v = 0$ gilt. Außerdem ist der Druck (relativ zum Atmosphärendruck) $p = 0$ an der Oberfläche bei $z = 0$. Aus der

⁴Evangelista Torricelli (*1608 Faenza, †1647 Florenz).

Bernoulli'schen Gleichung folgt daher für $z = 0$, dass $\text{const} = 0$. Also gilt am Boden

$$p = \rho gh . \quad (2.3.7)$$

Das ist der *hydrostatische Druck*.

Wird der Hahn geöffnet, so herrscht an der Öffnung Atmosphärendruck, also $p = 0$. Dies reduziert die Bernoulli'sche Gleichung auf

$$\frac{\mathbf{v}^2}{2} = gh . \quad (2.3.8)$$

Für die Ausflussgeschwindigkeit v gilt also

$$v = \sqrt{2gh} , \quad (2.3.9)$$

was eine einfache Anwendung des Energiesatzes mittels der Bernoulli'schen Gleichung ist.

Beispiel 2: Die Änderung des Drucks in einer stationären Strömung von veränderlichem Querschnitt ist der Änderung von $|\mathbf{v}|$ entgegengesetzt: bei Inkompressibilität ist die Druckflussmenge in jedem Querschnitt dieselbe, so dass v bei abnehmendem Querschnitt zunimmt, bei zunehmendem Querschnitt aber geringer wird. Nach der Bernoulli'schen Gleichung (2.6) bei gleichbleibendem z ,

$$\rho \frac{\mathbf{v}^2}{2} + p = \text{const} , \quad (2.3.10)$$

verhält sich der Druck umgekehrt (Abb. 2.6).

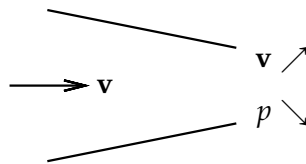


Abbildung 2.6: Horizontale Röhre von veränderlichem Querschnitt

(Eine Menschenmenge in einer sich verengenden Passage verhält sich gegensätzlich: die Geschwindigkeit nimmt ab, der Druck aber nimmt zu.)

Beispiel 3: Pressluft strömt durch einen Kanal mit zunehmendem Querschnitt gegen eine beweglich gelagerte Platte. In der Folge wird die Platte angehoben.

Der Grund dafür ist, dass im Kanal die Geschwindigkeit der Luft abnimmt; der Druck nimmt also wegen der Bernoulli'schen Gleichung bzw. des Energiesatzes

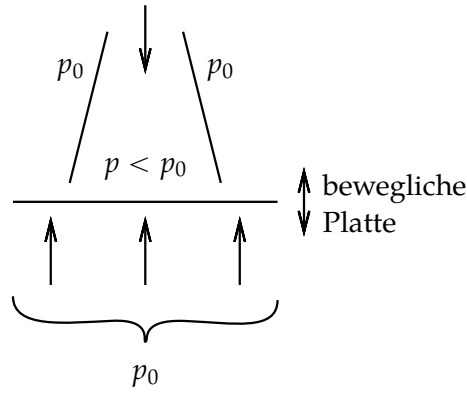


Abbildung 2.7: Preßluft in vertikaler Röhre

zu. Am Kanalende herrscht aber Atmosphärendruck p_0 , kurz davor im Kanal muss also $p < p_0$ gelten – es entsteht also eine Sogwirkung von oben, und die Platte wird angehoben (Abb. 2.7, die Darstellung ist stark vereinfacht).

2.4 Euler-Gleichungen im linearisierten Fall

Wir erinnern uns an die Euler-Gleichungen (2.2.8),

$$\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{\nabla p}{\rho}, \quad (2.4.1)$$

und die Kontinuitätsgleichung (2.1.10),

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (2.4.2)$$

In idealen *kompessiblen* Fluiden ist $\nabla \cdot \mathbf{v} \neq 0$.

Um kleinere harmonische Luftschwingungen beschreiben zu können, wünschen wir eine lineare Lösung dieser Gleichungen. Wir nähern also

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \approx \partial_t \mathbf{v} \quad (2.4.3)$$

und eliminieren damit die quadratischen Anteile in der Gleichung. Dadurch können wir akustische Schwingungen in Fluiden beschreiben.

Es sei p die Druckabweichung vom Atmosphärendruck p_0 und ρ die Dichte. Wir entwickeln ρ räumlich um die Dichte der ungestörten Atmosphäre ρ_0 :

$$\rho = \rho_0 + \underbrace{\xi \partial_x \rho|_{x_0}}_{=0} + \frac{\xi^2}{2} \partial_x^2 \rho|_{x_0} + \dots \quad (2.4.4)$$

Größen der zweiten Ordnung und höher vernachlässigen wir, so dass sich als Linearisierung der Dichte $\rho \approx \rho_0$ ergibt (Abb. 2.8). Wir erhalten also aus (2.2.8) und (2.1.10) vier lineare Gleichungen:

$$\rho_0 \partial_t \mathbf{v} + \nabla p = 0, \quad (2.4.5)$$

$$\partial_t \rho + \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (2.4.6)$$

Die Beschreibung wird also auf zeitliche Änderungen der Dichte an einem festen Ort x_0 konzentriert.

Der Zusammenhang von *Druck* p und *Dichte* ρ lässt sich über die *Thermodynamik* herstellen: Bei isothermen Zustandsänderungen ist

$$\nabla p = c^2 \nabla \rho, \quad (2.4.7)$$

was uns ermöglicht, die Schallgeschwindigkeit anzunähern als

$$c \approx \sqrt{\frac{p_0}{\rho_0}}. \quad (2.4.8)$$

Auf Meereshöhe ist

$$\begin{aligned} \rho_0 &= 1.928 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \\ p_0 &= 101\,325 \text{ Pa} \approx 1 \times 10^5 \text{ Pa} \\ &= 1013.25 \text{ hPa} \\ \Rightarrow c &= \sqrt{\frac{101\,325}{1.2928} \frac{\text{m}}{\text{s}}} \approx 279.96 \frac{\text{m}}{\text{s}}. \end{aligned} \quad (2.4.9)$$

Tabelle 2.1: Experimentelle Werte für c bei verschiedenen Temperaturen

T [C]	0	10	20	30
c [m/s]	332	338	344	350

Tabelle 2.1 gibt experimentelle Werte von c in Luft an. Offenbar ist der isotherme Wert von $280 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ wesentlich zu klein, da bei einem schnellen Wechsel der Luftschwingungen kein Wärmeausgleich möglich ist und deshalb die Zustandsänderung bei der Schallausbreitung nicht isotherm, sondern adiabatisch ist. Es gilt also die *adiabatische Zustandsgleichung*

$$pV^\kappa = \text{const}. \quad (2.4.10)$$

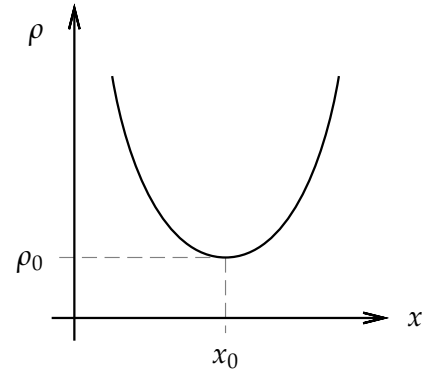


Abbildung 2.8: Quasiharmonische Dichteverteilung

Der *Adiabatenkoeffizient* κ ist der Quotient der spezifischen Wärmekapazitäten,

$$\kappa = \frac{c_p}{c_v} = 1 + \frac{2}{f}, \quad (2.4.11)$$

wobei f die Zahl der Freiheitsgrade angibt. Für zweiatomige Gase ist $f = 5$, da sie drei Translations- und zwei Rotationsfreiheitsgrade besitzen; also ist $\kappa_2 = 7/5 \approx 1.4$. Für einatomige Gase ohne Rotationsfreiheiten (in der klassischen Anschauung) ist $f = 3$ und also $\kappa_1 = 5/3$. Außerdem gilt

$$\frac{dp}{d\rho} = \kappa \frac{p_0}{\rho_0} = c^2 \quad (2.4.12)$$

und also

$$\begin{aligned} c &= \sqrt{\kappa \frac{p_0}{\rho_0}} \approx \sqrt{1.4} \cdot 279.96 \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ &\approx 331.25 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \end{aligned} \quad (2.4.13)$$

was wiederum in guter Übereinstimmung mit den experimentellen Werten ist.

(Für polytrope Prozesse gilt allgemein

$$pV^n = \text{const}, \quad (2.4.14)$$

wobei $n = 0$ einer isobaren, $n = 1$ einer isothermen, $n = \kappa$ einer adiabatischen und $n = \infty$ einer isochoren Zustandsänderung entspricht.)

In den linearisierten Euler-Gleichungen kann nun über die Schallgeschwindigkeit c der Druck p über die Dichte ρ ausgedrückt werden:

$$\rho_0 \partial_t \mathbf{v} + c^2 \nabla \rho = 0. \quad (2.4.15)$$

Wir eliminieren v , indem wir die linearisierte Kontinuitätsgleichung (2.4.6) partiell nach t ableiten,

$$\partial_t^2 \rho + \nabla (\rho_0 \partial_t \mathbf{v}) = 0, \quad (2.4.16)$$

und die Euler-Gleichungen einsetzen:

$$\partial_t^2 \rho = c^2 \Delta \rho. \quad (2.4.17)$$

Dieselbe Gleichung gilt für p , da ∇p , Δp und $\partial_t^2 p$ bis auf c^2 gleich den mit ρ gebildeten Größen sind:

$$\partial_t^2 p = c^2 \Delta p. \quad (2.4.18)$$

Diese Gleichung heißt die *Schwingungsgleichung*. Sie kann im Eindimensionalen ($\Delta = \partial_x^2$) eine schwingende *Saite* beschreiben oder im Zweidimensionalen ($\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2$) eine schwingende *Membran*.

Die Lösung der Gleichung im Eindimensionalen,

$$\partial_t^2 p = c^2 \partial_x^2 p, \quad (2.4.19)$$

ist möglich durch den sogenannten *d'Alembert'schen Ansatz*:

$$p(x, t) = F_1(x + ct) + F_2(x - ct) \quad (2.4.20)$$

mit willkürlichen reellen Funktionen F_1, F_2 . Mit den Anfangsbedingungen

$$p = f_1(x), \quad \partial_t p = f_2(x) \quad (2.4.21)$$

für $t = 0$ wird

$$F_1(x) + F_2(x) = f_1(x), \quad (2.4.22)$$

$$F_1'(x) - F_2'(x) = \frac{1}{c} f_2(x). \quad (2.4.23)$$

Integration ergibt

$$F_{1,2}(x) = \frac{1}{2} \left[f_1(x) \pm \frac{1}{c} \int_{x_0}^x f_2(\xi) d\xi \right]. \quad (2.4.24)$$

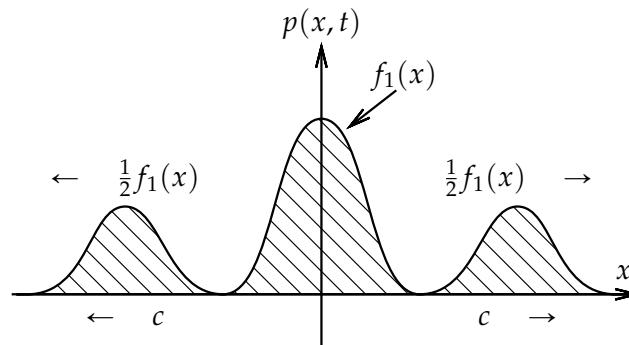


Abbildung 2.9: Zeitliche Ausbreitung einer Druckstörung

Für $f_2 \equiv 0$ wandert eine anfängliche Druckstörung $f_1(x)$ zur Hälfte nach rechts, zur Hälfte nach links, jeweils mit Geschwindigkeit c und ohne Änderung der Form (Abb. 2.9). Das entspricht der Ausbreitung eines Geräusches mit Schallgeschwindigkeit c (analog zur Saite, die bei $t = 0$ angezupft und dann sich selbst überlassen wird). Die Fortpflanzung erfolgt *longitudinal*: Transversalwellen gibt es in idealen Fluiden nicht.

Bei *periodischen Luftschwingungen* ist $\omega = 2\pi/T$ die Kreisfrequenz, $\nu = \omega/(2\pi) = 1/T$ die Frequenz (Zahl der Schwingungen pro Sekunde, *Tonhöhe*). Also sind F_1, F_2 trigonometrische Funktionen mit Phasen α, β :

$$F_1(x + ct) = b \cos(kx + \omega t + \beta) \quad \text{in x-Richtung ,} \quad (2.4.25)$$

$$F_2(x - ct) = a \cos(kx - \omega t + \beta) \quad \text{in x-Richtung .} \quad (2.4.26)$$

Bei $a = b$ ergibt die Überlagerung eine *stehende Welle*. Die Schallgeschwindigkeit ist gegeben durch die *Dispersionsrelation*

$$c = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T} . \quad (2.4.27)$$

2.5 Hydrostatik

Für eine ruhende Flüssigkeit ohne äußere Kräfte werden die Euler-Gleichungen (2.2.8) wegen $\mathbf{v} \equiv 0$ zu

$$\nabla p = 0 \quad \Rightarrow \quad p = \text{const} . \quad (2.5.1)$$

Der Druck ist in allen Punkten der Flüssigkeit in jede Raumrichtung gleich stark (im Inneren und am Rand): Das ist das *Pascal'sche Gesetz*⁵ (Abb. 2.10). Es gilt unter der Voraussetzung, dass die Schwerkraft gegenüber den äußeren Drücken vernachlässigt werden kann und sich die Teilchen leicht gegeneinander verschieben lassen.

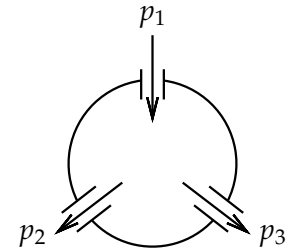


Abbildung 2.10: Zum Pascal'schen Gesetz

Im Schwerfeld wird die Euler-Gleichung hingegen zu

$$\nabla p = \rho \mathbf{g} . \quad (2.5.2)$$

Für inkompressible Fluide ($\rho = \text{const}$) lässt sich die Gleichung integrieren:

$$\partial_x p = \partial_y p = 0 \quad (2.5.3)$$

$$\partial_z p = -\rho g \quad (2.5.4)$$

$$\Rightarrow p = -\rho g z = \text{const} \quad (2.5.5)$$

⁵Blaise Pascal (*1623 Clermont-Ferrand, †1662 Paris).

mit $\text{const} = p_0$. An der Oberfläche ist $z = h$, also ist der Druck $p = p_0$ (Abb. 2.11).

$$\Rightarrow \text{const} = p_0 + \rho gh \quad (2.5.6)$$

$$\Rightarrow p = p_0 + \rho g (h - z) . \quad (2.5.7)$$

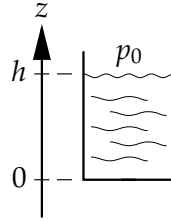


Abbildung 2.11: Ruhendes Fluid im Schwerfeld

Im Allgemeinen – und besonders für Gase – ist ρ jedoch nicht konstant; für Fluide im thermischen Gleichgewicht lässt sich die Euler-Gleichung dennoch integrieren.

Beispiel: Rotation eines Zylinders. Wir betrachten eine flüssigkeitsgefüllte *Zentrifuge*, die mit $\omega = \text{const}$ um die Vertikale rotiert. Die Zentrifugalkraft hat ein Potenzial und ermöglicht ein Gleichgewicht, es handelt sich also um ein *quasi-statisches Problem*.

Die Zentrifugalkraft pro Volumeneinheit ist

$$F_r = \rho r \omega^2 , \quad (2.5.8)$$

also ist das Zentrifugalpotenzial

$$U_r = -\frac{1}{2}\rho r^2 \omega^2 \quad \text{mit} \quad \mathbf{F} = -\nabla U . \quad (2.5.9)$$

Das Gesamtpotenzial von Gravitation und Rotation ist also

$$U = \rho g z - \frac{1}{2}\rho r^2 \omega^2 \quad (2.5.10)$$

$$= \rho g \left(z - \frac{r^2 \omega^2}{2g} \right) . \quad (2.5.11)$$

Die mechanische Gleichgewichtsbedingung lautet

$$\nabla p = \mathbf{F} = -\nabla U \quad (2.5.12)$$

$$\Rightarrow \nabla (p + U) = 0 \quad (2.5.13)$$

$$\Rightarrow p + U = \text{const} \quad (2.5.14)$$

$$\Leftrightarrow p = \rho g \left(\frac{r^2 \omega^2}{2g} - z \right) + \text{const} . \quad (2.5.15)$$

Die Konstante können wir bestimmen anhand der Wasserstandshöhe z_0 bei $r = 0$. p ist der Überdruck ausgehend vom äußeren Atmosphärendruck, also muss an der Oberfläche $p = 0$ sein.

$$\Rightarrow 0 = -\rho g z_0 + \text{const} \quad (2.5.16)$$

$$\Rightarrow \text{const} = \rho g z_0 . \quad (2.5.17)$$

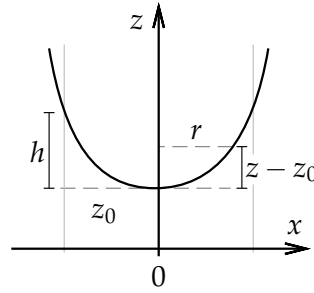


Abbildung 2.12: Oberflächenparaboloid in der Zentrifuge

Das Druckprofil ist also

$$p = \rho g \left(\frac{r^2 \omega^2}{2} + z_0 - z \right) . \quad (2.5.18)$$

Daraus folgt die Gleichung der freien Oberfläche mit $p = 0$:

$$z - z_0 = \frac{r^2 \omega^2}{2g} \quad (2.5.19)$$

und mit der Auftriebshöhe h des Wassers am Rand: $r = R \Rightarrow h = z - z_0$.

Die Bahngeschwindigkeit ist $v = \omega r$, so dass die Höhe durch ein Oberflächenparaboloid beschrieben wird (Abb. 2.12):

$$h = \frac{v^2}{2g} . \quad (2.5.20)$$

Die Niveaulächen konstanten Drucks sind kongruente Paraboloiden, die gegen das Oberflächenparaboloid nach unten verschoben sind.

2.6 Energie- und Impulsstrom im Fluid

Die Energie des Fluids pro Volumenelement ist

$$\rho \frac{v^2}{2} + \rho \varepsilon = \text{kinetische Energie} + \text{innere Energie} , \quad (2.6.1)$$

wobei ε die innere Energie pro Masseneinheit angibt. Bei Bewegung folgt die zeitliche Änderung der partiellen Ableitung

$$\partial_t \left[\rho \frac{v^2}{2} + \rho \varepsilon \right], \quad (2.6.2)$$

die sich aus der Kontinuitätsgleichung (2.1.10), den Euler-Gleichungen (2.2.8) und der thermodynamischen Relation

$$d\varepsilon = Tds + \frac{p}{\rho^2} d\rho \quad (2.6.3)$$

berechnen. Man erhält

$$\partial_t \left[\rho \frac{v^2}{2} + \rho \varepsilon \right] = -\nabla \cdot \left[\rho \mathbf{v} \left(\frac{v^2}{2} + w \right) \right] \quad (2.6.4)$$

mit der Enthalpie pro Masseneinheit

$$w = \varepsilon + p/\rho = \varepsilon + \frac{p}{\rho}. \quad (2.6.5)$$

Die *Energieänderung* des Fluids pro Zeiteinheit in einem gegebenen Volumen V (Abb. 2.13) ergibt sich durch die Integration über dieses Volumen:

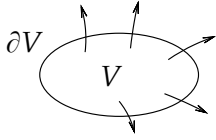


Abbildung 2.13:
Energieänderung eines
Fluids

$$\partial_t \int_V \left[\rho \frac{v^2}{2} + \rho \varepsilon \right] dV = - \int_V \nabla \cdot \left[\rho \mathbf{v} \left(\frac{v^2}{2} + w \right) \right] dV. \quad (2.6.6)$$

Dieses Integral können wir mit dem Gauß'schen Integralsatz (2.1.7) in ein Oberflächenintegral umformen:

$$\partial_t \int_V \left[\rho \frac{v^2}{2} + \rho \varepsilon \right] dV = - \oint_{\partial V} \rho \mathbf{v} \left(\frac{v^2}{2} + w \right) \cdot d\mathbf{A} \quad (2.6.7)$$

$$= - \oint_{\partial V} \mathbf{j} \left(\frac{v^2}{2} + w \right) \cdot d\mathbf{A}. \quad (2.6.8)$$

Dies ist die Energiemenge, die pro Zeiteinheit aus dem betrachteten Volumen V durch dessen Begrenzungsfläche $A \equiv \partial V$ herausfließt. Also ist

$$\rho \mathbf{v} \left(\frac{v^2}{2} + w \right) = \mathbf{j} \left(\frac{v^2}{2} + w \right) \quad (2.6.9)$$

der *Vektor der Energiestromdichte*.

Das Fluid mit Stromdichte $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$ führt pro Masseneinheit bei der Bewegung die Energie $v^2/2 + w$ mit sich: Hier steht die *Enthalpie* anstelle der inneren Energie $w = \varepsilon + p/\rho$. Wir

können also schreiben:

$$\partial_t \int_V \left[\rho \frac{v^2}{2} + \rho \varepsilon \right] dV = - \oint_{\partial V} \rho \mathbf{v} \left(\frac{v^2}{2} + \varepsilon \right) \cdot d\mathbf{A} - \oint_{\partial V} p \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} , \quad (2.6.10)$$

wobei das erste Integral die kinetische und innere Energie ist, die pro Zeiteinheit *durch die Oberfläche* transportiert wird, und das zweite Integral die Arbeit angibt, die von den Druckkräften an der Flüssigkeit innerhalb der geschlossenen Oberfläche geleistet wird.

Der Impulsstrom folgt analog dazu aus der Kontinuitätsgleichung, den Euler-Gleichungen und thermodynamischen Relationen:

$$\rho \mathbf{v} = \text{Impuls pro Volumeneinheit} \quad (2.6.11)$$

$$\partial_t (\rho \mathbf{v}) = \text{Geschwindigkeit der Impulsänderung.} \quad (2.6.12)$$

Vereinfachend läßt sich die totale zeitliche Änderung des Impulses pro Volumeneinheit schreiben als

$$\partial_t \int_V \rho \mathbf{v} dV = - \int_V \nabla [p + \rho v^2] dV \quad (2.6.13)$$

$$= - \oint_A [p + \rho v^2] d\mathbf{A} . \quad (2.6.14)$$

Die *Dichte des Impulsstromes durch die Oberfläche* ist also

$$p + \rho v^2 , \quad (2.6.15)$$

wobei schon die etwas eigenartig anmutende Anwendung des Gauß'schen Integralsatzes in (2.6.14) darauf hindeutet, dass es sich hier eigentlich um eine *tensorielle Größe* handelt, die durch ein Skalar nur unzureichend beschrieben werden kann.

2.7 Zirkulation, Thomson'scher Satz

Die Zirkulation längs einer geschlossenen Kurve ist definiert als

$$\Gamma = \oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} , \quad (2.7.1)$$

wobei $d\mathbf{l}$ ein Linienelement auf der Kurve C angibt. Bei Bewegung des Fluids ändern sich $\mathbf{v}$ und die Gestalt der Kurve. Die Veränderung der Zirkulation bestimmen wir durch die totale

Zeitableitung

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \frac{d}{dt} \oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} . \quad (2.7.2)$$

Dadurch erhalten wir die Änderung der Zirkulation längs einer *sich bewegenden* Flüssigkeitskurve.

Wir wollen die Differentiation nach den Ortskoordinaten durch ein δ ausdrücken, die Differentiation nach der Zeit hingegen durch ein d . $d\mathbf{r}$ ist also ein Linienelement auf der Kurve, das wir als Differenz zweier Ortsvektoren $\delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ schreiben können:

$$\Gamma = \oint \mathbf{v} \cdot \delta\mathbf{r} . \quad (2.7.3)$$

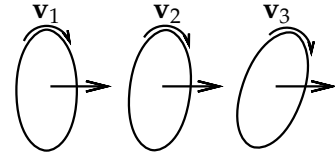


Abbildung 2.14: Änderung der Zirkulation

Die zeitliche Ableitung der Zirkulation (Abb. 2.14) ist dann

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \frac{d}{dt} \oint \mathbf{v} \cdot \delta\mathbf{r} = \oint \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \delta\mathbf{r} + \oint \mathbf{v} \cdot \frac{d}{dt} \delta\mathbf{r} . \quad (2.7.4)$$

Es ist

$$\mathbf{v} \cdot \frac{d}{dt} \delta\mathbf{r} = \mathbf{v} \cdot \delta \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v} \cdot \delta\mathbf{v} = \delta \frac{v^2}{2} \quad (2.7.5)$$

und

$$\oint \delta \frac{v^2}{2} = 0 , \quad (2.7.6)$$

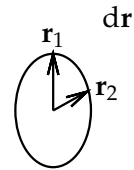


Abbildung 2.15: Linienelement auf der Kurve

da ein Integral über ein vollständiges Differenzial längs einer geschlossenen Kurve (Abb. 2.15) verschwindet. Also ist

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \frac{d}{dt} \oint \mathbf{v} \cdot \delta\mathbf{r} = \oint \frac{d\mathbf{v}}{dt} \delta\mathbf{r} . \quad (2.7.7)$$

Für isentrope Bewegungen ist die Beschleunigung

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla w \quad (2.7.8)$$

und mit dem Satz von Stokes lässt sich das Kurvenintegral in ein Flächenintegral überführen,

$$\oint_C \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = \int_A (\nabla \times \mathbf{a}) \cdot d\mathbf{A} \quad (2.7.9)$$

$$\Rightarrow \oint_C \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot d\mathbf{r} = \int_A \left(\nabla \times \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right) \cdot d\mathbf{A} \quad (2.7.10)$$

$$= 0 \quad (2.7.11)$$

wegen $d\mathbf{v}/dt = -\nabla w$ und $\nabla \times \nabla = 0$. (Wegen $\nabla \times \mathbf{g} = 0$ gilt dies auch im Schwerfeld.)

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (2.7.12)$$

$$\Rightarrow \Gamma = \oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \text{const} . \quad (2.7.13)$$

Dies ist der *Thomson'sche Satz*⁶, der Erhaltungssatz für die Zirkulation: In einer idealen Flüssigkeit ist die Zirkulation längs einer geschlossenen Kurve bei isentroper Strömung konstant.

Auf eine unendlich kleine geschlossene Kurve δC angewandt, ergibt der Satz mithilfe des Stokes'schen Integralsatzes die Erhaltung der *Wirbelung*⁷ $\nabla \times \mathbf{v}$ der Fluidströmung:

$$\oint_{\delta C} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \int_{\delta A} (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{A} \approx (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot \delta \mathbf{A} \quad (2.7.14)$$

$$\stackrel{!}{=} \text{const} . \quad (2.7.15)$$

2.8 Potenzialströmungen

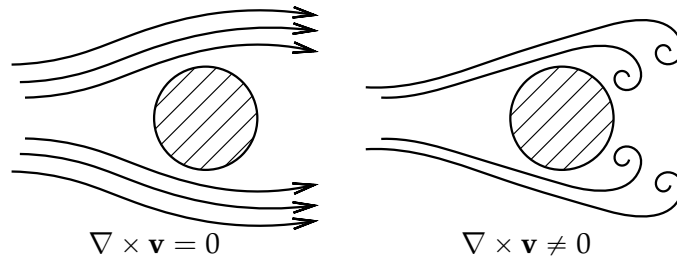


Abbildung 2.16: Wirbelfreie und nicht wirbelfreie Strömungen

Potenzialströmungen sind Strömungen, für die *im ganzen Raum*

$$\nabla \times \mathbf{v} = 0 \quad (2.8.1)$$

⁶Aufgestellt 1869 von William Thomson, 1. Baron Kelvin (*1824 Belfast, †1907 Netherhall).

⁷Auch *Wirbelstärke*; *vorticity* in englischsprachiger Literatur.

gilt, d. h., sie sind *wirbelfrei* bis auf singuläre Punkte oder Linien. Bei *Wirbelströmungen* hingegen gilt im Allgemeinen (Abb. 2.16)

$$\nabla \times \mathbf{v} \neq 0. \quad (2.8.2)$$

Aus der Erhaltung der Zirkulation folgt – zunächst für stationäre Strömungen – die Wirbelfreiheit: Sei $\nabla \times \mathbf{v} = 0$ auf einem Punkt der Stromlinie. Eine infinitesimale geschlossene Kurve δC umschlieÙe die Stromlinie und bewege sich mit dem Fluid. Also folgt mit dem Satz von Stokes:

$$\oint_{\delta C} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \text{const} = \int_A (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{A}. \quad (2.8.3)$$

Daraus folgt, dass

$$\nabla \times \mathbf{v} = 0 \quad (2.8.4)$$

entlang der gesamten Stromlinie; die Rotation verschwindet auch in allen anderen Punkten der Stromlinie. Bei *nicht stationären* Strömungen gilt das auch, nur betrachtet man hier anstelle der Stromlinie die in der Zeit von einem bestimmten Fluidteilchen zurückgelegte *Bahnkurve* (die nur bei stationären Strömungen mit der Stromlinie übereinstimmt).

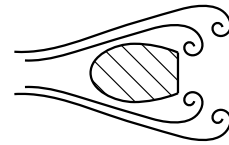


Abbildung 2.17:
Turbulenzen an
tangentialer
Unstetigkeit

Ist der von $-\infty$ auf einen Körper einströmende Strom homogen ($\mathbf{v} = \text{const}$), so ist die stationäre Strömung um einen beliebigen Körper eine Potenzialströmung mit $\nabla \times \mathbf{v} = 0$. Dennoch unterscheidet sich das wahre Strömungsbild beim Umströmen eines Körpers von einer Potenzialströmung, denn die Strömung längs der Wand ermöglicht keine geschlossenen Kurven um Stromlinien. Das führt dazu, dass die Stromlinien sich ablösen und im Inneren der Flüssigkeit verlaufen: es gibt einen Sprung in der tangentialen Geschwindigkeitskomponente (Abb. 2.17).

Für *ideale* Fluide gibt es also eine *unendliche Mannigfaltigkeit* von Lösungen mit Flächen tangentialer Unstetigkeiten. Da sie instabil sind, wird die Strömung *turbulent*. Bei *realen* (viskosen) Fluiden ist die Lösung jedoch als Folge der Zähigkeit im Allgemeinen eindeutig; entscheidend ist dabei das Verhalten der *Grenzschicht*.

Bei *stromlinienförmigen* Körpern ist die Strömung nur in einer dünnen Flüssigkeitsschicht in der Nähe der Oberfläche des Körpers und im schmalen Bereich des *Nachlaufs* (Abb. 2.18) keine Potenzialströmung.

Beispiel für eine Potenzialströmung: kleine Schwingungen eines eingetauchten Körpers (Abb. 2.19).

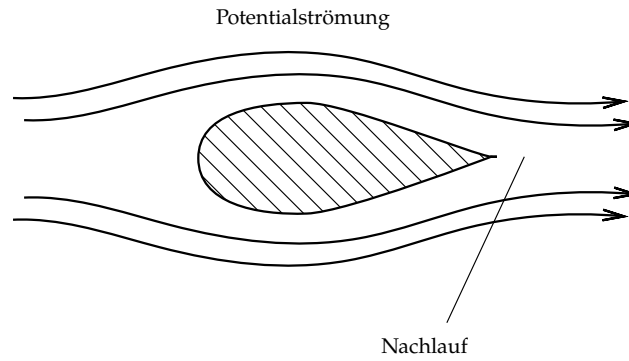


Abbildung 2.18: Nachlauf in einer Potenzialströmung

Für kleine Amplituden $a \ll l$ (wobei l die lineare Dimension des Körpers angibt) ist die Strömung um den schwingenden Körper eine Potenzialströmung. Die Größenordnung der Glieder in den Euler-Gleichungen schätzen wir ab:

$$\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla w . \quad (2.8.5)$$

Für den schwingenden Körper gilt:

$$z(t) = a \cos \omega t \quad (2.8.6)$$

$$u(t) = -\omega a \sin \omega t \quad (2.8.7)$$

$$\partial_t u(t) = -\omega^2 a \cos \omega t \quad (2.8.8)$$

$$|u_{\max}| = \omega a \quad (2.8.9)$$

$$|\partial_t u|_{\max} = \omega^2 a \quad (2.8.10)$$

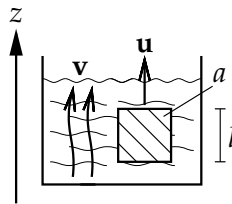


Abbildung 2.19: Schwingender Körper in einem Fluid

Die Strömungsgeschwindigkeit $\mathbf{v}$ wird durch die Schwingungen des Körpers (mit u) in Abständen der Größenordnung l geändert. Für die Ableitung von v gilt also

$$\partial_t v \sim \frac{u}{l} . \quad (2.8.11)$$

In der Nähe des Körpers wird die Größe von v durch u bestimmt,

$$v \sim u \quad \Rightarrow \quad |(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}| \sim \frac{u^2}{l}. \quad (2.8.12)$$

Wegen $\omega \sim u/a$ ist dort mit $v \sim u$

$$|\partial_t \mathbf{v}| \sim \omega u \sim \frac{u^2}{a}. \quad (2.8.13)$$

Für kleine Schwingungen, $a \ll l$, folgt

$$|(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}| \ll |\partial_t \mathbf{v}| \quad (2.8.14)$$

$$\Rightarrow \partial_t \mathbf{v} \simeq -\nabla w, \quad (2.8.15)$$

d. h., der konvektive Teil wird vernachlässigt.

Bilden wir die Rotation von (2.8.15), so folgt

$$\partial_t (\nabla \times \mathbf{v}) = 0 \quad (2.8.16)$$

$$\Rightarrow \nabla \times \mathbf{v} = \text{const.} \quad (2.8.17)$$

Da der zeitliche Mittelwert von $\mathbf{v}$ verschwindet, $\langle \mathbf{v} \rangle_t = 0$, gilt

$$\nabla \times \mathbf{v} = 0. \quad (2.8.18)$$

Die Strömung einer Flüssigkeit, die kleine Schwingungen ausführt, ist in erster Näherung eine *Potenzialströmung*.

Eigenschaften von Potenzialströmungen sind:

- a) Die Zirkulation längs einer beliebigen geschlossenen Kurve ist 0:

$$\Gamma = \oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} \underbrace{=}_{\text{Stokes}} \int_A (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{A} = 0. \quad (2.8.19)$$

Es existieren also keine geschlossenen Stromlinien in einer Potenzialströmung, denn die Richtung der Stromlinie stimmt mit der Richtung der Geschwindigkeit überein, und die Zirkulation längs einer geschlossenen Linie wäre $\neq 0$.

- b) Wegen $\nabla \times \mathbf{v} = 0$ kann bei *Potenzialströmungen* $\mathbf{v}$ als Gradient eines Skalars – des Geschwindigkeitspotenzials Φ – dargestellt werden:

$$\mathbf{v} = -\nabla \Phi, \quad (2.8.20)$$

so dass die Euler-Gleichungen für die Geschwindigkeit

$$-\partial_t \mathbf{v} + \frac{\nabla \mathbf{v}^2}{2} - \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) = -\nabla w \quad (2.8.21)$$

sich mit dem Geschwindigkeitspotenzial als *Potenzialgleichung* schreiben lässt:

$$\nabla \left(\partial_t \Phi + \frac{\mathbf{v}^2}{2} + w \right) = 0. \quad (2.8.22)$$

Also muss gelten, dass

$$\partial_t \Phi + \frac{\mathbf{v}^2}{2} + w = f(t) \quad (2.8.23)$$

mit einer beliebigen Zeitfunktion $f(t)$; mit $w = p/\rho$ verknüpft diese Gleichung Geschwindigkeit und Druck.

Für eine *stationäre Strömung* ist Φ zeitunabhängig,

$$\partial_t \Phi = 0, \quad (2.8.24)$$

und also bleibt

$$\frac{\mathbf{v}^2}{2} + w = \text{const}, \quad (2.8.25)$$

worin wir die Bernoulli'sche Gleichung wiedererkennen, die für stationäre Strömungen offenbar direkt folgt.

Man beachte, dass für eine Potenzialströmung die Konstante in der Bernoulli'schen Gleichung im gesamten Fluidvolumen konstant ist, in einer beliebigen Strömung jedoch nur längs einer einzelnen Stromlinie.

2.9 Inkompressible Fluide

Ein Fluid ist inkompressibel für

$$\frac{\Delta \rho}{\rho} \ll 1, \quad (2.9.1)$$

also wenn keine merkliche Kompression oder Ausdehnung während der Bewegung stattfindet.

Für das Vorliegen von *Inkompressibilität* ist erforderlich, dass die Abschätzung der Dichteänderung $\Delta\rho$ bei einer adiabatischen Druckänderung Δp möglich ist als

$$\Delta\rho = \partial_p \rho|_{s=\text{const}} \Delta p . \quad (2.9.2)$$

Nach Bernoulli sind die Druckschwankungen in einer stationär strömenden Flüssigkeit von der Größenordnung

$$\Delta p \sim \rho v^2 . \quad (2.9.3)$$

Ferner ist mit der Schallgeschwindigkeit c im Fluid

$$\partial_p p|_s = c^2 \quad (2.9.4)$$

$$\Rightarrow \Delta\rho \sim \frac{\rho v^2}{c^2} \quad (2.9.5)$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta\rho}{\rho} \sim \frac{v^2}{c^2} \ll 1 \quad (2.9.6)$$

und also

$$v \ll c . \quad (2.9.7)$$

Dies ist eine notwendige Bedingung für Inkompressibilität. Für eine *stationäre* Strömung ist dies auch hinreichend. Für *nicht stationäre* Strömungen muss eine weitere Bedingung erfüllt sein: die Zeit s/c , in der ein Schallsignal die Entfernung s zurücklegt, muss klein sein gegenüber der Zeit τ , in der sich die Strömung merklich ändert – dann lässt sich die Ausbreitung von Wechselwirkungen in der Flüssigkeit als momentaner Prozess beschreiben:

$$\frac{s}{c} \ll \tau . \quad (2.9.8)$$

Zur Herleitung gehe man aus von den Euler-Gleichungen (2.2.8) ohne Konvektionsterm,

$$|\partial_t \mathbf{v}| = \left| \frac{\nabla p}{\rho} \right| , \quad (2.9.9)$$

woraus man ableitet, dass

$$\frac{v}{\tau} \sim \frac{\Delta p}{s\rho} \quad (2.9.10)$$

$$\Rightarrow \Delta p \sim \frac{s}{\tau} \rho v . \quad (2.9.11)$$

Die zugehörige Änderung von ρ mit $\Delta\rho \sim \Delta p/c^2$ ist

$$\Delta\rho \sim \frac{s\rho v}{\tau c^2} . \quad (2.9.12)$$

Nun vergleiche man in der Kontinuitätsgleichung (2.1.10) $\partial_t \rho$ mit $\rho \nabla \cdot \mathbf{v}$; es zeigt sich, dass $\partial_t \rho$ vernachlässigbar ist, da $\rho \sim \text{const}$ für $\Delta \rho / \tau \ll \rho v / s$ oder $\Delta \rho / \rho \sim sv / (\tau c^2) \ll \tau v / s$. Dies ist der Fall für $\tau \gg s / c$.

Für $\rho \simeq \text{const}$ ändern die Euler'schen Gleichungen ihre Gestalt nicht; man kann jedoch ρ in den Gradienten ziehen:

$$\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla \frac{p}{\rho} + \mathbf{g} . \quad (2.9.13)$$

Die *Kontinuitätsgleichung* wird für $\rho = \text{const}$ zu

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 . \quad (2.9.14)$$

Da die Dichte bekannt (konstant) ist, wählt man als System von Grundgleichungen am besten solche, die nur Geschwindigkeiten enthalten, also die *isentropen Euler-Gleichungen* (2.2.21),

$$\partial_t (\nabla \times \mathbf{v}) = \nabla \times [\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v})] . \quad (2.9.15)$$

Da in den Euler-Gleichungen $\nabla (p/\rho)$ statt ∇w steht, lässt sich die Bernoulli-Gleichung angeben in der Form

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = \text{const} , \quad (2.9.16)$$

und die Energiestromdichte wird zu

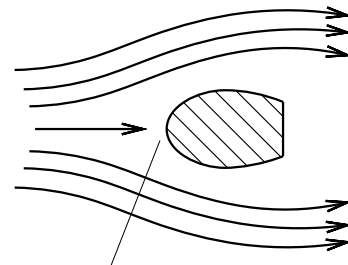
$$\rho \mathbf{v} \left(\frac{v^2}{2} + w \right) = \rho \mathbf{v} \left(\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} \right) . \quad (2.9.17)$$

Für die *Potenzialströmung* eines inkompressiblen Fluids werden die Gleichungen besonders einfach: Mit $\nabla \times \mathbf{v} = 0$ sind die Euler-Gleichungen (2.2.21) identisch erfüllt. Die Inkompressibilitätsgleichung $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ wird mit einer Potenzialgeschwindigkeit

$$\mathbf{v} = -\nabla \Phi \quad (2.9.18)$$

zur *Laplace-Gleichung* für das Geschwindigkeitspotenzial⁸ Φ ,

$$\Delta \Phi = 0 . \quad (2.9.19)$$



Staupunkt

Abbildung 2.20: Staupunkt in stationärer Strömung

⁸Auch diese Gleichung hatte Leonhard Euler als Erster eingeführt; sie enthält die Zeit nicht explizit, sondern nur über die Randbedingungen.

Die *Randbedingungen* am Kontaktflächenrand des Fluids sind

1. für eine feste Wand: $v_{\perp} = 0$;
2. für eine bewegliche Wand: $v_{\perp} = \text{Projektion der Wandgeschwindigkeit auf die Normalenrichtung}$;

und es ist

$$v_{\perp} = \partial_{e_{\perp}} \Phi \quad (2.9.20)$$

eine vorgegebene Funktion der Koordinaten und der Zeit, wobei $e_{\perp}$ die Normalenrichtung angibt. Die Randbedingungen hängen also nur von der Richtung des Geschwindigkeitsvektors ab.

Wegen der Bernoulli-Gleichung (2.3.10),

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} = \text{const} , \quad (2.9.21)$$

ist der *Druck* bei einer stationären Strömung eines inkompressiblen Fluids ohne Schwerfeld dort am größten, wo die Geschwindigkeit verschwindet. Dieser Punkt heißt *Staupunkt* (Abb. 2.20). Wir nennen $\mathbf{u}$ die Geschwindigkeit, p_0 den Druck des Fluids im Unendlichen. Dann folgt für den Druck im Staupunkt:

$$p_{\max} = p_0 + \rho \frac{u^2}{2} . \quad (2.9.22)$$

2.10 Stromfunktion

Bei *zweidimensionaler (ebener) Strömung* (d. h., $\mathbf{v}$ hängt nur von zwei Koordinaten ab) können die Geschwindigkeitskomponenten als Ableitung einer *Stromfunktion* $\psi(x, y)$ geschrieben werden:

$$v_x = -\partial_y \psi, \quad v_y = +\partial_x \psi , \quad (2.10.1)$$

so dass die Kontinuitätsgleichung automatisch erfüllt wird:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \partial_x v_x + \partial_y v_y = 0 . \quad (2.10.2)$$

Die Gleichung für die *Stromfunktion* ψ folgt durch Einsetzen in die Euler-Gleichungen für die Geschwindigkeit (2.2.21),

$$\partial_t (\nabla \times \mathbf{v}) = \nabla \times [\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v})] . \quad (2.10.3)$$

Die Rotation der Geschwindigkeit im Dreidimensionalen ist

$$\nabla \times \mathbf{v} = -\hat{\mathbf{e}}_x \partial_z v_y + \hat{\mathbf{e}}_y \partial_z v_x + \hat{\mathbf{e}}_z (\partial_x v_y - \partial_y v_x) . \quad (2.10.4)$$

Im Zweidimensionalen, d. h., ohne Veränderungen in z -Richtung, reduziert sie sich zu

$$\nabla \times \mathbf{v} = \hat{\mathbf{e}}_z \Delta \psi , \quad (2.10.5)$$

wobei der Laplace-Operator Δ definiert ist als

$$\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2 . \quad (2.10.6)$$

Für die Zeitableitung von $\Delta \psi$ gilt

$$\partial_t \Delta \psi = -(\partial_x \psi) \partial_y \Delta \psi + (\partial_y \psi) \partial_x \Delta \psi . \quad (2.10.7)$$

Aus der Stromfunktion lässt sich die Form der Stromlinien für eine stationäre Strömung unmittelbar bestimmen. Dazu stellt man die Differenzialgleichung für die Stromlinien bei ebener Strömung ($v_z = 0$) auf:

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} \quad (2.10.8)$$

$$\Rightarrow v_y dx - v_x dy = 0 , \quad (2.10.9)$$

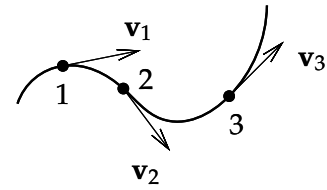


Abbildung 2.21: Tangenten an einer Stromlinie

d. h., die Richtung der Tangente an eine Stromlinie (Abb. 2.21) stimmt in jedem Punkt mit der Richtung der Stromlinie überein. Setzt man nun $v_x(\psi)$ und $v_y(\psi)$ ein, so erhält man

$$\partial_x \psi dx + \partial_y \psi dy = d\psi = 0 \quad (2.10.10)$$

$$\Rightarrow \psi = \text{const} , \quad (2.10.11)$$

d. h., die Stromlinien bilden eine Kurvenschar, die man erhält, wenn man die Stromfunktion $\psi(x, y)$ gleich einer beliebigen Konstanten setzt.

Mit $v_\perp$, der Projektion von $\mathbf{v}$ auf die Normale der Kurve in einem gegebenen Punkt, ist der Flüssigkeitsstrom

$$Q = \rho \int_1^2 v_\perp dl = \rho \int_1^2 (-v_y dx + v_x dy) \quad (2.10.12)$$

$$= \rho \int_1^2 d\psi . \quad (2.10.13)$$

In der x - y -Ebene ist der Flüssigkeitsstrom Q durch eine Kurve zwischen zwei Punkten also unabhängig von der Form der Kurve durch die Differenz der Werte der Stromfunktion in diesen Punkten bestimmt:

$$Q = \rho (\psi_2 - \psi_1) . \quad (2.10.14)$$

Die *Funktionentheorie* liefert leistungsfähige Methoden zur Berechnung der Potenzialströmung um verschiedenartige Profile. Die Grundlagen dieser Anwendungen sollen im Folgenden kurz erläutert werden:

Das *Potenzial* und die *Stromfunktion* hängen mit den Geschwindigkeitskomponenten zusammen über

$$v_x = -\partial_x \phi = -\partial_y \psi, \quad v_y = -\partial_y \phi = +\partial_x \psi , \quad (2.10.15)$$

woraus sich die Beziehungen zwischen den Ableitungen der Funktionen ϕ und ψ ergeben,

$$\partial_x \phi = \partial_y \psi, \quad \partial_y \phi = -\partial_x \psi . \quad (2.10.16)$$

die mit den *Cauchy-Riemann'schen Differenzialgleichungen* übereinstimmen. Sie sind Bedingung dafür, dass das *komplexe Potenzial*

$$w = \phi + i\psi , \quad (2.10.17)$$

das sich aus dem Geschwindigkeitspotenzial (im Realteil) und der Stromfunktion (im Imaginärteil) zusammensetzt, eine analytische Funktion des komplexen Arguments $z = x + iy$ ist, bzw. dass $w(z)$ in jedem Punkt z differenzierbar ist als

$$\frac{dw}{dz} = \partial_x \phi + i \partial_y \phi = v_x - i v_y \quad (2.10.18)$$

$$= \text{komplexe Geschwindigkeit} \quad (2.10.19)$$

mit dem *Betrag*

$$\left| \frac{dw}{dz} \right| = |\mathbf{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = v . \quad (2.10.20)$$

Das *Argument* der komplexen Geschwindigkeit $w' \equiv dw/dz$ ist der Winkel ϑ zwischen der Geschwindigkeit und der x -Richtung,

$$w' = \frac{dw}{dz} = v e^{-i\vartheta} . \quad (2.10.21)$$

An der Oberfläche einer umströmten festen Kontur muss die Geschwindigkeit tangential gerichtet sein. Die Kontur muss mit einer Stromlinie übereinstimmen (Abb. 2.22), und auf ihr muss $\psi = \text{const}$ sein; die Konstante kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit auf 0 gesetzt werden. Für eine vorgegebene Kontur wird das Strömungsproblem so auf die *Bestimmung einer analytischen Funktion* $w(z)$ zurückgeführt, die auf dieser Kontur reelle Werte annimmt.

Nach den Resultaten der Funktionentheorie ist das Integral über eine analytische Funktion längs eines (beliebigen) geschlossenen Weges C gleich der mit $2\pi i$ multiplizierten Summe der Residuen der einfachen Pole innerhalb von C :

$$\oint_C \frac{dw}{dz} dz = \oint_C w' dz = 2\pi i \sum_k A_k, \quad (2.10.22)$$

wobei A_k die Residuen der komplexen Geschwindigkeit w' angibt.

Andererseits gilt

$$\oint_C w' dz = \oint_C (v_x - iv_y) (dx + idy) \quad (2.10.23)$$

$$= \underbrace{\oint_C (v_x dx + v_y dy)}_{=: \Gamma} + i \oint_C (v_x dy - v_y dx). \quad (2.10.24)$$

Der *Realteil* ist die *Zirkulation* Γ längs der Kurve C . Der *Imaginärteil* ρ gibt den Flüssigkeitsstrom (2.10.14) durch die Kurve C an. Sind innerhalb der Kurve keine Flüssigkeitsquellen, so ist dieser Strom = 0. Also folgt

$$\Gamma = 2\pi i \sum_k A_k. \quad (2.10.25)$$

Alle Residuen A_k sind rein imaginär, so dass die Zirkulation Γ reelle Werte annimmt.

Die Theorie der *analytischen Funktionen einer komplexen Variable* entspricht demnach der zweidimensionalen Potenzialtheorie der Hydrodynamik.

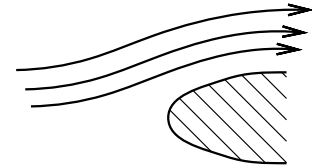


Abbildung 2.22: Stromlinien an Kontur

Beispiel: Eine inkompressible Flüssigkeit füllt den Raum; ein kugelförmiges Volumen mit Radius a wird entfernt. Nach welcher Zeit ist der Hohlraum mit Flüssigkeit gefüllt?

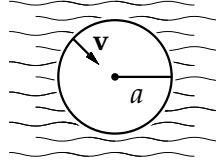


Abbildung 2.23: Hohlraum in inkompressibler Flüssigkeit

Die Strömung in den Hohlraum ist kugelsymmetrisch (Abb. 2.23). Für die *radiale Geschwindigkeit* gilt die Euler'sche Gleichung

$$\partial_t v + v \partial_r v = -\frac{1}{\rho} \partial_r p \quad (2.10.26)$$

mit $v_r \equiv v < 0$. Die Kontinuitätsgleichung für inkompressible Fluide ist

$$\partial_t \rho = 0 \quad (2.10.27)$$

$$\Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 v_r) = 0, \quad (2.10.28)$$

was bedeutet, dass $r^2 v \equiv F(t)$ eine beliebige Funktion der Zeit ist ($\partial_r v = 0$), d. h., das Flüssigkeitsvolumen, das durch eine Kugel mit beliebigem Radius fließt, hängt wegen seiner Inkompressibilität nicht vom Radius ab.

Wir schreiben mit der Kontinuitätsgleichung also $\partial_t v = F'(t)/r^2$ und setzen dies in die Euler-Gleichungen ein:

$$\frac{F'(t)}{r^2} + v \partial_r v = -\frac{1}{\rho} \partial_r p. \quad (2.10.29)$$

Integrieren wir dies über den Radius r von $R(t) \leq a$ bis ∞ , wobei a der Radius des Hohlraumes ist, so erhalten wir

$$-\frac{F'(t)}{R} + \frac{V^2}{2} = \frac{p_0}{\rho} \quad (2.10.30)$$

mit der Änderungsgeschwindigkeit des Hohlraum-Radius $V = dR(t)/dt$ und dem Druck p_0 bei $R \rightarrow \infty$. (Die Geschwindigkeit des Fluids bei $R \rightarrow \infty$ und der Druck auf die Oberfläche des Hohlraumes seien $= 0$.) Mit $r^2 v = F(t)$ für Punkte auf der Oberfläche des Hohlraumes gilt

$$R^2(t) V(t) = F(t), \quad (2.10.31)$$

dessen Ableitung wir schreiben als

$$F'(t) = 2R \underbrace{R'}_{=V} V + R^2 \frac{dV}{dt} = 2RV^2 + R^2 \frac{dV}{dt} \quad (2.10.32)$$

und in die Euler-Gleichungen einsetzen:

$$\frac{p_0}{\rho} = -\frac{2RV^2}{R} - R\frac{dV}{dt} + \frac{V^2}{2} \quad (2.10.33)$$

$$= -\frac{3}{2}V^2 - R\frac{dV}{dR} \underbrace{\frac{dR}{dt}}_{=V} \quad (2.10.34)$$

$$= -\frac{3}{2}V^2 - \frac{R}{2} \frac{dV^2}{dR} . \quad (2.10.35)$$

Wir separieren die Variablen,

$$V = \frac{dR}{dt} = \sqrt[+]{\frac{2p_0}{3\rho} \left(\frac{a^3}{R^3} - 1 \right)} \quad (2.10.36)$$

$$\Rightarrow dt = \frac{dR}{-\sqrt{\frac{2p_0}{3\rho} \left(\frac{a^3}{R^3} - 1 \right)}} , \quad (2.10.37)$$

und integrieren mit der Anfangsbedingung $V = 0$ für $R = a$. Dadurch erhalten wir die Zeit τ , in der der Hohlraum gefüllt wird:

$$\tau = \int_0^\tau dt = \sqrt{\frac{3\rho}{2p_0}} \int_0^\tau \frac{dR}{\sqrt{\left(\frac{a}{R}\right)^3 - 1}} \quad (2.10.38)$$

$$= \sqrt{\frac{3a^2\rho\pi}{2p_0}} \frac{\Gamma(5/6)}{\Gamma(1/3)} \approx 0.915a\sqrt{\frac{\rho}{p_0}} . \quad (2.10.39)$$

Für $a = 0.1 \text{ m}$, $p_0 = 1000 \text{ hPa} = 1 \times 10^5 \text{ Pa} = 1 \times 10^5 \frac{\text{kg}}{\text{ms}^2}$ und $\rho = 1 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} = \frac{1 \times 10^{-3} \text{ kg}}{1 \times 10^{-6} \text{ m}^3} = 1 \times 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ wird

$$\tau \approx 0.915 \times 10^{-2} \text{ s} \approx 9 \text{ ms} . \quad (2.10.40)$$

Man beachte, dass τ proportional zu a , $\sqrt{\rho}$ und zu $1/\sqrt{p_0}$ ist.

2.11 Wellen

Wasserwellen sind komplizierter als akustische oder optische Wellen: Als *Oberflächenwellen* sind sie an die Grenze zweier Medien gebunden; akustische und optische Wellen sind dagegen *Raumwellen*.

Wellen und *Wirbel* unterscheiden sich darin, dass Wirbel Materie mit sich forttragen, wohingegen bei Wellen alle Flüssigkeitsteilchen im Mittel an ihrem Ort bleiben – es pflanzt sich nicht Materie, sondern *Energie* und *Phase* fort.

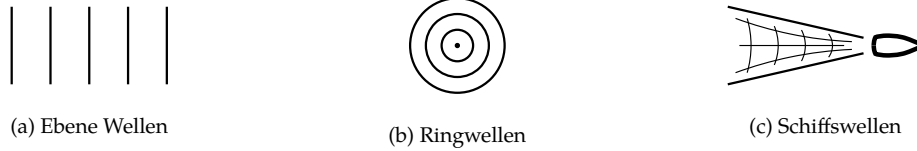


Abbildung 2.24: Verschiedene Wellenformen

Wellen können nach ihrer Symmetriefform eingeteilt werden (Abb. 2.24):

- *Ebene Wellen*, z. B. durch Windfront ausgelöst.
- Bei *Ringwellen* nimmt die Amplitude mit der Entfernung ab. Ihre mathematische Beschreibung ist kompliziert (sie erfordert Bessel-Funktionen und Fourier-Integrale).
- *Tiefseewellen* haben Dispersion:

$$v = \sqrt{\frac{g}{k}}, \quad (2.11.1)$$

wobei $v = v(k) = v(\lambda)$, $k = 2\pi/\lambda$.

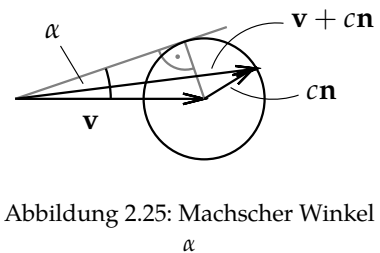
- *Schiffswellen* sind Längswellen, die sich an den Schiffskörper schmiegen; Querwellen durchsetzen sie. Das Gesamtsystem schreitet mit dem Schiff fort, ist also stationär.
- *Mach-Wellen* sind Stoßwellen bei Überschallströmungen mit $v > c$. Der *Mach'sche Winkel* α (Abb. 2.25) ist dabei gegeben durch

$$\sin \alpha = \frac{c}{v}. \quad (2.11.2)$$

Die Störung breitet sich in Strömungsrichtung innerhalb eines *Kegels* mit Öffnungswinkel 2α aus.

Zur Beschreibung *ebener Wasserwellen* (*Oberflächenwellen*) nehmen wir an, dass die Ausbreitung in x -Richtung erfolgt und die Welle in die Tiefenrichtung y weggedämpft wird. Also kann die Amplitude einer ebenen Welle beschrieben werden als

$$A(x, y, t) = A_0 e^{i(kx - \omega t)} e^{-ky}, \quad (2.11.3)$$

Abbildung 2.25: Machscher Winkel α

wobei $k = 2\pi/\lambda$ die Wellenzahl, $\omega = 2\pi/T$ die Kreisfrequenz, $v = \lambda/T = \omega/k$ die Fortpflanzungsgeschwindigkeit und A_0 die maximale Amplitude der Wasserwelle angibt. Es sind also *drei Parameter*, A , ω und k , zur Beschreibung der Wellenausbreitung erforderlich.

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit v ist die *Phasengeschwindigkeit* der Welle, d. h., die Phase φ , der Imaginärteil des Exponenten $e^{i\varphi}$, schreitet mit v fort. Dies sieht man, indem man den veränderlichen Teil der Phase, gegeben durch $\varphi = kx - \omega t$, konstant setzt und also den Ort gleicher Phase zu verschiedenen Zeiten betrachtet:

$$kdx - \omega dt = 0 \quad (2.11.4)$$

Damit folgt direkt die *Phasengeschwindigkeit*

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k} . \quad (2.11.5)$$

Für *monochromatische* Wellen (Wellen fester Frequenz) ist nur die Phasengeschwindigkeit von Bedeutung. Bei Überlagerung von Wellen verschiedener (vor allem benachbarter) Frequenzen zu einem Wellenpaket oder einer Wellengruppe ist dessen *Gruppengeschwindigkeit*⁹ u im Allgemeinen von v verschieden:

$$u = \frac{d\omega}{dk} . \quad (2.11.6)$$

Nur bei *dispersionsloser* Wellenausbreitung (wenn v unabhängig von λ und k ist) fallen Phasen- und Gruppengeschwindigkeit zusammen, und eine Wellengruppe kann ohne Formänderung fortschreiten:

$$\omega = vk \quad (2.11.7)$$

$$\Rightarrow d\omega = vdk \quad (2.11.8)$$

$$\Rightarrow \frac{d\omega}{dk} = v \equiv u . \quad (2.11.9)$$

Der allgemeine Zusammenhang zwischen Gruppen- und Phasengeschwindigkeit ist jedoch

$$d\omega = vdk + kdv \quad (2.11.10)$$

$$= vdk + k \frac{dv}{dk} dk \quad (2.11.11)$$

$$\Rightarrow u = v + k \frac{dv}{dk} , \quad (2.11.12)$$

da $u = d\omega/dk$. Außerdem ist $k = 2\pi/\lambda$ und also $dk/d\lambda = -2\pi/\lambda^2$, weshalb

$$\frac{dv}{dk} = \frac{dv}{d\lambda} \frac{d\lambda}{dk} = -\frac{dv}{d\lambda} \frac{\lambda^2}{2\pi} \quad (2.11.13)$$

$$\Rightarrow k \frac{dv}{dk} = -\lambda \frac{dv}{d\lambda} , \quad (2.11.14)$$

⁹Die Gruppengeschwindigkeit ist eine wichtige physikalische Größe in der *Wellenmechanik*: Nach de Broglie ist $\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mu}$ und also $u = \frac{h}{m\lambda}$.

was schließlich den allgemeinen Zusammenhang

$$u = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda} \quad (2.11.15)$$

ergibt. Der Differenzterm klassifiziert die Dispersion wie folgt:

- *keine* Dispersion: $\frac{dv}{d\lambda} = 0 \Rightarrow u = v$,
- *normale* Dispersion: $\frac{dv}{d\lambda} > 0 \Rightarrow u < v$ (Gruppen- < Phasengeschwindigkeit),
- *anomale* Dispersion: $\frac{dv}{d\lambda} < 0 \Rightarrow u > v$.

Man findet für *Schwerewellen* in *Tiefwasser*, $h \gg \lambda$, dass

$$v = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}, \quad (2.11.16)$$

wobei

$$\frac{dv}{d\lambda} = \frac{1}{2\lambda} v \quad (2.11.17)$$

und also *normale* Dispersion,

$$u = v - \frac{1}{2} v = \frac{1}{2} v < 0. \quad (2.11.18)$$

Im *flachen Wasser*, $h \ll \lambda$, findet man

$$v = \sqrt{gh} \quad (2.11.19)$$

also *keine* Dispersion.

Bei Schwerewellen wird die Ausbreitung am besten über die Euler'sche Gleichung mit Geschwindigkeitspotenzial beschrieben,

$$-\partial_t \Phi + \frac{v^2}{2} + \frac{1}{\rho} (\rho + U) = F(t) \quad (2.11.20)$$

mit $\mathbf{v} = -\nabla \Phi$ und einer beliebigen Zeitfunktion $F(t)$. Für kleine Amplituden wird das quadratische Glied vernachlässigt. An der freien Oberfläche herrscht Atmosphärendruck ($p \equiv 0$); die einzige Zeitfunktion, die periodisch fortschreitende Wellen nicht stört, ist aber

$$F(t) \equiv \text{const} \quad (2.11.21)$$

$$\equiv 1 \quad \text{ohne Beschränkung der Allgemeinheit} \quad (2.11.22)$$

$$\Rightarrow \partial_t \Phi = \frac{u}{\rho} = -\frac{\rho g y}{\rho} \quad (2.11.23)$$

$$= -g y. \quad (2.11.24)$$

Die Welle breitet sich aus wie das Geschwindigkeitspotenzial, woraus sich die Dispersion, der Zusammenhang zwischen v und λ ergibt.

Wird λ immer kleiner, ist nicht mehr die Schwere, sondern die Oberflächenspannung σ für die Wellenausbreitung maßgebend, so dass sich die Dispersionsverhältnisse komplett ändern. Die Oberfläche ist nicht mehr kräftefrei, sondern einem aus σ hervorgehenden Normaldruck ausgesetzt:

$$-\partial_t \Phi + \frac{p}{\rho} = 0. \quad (2.11.25)$$

Man findet für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit

$$v = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho} \cdot \frac{2\pi}{\lambda}}, \quad (2.11.26)$$

d. h., sie wächst mit abnehmendem λ , umgekehrt wie bei Schwerewellen in tiefem Wasser: dies ist *anomale Dispersion* und führt zu *ebenen Kapillarwellen* (Abb. 2.26).

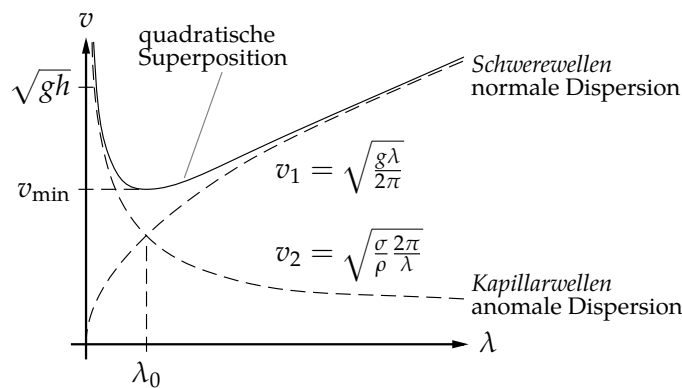


Abbildung 2.26: Dispersionsverhalten von Kapillar- und Schwerewellen

Die Dispersionskurven für Schwere- und Kapillarwellen schneiden sich bei $\lambda = \lambda_0$. Es gilt dabei

- für $\lambda < \lambda_0$: die vorwärtstreibende Kraft der Kapillarwellen hängt von der Krümmung des Oberflächenprofils ab;
- für $\lambda > \lambda_0$: die Kapillarität ist bei großen Wellenlängen unbedeutend.

Der Schnittpunkt errechnet sich durch das Gleichsetzen der beiden Dispersionsrelationen:

$$\underbrace{\sqrt{\frac{\sigma}{\rho}} \frac{2\pi}{\lambda_0}}_{\text{Kapillarwellen}} = \underbrace{\sqrt{\frac{g\lambda_0}{2\pi}}}_{\text{Schwerewellen}} \quad (2.11.27)$$

$$\Rightarrow \lambda_0^2 = \frac{\sigma (2\pi)^2}{\rho g} \quad (2.11.28)$$

$$\Rightarrow \lambda_0 = 2\pi \sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}}. \quad (2.11.29)$$

Bei quadratischer Superposition, $v^2 = v_1^2 + v_2^2$, finden wir das Minimum über

$$v_1 = v_2 \quad (2.11.30)$$

$$\Rightarrow v_{\min}^2 = 2v_1^2 = 2v_2^2 \quad (2.11.31)$$

$$\Rightarrow v_{\min} = \sqrt{2} \sqrt{\frac{\sigma g}{\rho}}. \quad (2.11.32)$$

Beispiel: Im Übergang von Wasser zu Luft ist $\rho = 1 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} = 1 \times 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, $g = 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Wenn man durch eine Stimmgabel Kapillarwellen anregt, ist $\sigma = 7.2 \times 10^{-3} \frac{\text{kg}}{\text{s}^2} = 7.2 \times 10^{-3} \frac{\text{N}}{\text{m}}$. Daraus bestimmen wir den Schnittpunkt

$$\lambda_0 = 2\pi \sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}} \approx 17.02 \times 10^{-3} \text{m} = 1.702 \text{ cm}, \quad (2.11.33)$$

$$v_{\min} = \sqrt{2} \sqrt{\frac{\sigma g}{\rho}} = \sqrt{2 \times 10^{-3} \sqrt{7.2 \cdot 9.81}} \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (2.11.34)$$

$$\approx 0.231 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 23.1 \frac{\text{cm}}{\text{s}} \quad (2.11.35)$$

$$\equiv \text{Fortpflanzungsgeschwindigkeit von Wellen mit } \lambda = \lambda_{\min}. \quad (2.11.36)$$

Dies bedeutet, dass Wellen sich auf Wasser nicht mit Geschwindigkeiten kleiner als $23 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$ fortpflanzen können. Wellen von größerer *und* kleinerer Wellenlänge als 1.7 cm laufen mit größerer Geschwindigkeit als $23 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$.

Lord Kelvin schlug für Wellen mit $\lambda < \lambda_0$ den Begriff Ripples vor. Manchmal sind die Flanken breiter Schwerewellen von feinen Ripples überdeckt.

Literaturverzeichnis

- [1] Euler, L.: Principes généraux du mouvement des fluides in Mémoires de l'Academie des Sciences de Berlin 11, 274 (1757)
- [2] Bernoulli, D.: Hydrodynamica sive de viribus et motibus fluidorum commentarii, Straßburg (1738)

3 Viskose Fluide

Bei Strömungen viskoser Fluide untersucht man die Auswirkungen von Prozessen *mit Energiedissipation* auf die Strömung. Aufgrund der inneren Reibung (= Viskosität) und der Wärmeleitfähigkeit wird die Strömung thermodynamisch *irreversibel*.

3.1 Navier-Stokes-Gleichungen

Bei viskosen Fluiden bleibt die Kontinuitätsgleichung (2.1.10) unverändert,

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 . \quad (3.1.1)$$

In den Euler'schen Gleichungen (2.2.8) müssen jedoch zusätzliche Terme eingeführt werden, die der Energiedissipation Rechnung tragen:

- η , der Viskositätskoeffizient; $\eta > 0$,
- ζ , der Zähigkeitskoeffizient; $\zeta > 0$.

Bei isotropen Fluiden genügen diese beiden skalaren Größen; bei anisotropen Fluiden werden die Koeffizienten zu Tensoren.

Die Koeffizienten η und ζ sind im Allgemeinen Funktionen von *Druck* p und *Temperatur* T , die nicht im ganzen Fluid gleich sein müssen. Meist können η und ζ jedoch näherungsweise konstant gesetzt werden. Die Bewegungsgleichungen¹ werden dann zu den *Navier-Stokes-Gleichungen* [1, 2]

$$\underbrace{\rho [\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}]}_{\text{Euler'scher Anteil}} = -\nabla p + \eta \Delta \mathbf{v} + \left(\zeta + \frac{\eta}{3} \right) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) . \quad (3.1.2)$$

Für inkompressible Fluide verschwindet der letzte Summand; einerseits, weil die Zähigkeit ζ für kompressible Fluide verschwindet, andererseits, weil $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$. Im Falle zäher, aber inkompressibler Fluide reduziert sich (3.1.2) zu

$$\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \frac{\eta}{\rho} \Delta \mathbf{v} . \quad (3.1.3)$$

¹Die Gleichungen wurden von Claude-Louis Navier (*1785 Dijon, †1836 Paris) im Jahr 1822 aufgestellt und von George Gabriel Stokes (*1819 Skreen, County Sligo, †1903 Cambridge) im Jahr 1845 hergeleitet.

Im Vergleich zu den Euler-Gleichungen gibt es also den *Zusatzterm*

$$\frac{\eta}{\rho} \Delta \mathbf{v} \quad (3.1.4)$$

mit der *dynamischen Viskosität* η : $[\eta] = \frac{\text{kg}}{\text{m s}} = \text{Pa s}$. Das Verhältnis

$$\nu = \frac{\eta}{\rho} \quad (3.1.5)$$

mit $[\nu] = \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$ heißt *kinematische Viskosität*. Werte für verschiedene Substanzen bei Normaldruck finden sich in Tab. 3.1.

Tabelle 3.1: Typische Werte für die dynamische und die kinematische Viskosität η und ν

	η [Pa · s]	ν [$1 \times 10^{-5} \text{m}^2/\text{s}$]
Luft	1.8×10^{-5}	1.50
Wasser	0.001	0.10
Quecksilber	0.001 56	0.012
Alkohol	0.0018	0.22
Glycerin	0.85	68

Bei fester Temperatur hängt die dynamische Zähigkeit η von Gasen *nicht* vom Druck ab. Da $pV = \text{const}$, folgt für die kinematische Zähigkeit

$$\nu \propto V \propto \frac{1}{p} . \quad (3.1.6)$$

Wie bei den Euler-Gleichungen lässt sich der Druck aus den Navier-Stokes-Gleichungen eliminieren, indem man die Rotation der Gleichung bildet und die Identitäten (2.2.19) und (2.2.20) verwendet:

$$\partial_t (\nabla \times \mathbf{v}) = \nabla \times (\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v})) + \underbrace{\nu \Delta (\nabla \times \mathbf{v})}_{=0 \text{ in der Euler-Gleichung}} . \quad (3.1.7)$$

Mit $\mathbf{b} = \nabla \times \mathbf{v}$ ist [3]

$$\nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{b}) = (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{b} + \mathbf{v} (\nabla \cdot \mathbf{b}) - \mathbf{b} (\nabla \cdot \mathbf{v}) , \quad (3.1.8)$$

wobei

$$(\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{v} = [(\nabla \times \mathbf{v}) \cdot \nabla] \mathbf{v} , \quad (3.1.9)$$

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{b} = (-\mathbf{v} \cdot \nabla) (\nabla \times \mathbf{v}) , \quad (3.1.10)$$

$$\mathbf{v} (\nabla \cdot \mathbf{b}) = 0 \quad \text{wegen } \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) = 0 , \quad (3.1.11)$$

$$\mathbf{b} (\nabla \cdot \mathbf{v}) = 0 \quad \text{wegen } \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 . \quad (3.1.12)$$

Also lauten die *Navier-Stokes-Gleichungen für das Geschwindigkeitsfeld* mit der kinematischen Zähigkeit $\nu = \eta/\rho$

$$\partial_t (\nabla \times \mathbf{v}) + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \nabla \times \mathbf{v} - [(\nabla \times \mathbf{v}) \cdot \nabla] \mathbf{v} = \nu \Delta (\nabla \times \mathbf{v}) . \quad (3.1.13)$$

Aus einer bekannten *Geschwindigkeitsverteilung* findet man die entsprechende *Druckverteilung*, indem man eine Gleichung vom Poisson'schen Typ löst, die durch die Bildung der *Divergenz* aus den ursprünglichen Navier-Stokes-Gleichungen folgt (dabei ist stets ein inkompressibles Fluid mit $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ vorausgesetzt):

$$\Delta p = -\rho (\partial_k v_i) (\partial_i v_k) = -\rho \partial_k \partial_i (v_i v_k) . \quad (3.1.14)$$

Wie im viskositätsfreien Fall der Euler-Gleichungen lässt sich die Geschwindigkeitsverteilung auch durch eine Stromfunktion $\psi(x, y)$ ausdrücken,

$$v_x = -\partial_y \psi, \quad v_y = +\partial_x \psi , \quad (3.1.15)$$

so dass die Kontinuitätsgleichung automatisch erfüllt ist,

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \partial_x v_x + \partial_y v_y = 0 ; \quad \partial_z v_z = 0 . \quad (3.1.16)$$

Einsetzen in die Navier-Stokes-Gleichung ergibt

$$\partial_t \Delta \psi - (\partial_x \psi) (\partial_y \Delta \psi) + (\partial_y \psi) (\partial_x \Delta \psi) - \nu \Delta \Delta \psi = 0 . \quad (3.1.17)$$

Dazu kommen die *Randbedingungen*: Zwischen der Oberfläche eines festen Körpers und dem zähen Fluid gibt es *molekulare Anziehungskräfte*. Sie halten die innerste Fluidschicht an der Wand fest, so dass die Geschwindigkeit direkt an der Wand (an festen Oberflächen) verschwindet: $\mathbf{v} = 0$ an festen Oberflächen, d. h., *normale* ($v_\perp = 0$) und *tangentiale* ($v_\parallel = 0$) Komponenten müssen verschwinden²; bei idealen Fluiden war nur $v_\perp = 0$ gefordert.

Bei einer *bewegten* Oberfläche muss $\mathbf{v}$ gleich der Geschwindigkeit dieser Oberfläche sein.

3.2 Energiedissipation in einem inkompressiblen viskosen Fluid

Aus *Viskosität* ergibt sich *Energiedissipation*, d. h. Umwandlung von *Energie* in *Wärme*. Dabei wird jedoch die detaillierte molekulare Struktur des Fluids *nicht* berücksichtigt.

²Die Euler-Gleichungen könnten eine Randbedingung $v_\perp = v_\parallel = 0$ gar nicht erfüllen, weil die räumlichen Ableitungen dort von *erster* Ordnung sind. In den Navier-Stokes-Gleichungen sind sie wegen des Viskositätsterms von *zweiter* Ordnung.

Zur Berechnung der *dissipierten Energie* in einer inkompressiblen Flüssigkeit gehe man aus von der gesamten kinetischen Energie und bestimme die Zeitableitung:

$$E_k = \frac{\rho}{2} \int v^2 dV ; \quad (3.2.1)$$

$$\Rightarrow \partial_t E_k = \int \partial_t \frac{\rho v^2}{2} dV = \int \rho v_i \partial_t v_i dV . \quad (3.2.2)$$

Die partiellen Zeitableitungen der Geschwindigkeitsgleichungen werden nun anhand der Navier-Stokes-Gleichung substituiert:

$$\partial_t v_i = -v_k \partial_k v_i - \frac{1}{\rho} \partial_i p + \underbrace{\frac{1}{\rho} \partial_k \sigma'_{ik}}_{=\frac{\eta}{\rho} \Delta v} \quad (3.2.3)$$

mit dem *Reibungstensor*

$$\sigma'_{ik} = \eta [\partial_k v_i + \partial_i v_k] \quad \text{bei inkompressiblen Fluiden.} \quad (3.2.4)$$

Dies ist der Teil des Impulsstromes, der *nicht* mit dem unmittelbaren Transport des Impulses gemeinsam mit der Masse des bewegten Fluids zusammenhängt.

Nach einigen weiteren Umformungsschritten findet man die totale zeitliche Veränderung der Energie als

$$\frac{d}{dt} E_k = -\frac{\eta}{2} \sum_{i=1}^3 \int_V [\partial_k v_i + \partial_i v_k]^2 dV , \quad k = 1, 2, 3 . \quad (3.2.5)$$

Dies ist die *Energiedissipation* in einem inkompressiblen Fluid; sie bewirkt eine Abnahme der mechanischen Energie:

$$\frac{d}{dt} E_k < 0 . \quad (3.2.6)$$

Das Integral ist wegen des quadratischen Integranden stets positiv; demnach muss der Viskositätskoeffizient $\eta > 0$ sein;

$$\frac{d}{dt} E_k \propto -\eta . \quad (3.2.7)$$

3.3 Hagen-Poiseuille'sches Gesetz

Als *Poiseuille-Strömung* wird die stationäre Strömung einer inkompressiblen, zähen Flüssigkeit durch ein Rohr bezeichnet. Dabei gilt

$$\frac{\Delta \rho}{\rho} \ll 1, \quad \rho \approx \text{const}, \quad \partial_t \rho = 0. \quad (3.3.1)$$

Als Durchflussmenge Q bezeichnet man die Größe

$$Q = 2\pi\rho \int_0^R r v dr, \quad (3.3.2)$$

deren anschauliche Bedeutung in Abb. 3.1 skizziert wird. *Voraussetzung* für diese Schreibweise ist, dass keine Querschnittsänderung stattfindet, die Strömung also stationär ist: $\mathbf{v}$ hängt also nur von x und y ab, ist jedoch proportional zur z -Achse,

$$\mathbf{v} = v \hat{\mathbf{e}}_z. \quad (3.3.3)$$

Die Kontinuitätsgleichung ist also identisch erfüllt:

$$\partial_x v_x + \partial_y v_y = 0. \quad (3.3.4)$$

Da die Strömung stationär ist, gilt

$$\partial_t \mathbf{v} = 0, \quad (3.3.5)$$

und weil $\mathbf{v} \cdot \nabla = v \partial_z$, verschwindet auch der konvektive Term, so dass

$$\frac{d}{dt} \mathbf{v} = \partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = 0 \quad (3.3.6)$$

ist, wodurch die Navier-Stokes-Gleichungen sich vereinfachen zu

$$\rho [\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}] = 0 = -\nabla p + \eta \Delta \mathbf{v}. \quad (3.3.7)$$

Mit (3.3.3) ergibt sich also

$$\Rightarrow \nabla p = \eta \Delta \mathbf{v} \quad (3.3.8)$$

$$= \eta \Delta v \hat{\mathbf{e}}_z, \quad (3.3.9)$$

was impliziert, dass der Druck nur von der z -Koordinate abhängen kann, $p = p(z)$. Da die linke Seite der Gleichung eine Funktion von z ist, die rechte aber nur eine Funktion von x und y ,

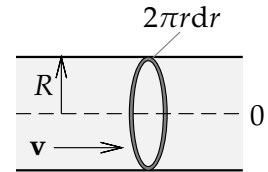


Abbildung 3.1:
Differenzielle
Durchflussmenge

können beide Seiten einer Konstanten gleichgesetzt werden,

$$\Delta v = \frac{1}{\eta} \frac{dp}{dz} = \text{const} \quad (3.3.10)$$

$$\equiv -\frac{1}{\eta} \frac{\delta p}{l} \quad (3.3.11)$$

mit der Druckdifferenz an den Rohrenden δp (das negative Vorzeichen bedeutet abfallenden Druck) und der Rohrlänge $l \equiv \delta z$.

Die Geschwindigkeitsverteilung im Flüssigkeitsstrom wird also durch eine zweidimensionale Gleichung vom Typ

$$\Delta \mathbf{v} = \text{const} \quad (3.3.12)$$

bestimmt. In Polarkoordinaten gilt

$$|\mathbf{v}(\mathbf{r})| = v(r) \quad (3.3.13)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv}{dr} \right) = -\frac{\delta p}{\eta l} . \quad (3.3.14)$$

Durch Integration (Aufgabe 11.6) erhält man

$$v(r) = -\frac{\delta p}{4\eta l} r^2 + a \ln(r/R) + b . \quad (3.3.15)$$

Die Geschwindigkeit muss über das ganze Rohr inklusive der Mittelachse ($r = 0$) endlich bleiben; daher muss $a = 0$ sein. Die Konstante b lässt sich aus der *Randbedingung* $\mathbf{v}|_{\partial V} = 0$ bestimmen: es ist

$$v(r) = 0 \quad (3.3.16)$$

für $r = \pm R$, also am Rand einer viskosen Flüssigkeit. Damit folgt, dass

$$v = -\frac{\delta p}{4\eta l} R^2 + b \quad (3.3.17)$$

$$\Rightarrow b = \frac{\delta p}{4\eta l} R^2 \quad (3.3.18)$$

$$\Rightarrow v(r) = \frac{\delta p}{4\eta l} (R^2 - r^2) . \quad (3.3.19)$$

Dies ist ein parabolisches Geschwindigkeitsprofil über den Radius des Rohres (s. Abb. 3.2).

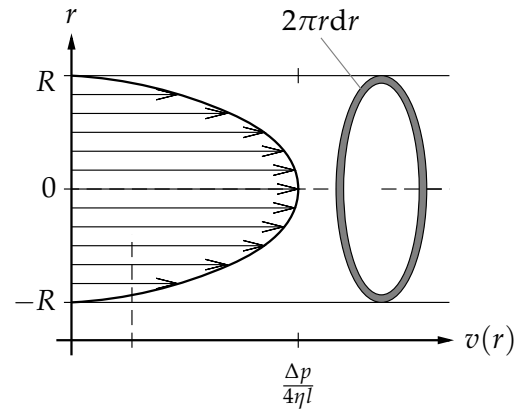


Abbildung 3.2: Geschwindigkeitsprofil der Poiseuille-Strömung

Die *Durchflussmenge* ist nun eine Funktion von R : durch den Kreisring $2\pi r dr$ tritt pro Sekunde die Flüssigkeitsmenge $\rho v 2\pi r dr$. Die Integration über alle Kreisringe ergibt die Durchflussmenge Q :

$$Q = 2\pi\rho \int_0^R r v dr . \quad (3.3.20)$$

Setzt man das Geschwindigkeitsprofil ein, so ergibt sich

$$Q = \frac{2\pi\rho\delta p}{4\eta l} \int_0^R r (R^2 - r^2) dr \quad (3.3.21)$$

$$= \frac{\pi\rho\delta p}{2\eta l} \left(\frac{1}{2} R^2 R^2 - \left[\frac{1}{4} r^4 \right]_0^R \right) \quad \text{mit } \eta = \nu\rho \quad (3.3.22)$$

$$= \frac{\pi\delta p}{8\nu l} R^4 \quad (3.3.23)$$

unabhängig von der Dichte ρ des Fluid, bzw.

$$Q = \frac{\pi\delta p\rho}{8\eta l} R^4 \quad (3.3.24)$$

mit der dynamischen Viskosität η . Dies ist das *Hagen-Poiseuille'sche Gesetz*.³

3.4 Reynolds'sche Zahl; Turbulenzkriterium

Zwar sind die Navier-Stokes-Gleichungen,

$$\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \frac{\nabla p}{\rho} + \frac{\eta}{\rho} \Delta \mathbf{v} \quad (3.4.1)$$

und die Kontinuitätsgleichung

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad \text{bei kompressiblen Fluiden,} \quad (3.4.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad \text{bei inkompressiblen Fluiden} \quad (3.4.3)$$

grundlegend für die Darstellung aller Flüssigkeitserscheinungen. Jedoch ist die Frage der *Stabilität einer Strömung*, d. h. das Umschlagen von *laminarer* in *turbulente* (chaotische) Strömung, auf dieser Grundlage noch nicht vollständig beschrieben.

³Das Gesetz haben Gotthilf H. L. Hagen (*1797 Königsberg, †1884 Berlin) und Jean L. M. Poiseuille (*1797 Paris, †1869 Paris) in den Jahren 1839 bzw. 1840 empirisch gefunden ($Q \propto R^4$). Die hier dargestellte Herleitung hat 1845 George G. Stokes gegeben.

Ein wichtiges Stabilitätskriterium liefert die *Reynolds'sche Zahl* R_e . Sie ist ein Mass für die Stärke der *Konvektion* relativ zur *Viskosität*; das Umschlagen von *laminarer* in *turbulente* Strömung wird durch einen kritischen Wert der Reynolds'schen Zahl gekennzeichnet. Sie hat z. B. bei Rohrströmungen (Pouiseuille-Strömungen; s. Abschn. 3.2) einen bestimmten Wert, der *nicht* vom Durchmesser des Rohres abhängt.

Der englische Physiker Osborne Reynolds untersuchte im 19. Jahrhundert Strömungen verschiedener Geschwindigkeiten durch Glasröhren verschiedenen Durchmessers. Er beobachtete insbesondere die Bedingungen für das Umschlagen von *laminarer* in *turbulente* Strömung (Abb. 3.3):

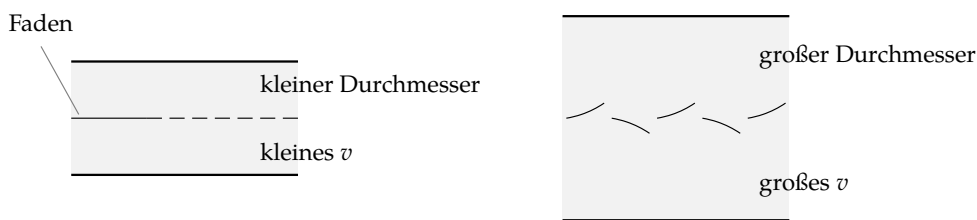


Abbildung 3.3: Faden in laminarer und turbulenter Strömung

Bei regelmäßig geschichteter, *laminarer* Strömung (wie bei Hagen-Poiseuille) bewegt sich ein farbiger Faden parallel zur Röhrenachse. Unregelmäßige Schlangelbewegungen und Seitenbewegungen des Fadens, welche die ganze Röhre ausfüllen, sind dagegen Anzeichen für *turbulente Strömung*.

Reynolds betrachtete diese Ergebnisse unter dem Gesichtspunkt eines *Ähnlichkeitsgesetzes*, also als Vergleich zweier Anordnungen, die sich nur in den Maßeinheiten (*Skalen*) unterscheiden; hier: zwei Röhren mit unterschiedlichen Radien R_1 , R_2 . Wie ändern sich nun die Navier-Stokes-Gleichungen beim Übergang von System ① zu System ② (Abb. 3.4)?

Ist α die Skala für die Änderung aller *Längeneinheiten*, so gilt

$$R_2 = \alpha R_1, \quad x_2 = \alpha x_1, \quad y_2 = \alpha y_1, \quad z_2 = \alpha z_1 \quad (3.4.4)$$

für zwei korrespondierende Punkte in den Röhren. Für die mittleren *Geschwindigkeiten* in den Punkten ① und ② gilt:

$$v_2 = \beta v_1. \quad (3.4.5)$$

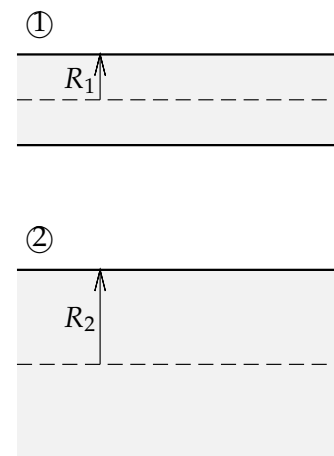


Abbildung 3.4: Strömung in zwei verschiedenen Skalen

Wegen $[v] = \text{m/s}$ legt α/β die Änderung der Zeiteinheit fest:

$$t_2 = \frac{\alpha}{\beta} t_1. \quad (3.4.6)$$

Die Röhren können mit Fluiden verschiedener *Dichte* und *Viskosität* gefüllt sein:

$$\rho_2 = \gamma \rho_1. \quad (3.4.7)$$

Wegen $[\rho] = \text{kg/m}^3$ legt $\gamma^3 \alpha$ die Änderung der Masseneinheit fest,

$$m_2 = \gamma \alpha^3 m_1. \quad (3.4.8)$$

Mit der *kinematischen Zähigkeit* $\nu = \eta/\rho$,

$$\nu_2 = \delta \nu_1, \quad (3.4.9)$$

sowie den *Drücken* in korrespondierenden Querschnitten,

$$p_2 = \epsilon p_1 \quad (\epsilon \text{ lässt sich auch durch } \alpha, \beta, \gamma \text{ ausdrücken}), \quad (3.4.10)$$

transformieren die Navier-Stokes-Gleichungen

$$\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \frac{\nabla p}{\rho} + \frac{\eta}{\rho} \Delta \mathbf{v} \quad (3.4.11)$$

beim Übergang ① $\rightarrow$ ② folgendermaßen:

- 1) Der Beschleunigungsterm ändert sich beim Übergang wegen $R_2 = \alpha R_1$, $v_2 = \beta v_1$ um β^2/α .
- 2) Der Zähigkeitsterm ändert sich wegen $\nu_2 = \beta v_1$, $\nu_2 = \delta \nu_1$ um $\delta \beta/\alpha^2$.
- 3) Der Druckterm wird durch $R_2 = \alpha R_1$, $\rho_2 = \gamma \rho_1$, $p_2 = \epsilon p_1$ geändert um $\epsilon/(\gamma \alpha)$.

Sollen die Navier-Stokes-Gleichungen für beide Anordnungen ① und ② erfüllt sein, so muss das Verhältnis dieser drei Faktoren = 1 sein:

$$\frac{\beta^2}{\alpha} : \delta \frac{\beta}{\alpha^2} : \frac{1}{\gamma} \frac{\epsilon}{\alpha} = 1 : 1 : 1 \quad (3.4.12)$$

$$\Rightarrow \frac{\beta \alpha}{\gamma} = 1 \quad \text{und} \quad \frac{\epsilon}{\gamma \beta^2} = 1. \quad (3.4.13)$$

Daraus folgen die Verhältnisgleichungen

$$\frac{v_1 R_1}{\nu_1} = \frac{v_2 R_2}{\nu_2} \quad (3.4.14)$$

und

$$\frac{p_1}{\rho_1 v_1^2} = \frac{p_2}{\rho_2 v_2^2}, \quad (3.4.15)$$

die das Ergebnis der Reynolds'schen Ähnlichkeitstheorie⁴ sind. In der Literatur wird meist nur Gleichung (3.4.14) als *Reynolds'sches Kriterium* bezeichnet, obwohl auch Gleichung (3.4.15) für ein hinreichendes Kriterium erforderlich ist.

Aus der Verhältnisbetrachtung folgt: Ist ① laminar, so auch ②; ist ① turbulent, so auch ②. Die dadurch definierte dimensionslose Zahl ist die *Reynolds'sche Zahl*

$$Re = \frac{vR}{\nu} \equiv \frac{\rho v R}{\eta} = \frac{\text{Konvektion}}{\text{Viskosität}} \quad (3.4.16)$$

$$\sim \frac{\rho (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}}{\eta \Delta \mathbf{v}}, \quad (3.4.17)$$

wobei R – je nach Versuchsanordnung – eine räumliche Abmessung ist (nicht notwendigerweise ein Radius).

Die durch die zweite Bedingung definierte Zahl ist

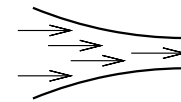
$$s = \frac{p}{\rho v^2}. \quad (3.4.18)$$

Das Umschlagen von *laminarer* in *turbulente* Strömung ist ein für beide Röhren ① und ② *ähnlicher* Vorgang, der durch denselben Zahlenwert von Re gekennzeichnet wird, die *kritische Reynolds'sche Zahl* ($R \rightarrow l$):

$$Re_{\text{krit}} = \left(\frac{\rho v l}{\eta} \right)_{\text{krit}}. \quad (3.4.19)$$

Für jeden Strömungstyp gibt es ein eigenes Re_{krit} , es ist keine universelle Größe.

Der Wert von Re hängt auch von der Art des Zuflusses zum Rohr ab (Abb. 3.5). Bei *trompetenförmigem Einlauf* ist die Strömung anfangs *laminar* und bleibt es bei großem Re . Bei scharfem Einlauf ist die Anfangsströmung durch Seitenkomponenten gestört, und der Umschlag zur *Turbulenz* findet bei relativ niedrigem Re statt. Im Glasrohr:



$$Re_{\text{krit}} \approx 1200, \text{ unregelmäßiger Einlauf,} \quad (3.4.20)$$

$$Re_{\text{krit}} \approx 20\,000, \text{ gut abgerundeter Einlauf.} \quad (3.4.21)$$

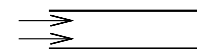


Abbildung 3.5:
Trompetenförmiger
und scharfer
Einlauf

Die kritische Reynolds-Zahl ist also nur bei Strömungen mit ähnlichen Anfangsbedingungen konstant.

⁴Entwickelt von Osbourne Reynolds (*1842 Belfast, †1912 Watchet) im Jahr 1883.

Wie kommt nun der Umschlag von laminarer zu turbulenter Strömung zustande? Bisher scheint die Hagen-Poiseuille-Strömung stets eine mögliche Strömungsform zu sein – aber für $Re > Re_{krit}$ ist sie nicht mehr stabil.

- Die *Viskosität* wirkt auf die Beruhigung von Seitenbewegungen hin und begünstigt *laminares* Verhalten.
- Die *Trägheit* verlangt die Erhaltung der Seitenkomponenten, wirkt also zugunsten der Turbulenz.

Dies zeigt sich in $\nu = \eta/\rho$: größeres η erfordert größeres νl , um dieselbe Reynolds-Zahl zu erreichen, was für eine *laminare* Strömung spricht. Vergrößert sich ρ , so müsste νl zum Ausgleich kleiner werden; dadurch werden *turbulente* Strömungen begünstigt.

Die *Stabilität* der laminaren Strömung lässt sich steigern, indem man Seitenbewegungen beim Einlauf durch Abrundung verhindert.

3.5 Strömungen mit kleinem Re : Stokes'sche Formel

Für $Re \ll 1$ vereinfachen sich die Navier-Stokes-Gleichungen stark. Bei stationärer Strömung einer inkompressiblen Flüssigkeit gilt

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{\eta}{\rho} \Delta \mathbf{v} . \quad (3.5.1)$$

Die Reynolds-Zahl gibt im Wesentlichen das Verhältnis von konvektivem und dissipativem Anteil an:

$$\frac{\rho (\mathbf{v} \cdot \nabla)}{\eta \Delta \mathbf{v}} \propto Re , \quad (3.5.2)$$

so dass für $Re \ll 1$ der konvektive Anteil vernachlässigbar ist und die Bewegungsgleichung linear wird (daraus hatten wir die Poiseuille-Strömung berechnet),

$$\eta \Delta \mathbf{v} - \nabla p = 0 , \quad (3.5.3)$$

und mit der Kontinuitätsgleichung die Strömung vollständig bestimmt ist, $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$.

Durch Bildung der Rotation folgt

$$\Delta (\nabla \times \mathbf{v}) = 0 . \quad (3.5.4)$$

Daraus leitete George Gabriel Stokes 1851 seine Formel für die Widerstandskraft auf eine bewegte Kugel mit Radius R in einer viskosen Flüssigkeit ab. (Die Ableitung wird hier jedoch ausgelassen.)

Die *Stokes'sche Formel* für die Widerstandskraft auf eine langsam im Fluid bewegte Kugel (Strömungswiderstand) lautet

$$\mathbf{F} = -6\pi R\eta \mathbf{u}, \quad (3.5.5)$$

wobei $\mathbf{u}$ die Geschwindigkeit der Kugel angibt und $F \propto R, \eta, u$ sowie $\mathbf{F} \parallel \mathbf{u}$ (Abb. 3.6). Für Körper anderer Form stimmt die *Richtung* der Widerstandskraft im Allgemeinen *nicht* mit derjenigen der Geschwindigkeit überein; der Widerstand hängt aber auch von u und den Abmessungen ab.

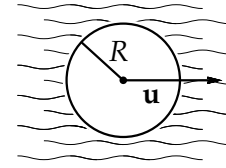


Abbildung 3.6: Im Fluid bewegte Kugel

Die *Stokes'sche Lösung* des Strömungsproblems ist *äquivalent* zur Umströmung einer festen Kugel in einem Flüssigkeitsstrom, der im Unendlichen die Geschwindigkeit $\mathbf{u}$ hat; das $\mathbf{v}$ -Feld in der Nähe der Kugel erlaubt dann die Stokes'sche Lösung (Abb. 3.7).

Für genügend große Entfernungen von der Kugel ist die Stokes'sche Lösung jedoch *nicht* anwendbar trotz $Re \ll 1$. Dort wird $\mathbf{v} \approx \mathbf{u}$; das Konvektionsglied $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$ muss berücksichtigt werden. Eine Näherungslösung gelang C. W. Oseen⁵: die *Oseen'sche Gleichung* als Verbesserung der Stokes'schen Formel für große Entfernungen von der Kugel $r \gg R$, indem er das Konvektionsglied in der Form $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \rightarrow (\mathbf{u} \cdot \nabla)$ linearisierte, so dass

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{v}. \quad (3.5.6)$$

Mit der erhaltenen Geschwindigkeitsverteilung $\mathbf{v}(\mathbf{u})$ folgt eine genauere Formel für den Strömungswiderstand (gegen $\mathbf{u}$). Als nächstes Glied der Entwicklung des Widerstandes nach der Reynolds-Zahl $Re = ul/\nu$ erhält man [4]

$$\mathbf{F} = -6\pi\eta\mathbf{u}R \left(1 + \frac{3Re}{8}\right) \quad (3.5.7)$$

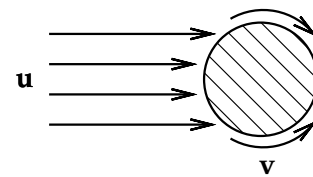


Abbildung 3.7: Umströmung einer festen Kugel

Für kleine Entfernungen $l \sim R$ ergibt dies nur eine sehr geringfügige Verbesserung der Stokes'schen Formel, aber für $l \gg R$ wird der Unterschied merklich.

3.6 Laminarer Nachlauf

Die Strömung einer zähen Flüssigkeit um einen festen Körper wird in großen Entfernungen hinter dem Körper unabhängig von seiner Gestalt.

⁵Carl Wilhelm Oseen (*1879 Lund, †1944 Uppsala) war Direktor des Nobel-Instituts in Stockholm. Er fand die nach ihm benannte Gleichung im Jahr 1910.

Für große Entfernungen hinter dem Körper ist $\mathbf{v}$ nur im schmalen Band des *laminaren Nachlaufs* von 0 verschieden (Abb. 3.8). Außer im Nachlauf kann die Strömung überall als Potenzialströmung angesehen werden, $\nabla \times \mathbf{u} = 0$ (wie bei einer idealen Flüssigkeit), da der Einfluss von η auf Stromlinien, die in genügend großer Entfernung am Körper vorbeigehen, unbedeutend ist: die Viskosität η wirkt nur am *umströmten Körper* und *im Nachlauf*.

Es stellt sich die Frage, wie die Strömung im Nachlauf mit den Kräften auf den umströmten Körper zusammenhängt. Dazu verwenden wir die Navier-Stokes-Gleichungen für stationäre Strömungen in Oseen'scher Näherung (3.5.6),

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{v}. \quad (3.6.1)$$

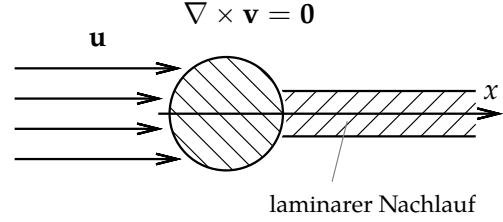


Abbildung 3.8: Laminarer Nachlauf in einer Potenzialströmung

Die Lösung *im Nachlauf* ergibt in Kugelkoordinaten in genügend großer Entfernung $r \gg R$ vom Körper (Abb. 3.9)

$$v_r(\vartheta) = -\frac{F_r}{4\pi\rho\nu r} \exp\left[-\frac{ur\vartheta^2}{4\nu}\right]. \quad (3.6.2)$$

Das Ergebnis ist *negativ*, denn die Strömung ist im Nachlauf langsamer als in Abwesenheit des Körpers (die wahre Strömungsgeschwindigkeit ist $\mathbf{u} + \mathbf{v}$).

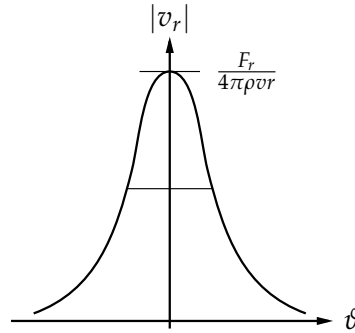


Abbildung 3.9: Geschwindigkeitsprofil im laminaren Nachlauf

Außerhalb des Nachlaufs ist die Strömung eine reine *Potenzialströmung*; das Potenzial Φ ergibt sich durch Lösen der Laplace-Gleichung

$$\Delta\Phi = 0, \quad \mathbf{v} = \nabla\Phi \quad (3.6.3)$$

für das Geschwindigkeitspotenzial,

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\rho ur} \left[-F_x + F_y \cos \varphi \cot \frac{\vartheta}{2} \right], \quad (3.6.4)$$

d. h., $\Phi \propto 1/r$, $v \propto 1/r^2$.

Sofern kein Auftrieb (Gravitationsfeld) vorhanden ist, bleibt die Strömung außerhalb des Nachlaufs axialsymmetrisch.

Exakte Lösungen der Kontinuitäts- und der Navier-Stokes-Gleichungen sind nur in wenigen Fällen möglich. Damit sie physikalisch interessant sind, müssen sie die Gleichungen erfüllen *und stabil* sein: wachsen kleine Störungen zeitlich an, wird die Strömung instabil, es entsteht *Turbulenz*.

Beispiel: Eine der bekannten stabilen Lösungen ist die *rotierende Scheibe*.⁶ Eine ins Unendliche ausgedehnte Scheibe rotiert in einer viskosen Flüssigkeit gleichförmig um die z -Achse und versetzt die Flüssigkeit in Bewegung (Abb. 3.10). Die Strömung des Fluids kann in Zylinderkoordinaten berechnet werden. Dafür werden die folgenden Randbedingungen benötigt:

$$z = 0 : \quad v_r = 0, \quad v_\varphi = \omega r, \quad v_z = 0, \quad (3.6.5)$$

$$z = \infty : \quad v_r = 0, \quad v_\varphi = 0, \quad v_z = \text{const} . \quad (3.6.6)$$

Die Konstante für $v_z|_{z=\infty}$ wird aus den Bewegungsgleichungen bestimmt.

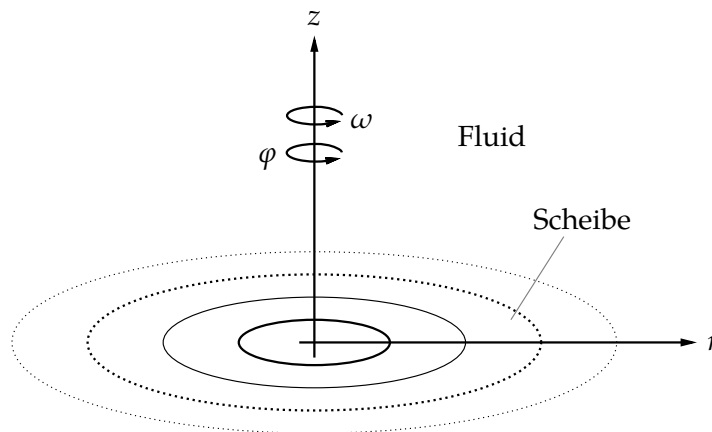


Abbildung 3.10: Rotierende Scheibe

Das Fluid strebt radial von der Rotationsachse weg, insbesondere in der Nähe der Scheibe. Zur Sicherung der Kontinuität (der Massenerhaltung) in der Flüssigkeit muss deshalb ein konstanter vertikaler Strom aus dem Unendlichen zur Scheibe hin existieren.

⁶Theodore von Kármán (*1881 Budapest, +1963 Aachen) entwickelte diese Lösung 1921.

Man sucht Lösungen der Bewegungsgleichung in der Form

$$v_r = r\omega F(z_1), \quad v_\varphi = r\omega G(z_1), \quad v_z = \sqrt{\nu\omega} H(z_1) \quad (3.6.7)$$

$$p = -\rho\nu\omega P(z_1) \text{ mit } z_1 = \sqrt{\frac{\omega}{\nu}} z. \quad (3.6.8)$$

Die *radiale* und die φ -Komponente der Geschwindigkeit sind proportional zum Abstand r von der Drehachse der Scheibe, während die vertikale Geschwindigkeit v_z in jeder horizontalen Ebene konstant ist. Einsetzen in die *Navier-Stokes-Gleichungen* ergibt:

$$(\nabla \cdot \mathbf{v}) = -\frac{\nabla P}{\rho} + \nu \Delta \mathbf{v} \quad (3.6.9)$$

$$\Rightarrow F^2 - G^2 + F'H = F'' \quad (3.6.10)$$

$$2FG + G'H = G'' \quad (3.6.11)$$

$$HH' = P' + H'', \quad (3.6.12)$$

wobei

$$' \equiv \frac{d}{dz_1} \quad (3.6.13)$$

und

$$\partial_z z_1 = \sqrt{\frac{\omega}{\nu}}. \quad (3.6.14)$$

Die *Kontinuitätsgleichung* $\nabla \cdot (\rho \mathbf{v})$ in Polarkoordinaten ergibt

$$0 = \frac{1}{r} \partial_r (rv_r) + \frac{1}{r} \partial_\varphi v_\varphi + \partial_z v_z \quad (3.6.15)$$

$$= 2\omega F + \sqrt{\nu\omega} \sqrt{\frac{\omega}{\nu}} H' \quad (3.6.16)$$

$$= 2\omega F + \omega H'. \quad (3.6.17)$$

Die *Randbedingungen* werden zu

$$z_1 = 0: \quad F = 0, \quad G = 1, \quad H = 0, \quad (3.6.18)$$

$$z_1 = \infty: \quad F = 0, \quad G = 0. \quad (3.6.19)$$

Das Problem ist also darstellbar durch ein System vier gewöhnlicher Differenzialgleichungen mit einer Veränderlichen, die numerisch gelöst werden kann.

Die Geschwindigkeit des Flüssigkeitsstromes aus dem Unendlichen zur Scheibe hin ist (Abb. 3.11)

$$v_z(\infty) = \sqrt{\nu\omega}H(z_1 \rightarrow \infty) = -0.886\sqrt{\nu\omega}. \quad (3.6.20)$$

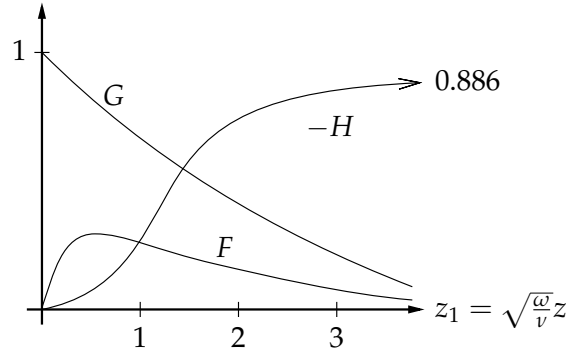


Abbildung 3.11: Lösung des Gleichungssystems für die rotierende Scheibe

Die senkrechte Reibungskraft auf die Scheibe pro Flächeneinheit ist

$$\sigma_{z\varphi} = \eta (\partial_z v_\varphi)_{z=0} \quad (3.6.21)$$

$$= \eta r \omega \partial_z G(z_1)|_{z=0} \quad (3.6.22)$$

$$= \eta r \omega \partial_{z_1} \partial_z G(z_1)|_{z=0} \quad (3.6.23)$$

$$= \eta r \omega \sqrt{\frac{\omega}{\nu}} G'(0) \quad (3.6.24)$$

$$= r \rho \sqrt{\nu\omega^3} G'(0), \quad (3.6.25)$$

es ist also $\sigma_{z\varphi} \propto \rho, \sqrt{\nu\omega^3}$.

Bei Vernachlässigung der Randeffekte an der Scheibe können wir für eine große, aber endliche Scheibe des Radius R das Drehmoment der Reibungskräfte auf einer der beiden Seiten schreiben als

$$M = 2 \int_0^R 2\pi r^2 \sigma_{z\varphi} dr \quad (3.6.26)$$

$$= \pi R^4 \rho \sqrt{\nu\omega^3} G'(0). \quad (3.6.27)$$

Die numerische Lösung ergibt

$$M = -1.94 R^4 \rho \sqrt{\nu\omega^3}. \quad (3.6.28)$$

Dies ist das Drehmoment der Reibungskräfte auf die Scheibe; wir halten fest, dass $M \propto R^4, \rho, \sqrt{\nu}$.

Literaturverzeichnis

- [1] Navier, C. L. M. H.: Mémoire sur les lois de mouvement des fluides. Mem. Acad. R. Sci. Paris, 6, 389 (1823)
- [2] Stokes, G. G.: On the theories of the internal friction of fluids in motion. Trans. Camb. Phil. Soc. 8, 287 (1845)
- [3] Jackson, J. D.: Klassische Elektrodynamik. de Gruyter (2014), zweite Umschlagseite
- [4] Lamb, H.: Hydrodynamics. Cambridge University Press (1924)

4 Turbulenz

4.1 Übergang zur Turbulenz und doppelte Schwelle

Laminare Strömungen eines *viskosen* Fluids werden für große Reynolds-Zahlen

$$Re = \frac{vd}{\nu} = \frac{\rho vd}{\eta} > Re_{\text{krit}} \quad (4.1.1)$$

im Allgemeinen instabil gegenüber infinitesimalen Störungen: Die Störung klingt nicht mit der Zeit ab, sondern wächst an; die Strömung wird *turbulent*.

Für jeden *Strömungstyp* gibt es ein eigenes Re_{krit} , z. B. bei der Strömung um feste Körper (Abb. 4.1): Hier ist im Allgemeinen $10 \leq Re_{\text{krit}} \leq 100$.

Im turbulenten Fall lassen sich die Navier-Stokes-Gleichungen mit einer turbulenz erzeugenden Kraft $\mathbf{f}$ schreiben als

$$\partial_t \mathbf{v} = -(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} - \frac{\nabla p}{\rho} + \nu \Delta \mathbf{v} + \mathbf{f} . \quad (4.1.2)$$

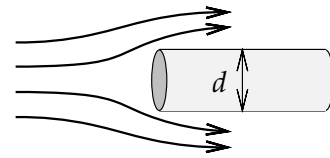


Abbildung 4.1: Festkörper in Strömung

Analytische Lösungen im turbulenten Fall gibt es nicht, und sie wären auch wenig sinnvoll, da man jetzt an *statistischen Mittelwerten* interessiert ist: für die mittlere Geschwindigkeit $\langle v \rangle$, die mittlere quadratische Geschwindigkeit $\langle v^2 \rangle$, die mittlere dissipierte Energie $\langle E_d \rangle$ (pro Zeit- und Masseneinheit), etc. In manchen Fällen lassen sie sich näherungsweise berechnen [1, 2], insbesondere bei entwickelter Turbulenz (also einer voll turbulenten Strömung). Man findet für die mittlere quadratische Geschwindigkeit als Funktion des Abstandes vom Wirbelzentrum (analog für die Wirbelenergie $\langle E \rangle \sim \langle v^2 \rangle$) das *Wirbelverteilungsgesetz*¹

$$\langle v^2 \rangle (r) \propto r^{2/3} . \quad (4.1.3)$$

¹Der von Kolmogorov und Onsager gefundene Zusammenhang folgt auch aus einem Renormierungsansatz für selbstähnliche Strukturen [3, 4]: Die Beschreibung entwickelter Turbulenz durch Carl Friedrich von Weizsäcker (*1912 Kiel, †2007 Söcking) im Jahr 1948 war ein Beispiel der Einführung der Renormierungsgruppe.

Der *exakte* Wert der Exponenten ist bis heute nicht berechenbar (man findet empirisch kleine Abweichungen von $2/3$), da auch die Geschwindigkeitskomponenten und ihre Ableitungen statistisch fluktuieren.

Das *Einsetzen der Turbulenz* bei vergleichsweise großen Reynolds-Zahlen hat Landau² 1944 über eine unendliche Folge von *Instabilitäten* und räumlich und zeitlich immer unregelmäßigere Strömungsmuster beschrieben [5].

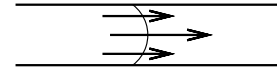


Abbildung 4.2:
Rohrströmung

Bei manchen Strömungstypen wie der *Rohrströmung* (Abb. 4.2) gibt es jedoch keine Instabilität, wohl aber Turbulenz. Sie setzt direkt und stark ein; dazu ist eine endliche *Störung* des laminaren Profils erforderlich (d. h., eine infinitesimale Störung ist nicht ausreichend). Hier gibt es für den Turbulenzeinsatz eine *doppelte Schwelle*: Sowohl die *Reynolds-Zahl* als auch die *Störung* müssen groß genug sein (Abb. 4.3):

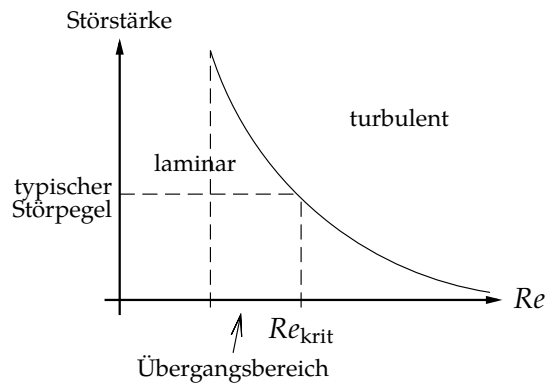


Abbildung 4.3: Doppelte Schwelle der Turbulenz

Ist die Strömung turbulent geworden, so hat sie viele Freiheitsgrade und einen hochdimensionalen Phasenraum.

Das *Profil* der *turbulenten* Strömung ist wesentlich durch die Nichtlinearität im konvektiven Term bestimmt, während bei der laminaren Strömung die Viskosität entscheidend ist.

Beispiel Rohrströmung:

Im *laminaren* Fall ist das die übliche Poiseuille-Strömung mit parabolischem Geschwindigkeitsprofil,

$$v^{lam}(r) = \frac{\delta p}{4\eta l} (R^2 - r^2) \quad (4.1.4)$$

$$\Rightarrow v_{\max}^{lam}(r=0) = \frac{\delta p}{4\eta l} R^2 \quad (4.1.5)$$

$$= 2\overline{v^{lam}}, \quad (4.1.6)$$

²Lew Dawidowitsch Landau (*1908 Baku, †1968 Moskau).

wobei für den über den Rohrquerschnitt gemittelten Wert $\overline{v^{\text{lam}}}$ der laminaren Strömung gilt

$$\overline{v^{\text{lam}}} = \frac{\int_0^R r v(r) dr}{\int_0^R r dr} \quad (4.1.7)$$

$$= \frac{\delta p}{8\eta l} R^2. \quad (4.1.8)$$

Die Beschreibung der *turbulenten* Rohrströmung ist grundsätzlich nur über Mit-

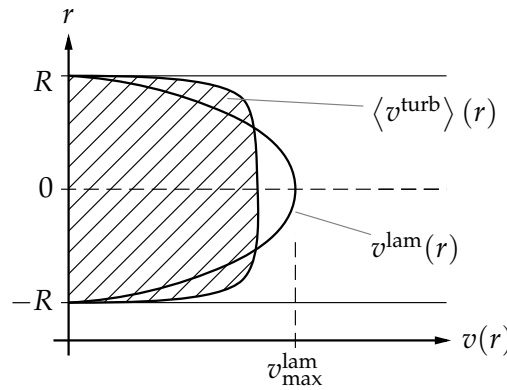


Abbildung 4.4: Laminare und turbulente Strömungsprofil

telwerte möglich (Abb. 4.4); die individuellen Fluidteilchengeschwindigkeiten variieren stark. Die mittlere Geschwindigkeit $\langle v^{\text{turb}} \rangle(r)$ muss in diesem Fall numerisch berechnet werden; sie unterscheidet sich deutlich von dem Ergebnis $v^{\text{lam}}(r)$ für die laminare Strömung. Die turbulente Strömung hat *kein* parabolisches Profil mehr, es ist eher eckig mit einem Maximalwert für $r = 0$ (in der Rohrmitte) zwischen dem gemittelten Wert $\overline{v^{\text{lam}}}$ und dem Maximalwert $v_{\text{max}}^{\text{lam}}$ der laminaren Strömung. Erst dicht am Rand fällt sie steil auf 0 ab; es bildet sich eine *schmale Randzone* aus, in der die Strömung durch *Viskosität* dominiert und fast *laminar* ist.

Als Folgen der Nichtlinearität können außer Turbulenz auch *Ordnung und Struktur* in offenen, dissipativen Systemen fern vom Gleichgewicht entstehen, etwa in der Kármán'schen Wirbelstraße (Abb. 4.5, bei $Re \approx 140$). Die dabei erscheinenden Strukturen sind *vielskalig*: Gleichartige Muster bilden sich in verschiedensten Größen ineinandergeschachtelt aus.



Abbildung 4.5: Kármán'sche Wirbelstraße (aus: M. Van Dyke: *An Album of Fluid Motion*, The Parabolic Press, Stanford CA, 1982)

4.2 Turbulenzeinsatz über Instabilität

Ohne makroskopische Störung setzt Turbulenz über infinitesimale Instabilitäten ein. Dazu zwei Beispiele:

Beispiel 1: Bei der *Taylor-Couette-Instabilität*, entdeckt 1923, strömt Wasser in dem Spalt zwischen einem rotierenden Innenzylinder und einem feststehenden, konzentrischen Außenzylinder (Abb. 4.6). Bei *langsamer* Drehung ist die Strömung *laminar*, bei schneller Drehung gibt es regelmäßige *Schlauchmuster*, bei sehr schneller Drehung wird sie vielskalig *turbulent*.

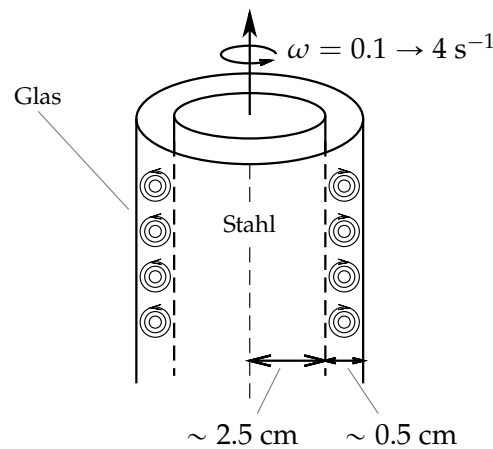


Abbildung 4.6: Taylor-Couette-Instabilität

Die Ursache ist, dass die viskose Flüssigkeit am rotierenden inneren und am ruhenden äußeren Zylinder haftet: Es gibt ein Gefälle der azimuthalen Geschwindigkeit $u_\varphi(r)$ von innen nach außen, und infolgedessen ein Gefälle der Zentrifugalkräfte. Wird es hinreichend groß, so kommt es zu einer *Zentrifugalinstabilität*. (Eine zusätzliche makroskopische Störung gibt es hier nicht.)

Dreht sich auch der *äußere* Zylinder, so sollte die Strömung *laminar* bleiben, weil $u_\varphi(r)$ mit r anwächst, so dass auch die *Druckkraft* anwächst und infinitesimale Störungen zurücktreibt. Jedoch wird die Strömung bei hinreichend großem ω dennoch turbulent; es muss demnach auch hier eine *weitere Ursache* geben.

Beispiel 2: Die *Rayleigh-Bénard-Zelle*³ dient als weiteres Beispiel für hydrodynamische Instabilität, Abb. 4.7. Der Auftrieb durch Wärmeausbreitung resultiert in Konvektionsrollen, dann in Turbulenz:

³Entdeckt 1916 von John William Strutt, 3. Baron Rayleigh (*1842 Langford-Grove, Maldon, †Terlins Place bei Witham), und unabhängig von Henri Claude Bénard (*1874, †1939) im Jahr 1920.

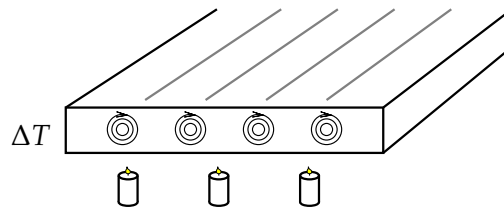


Abbildung 4.7: Rayleigh-Bénard-Zelle

Eine Flüssigkeitsschicht im Schwerfeld $\mathbf{g}$ wird von unten um ΔT (einige $^{\circ}\text{C}$) erwärmt. Für kleines ΔT wird die Wärme über die molekulare Leitfähigkeit transportiert, für mittelgroßes ΔT bilden sich regelmäßige Konvektionsrollen aus und für großes ΔT entsteht Turbulenz.

Die Konvektionsrollen sind die *erste Instabilität*; sie entsteht, wenn ein Paar komplexer Eigenwerte die imaginäre Achse kreuzt (sog. Hopf-Bifurkation).

Das beim Zerfall der Konvektionsrollen entstehende neue Muster ist nicht zeitunabhängig, sondern *periodisch* mit der Frequenz f_1 . Wird ΔT (oder ω oder Re) weiter erhöht, bleibt auch das neue Muster nicht stabil: Es folgt die dritte Instabilität, anschließend gibt es zwei Frequenzen f_1, f_2 (und wegen der Nichtlinearität ebenso alle Mischungsverhältnisse).

Bei der *vierten Instabilität* [6] kommt nicht einfach eine weitere Frequenz hinzu, sondern das Spektrum wird kontinuierlich und das Strömungsfeld zeitlich *chaotisch*.⁴

Der Ruelle-Takens-Weg ins hydrodynamische Chaos hat zahlreiche experimentelle Bestätigungen gefunden. Es gibt dabei drei Grundmuster für den Weg ins Chaos über Instabilitäten:

- (1) *Quasiperiodischer Weg*: f_1, f_2 inkommensurabel, d. h. nicht durch dieselbe Zahl ohne Rest teilbar;
- (2) *Periodenverdopplung*: f_1, f_2 fest verknüpft;
- (3) *Intermittenz*: intermittierendes Einsetzen eines neuen Musters.

Alle drei Wege lassen sich je nach Randbedingungen bei Rayleigh-Bénard messen.

4.3 Stabilität stationärer Strömungen

Nicht jede Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen für die Bewegung eines zähen Fluids ist in der Natur realisiert, denn sie muss auch *stabil* sein, d. h., *kleine Störungen* müssen mit der Zeit abklingen.

⁴Man beachte, dass *Chaos* und *Turbulenz* dennoch nicht synonym sind, da wichtige Gegenbeispiele nicht diesem Weg folgen.

Wir führen also eine mathematische Stabilitätsuntersuchung⁵ durch: Sei $\mathbf{v}_0(\mathbf{r})$ die stationäre Lösung und $\mathbf{v}_1(\mathbf{r}, t)$ eine kleine, nicht stationäre Störung. Die Navier-Stokes-Gleichungen und die Kontinuitätsgleichung werden also erfüllt von $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1$ mit $p = p_0 + p_1$:

$$\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu \Delta \mathbf{v}, \quad (4.3.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (4.3.2)$$

Für den stationären Anteil mit $\partial_t \mathbf{v}_0 = 0$ gilt also:

$$(\mathbf{v}_0 \cdot \nabla) \mathbf{v}_0 = -\frac{\nabla p_0}{\rho} + \nu \Delta \mathbf{v}_0, \quad (4.3.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_0 = 0, \quad (4.3.4)$$

und für den *gestörten Anteil* gilt unter Auslassung von Termen höherer Ordnung in $\mathbf{v}_1$ (wegen $|\mathbf{v}_1| \ll |\mathbf{v}_0|$):

$$\partial_t \mathbf{v}_1 + (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla) \mathbf{v}_1 + (\mathbf{v}_1 \cdot \nabla) \mathbf{v}_0 = -\frac{\nabla p_1}{\rho} + \nu \Delta \mathbf{v}_1, \quad (4.3.5)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_1 = 0. \quad (4.3.6)$$

Zusätzlich gilt die *Randbedingung* $\mathbf{v}_1 = 0$ an unbeweglichen festen Wänden. Also genügt $\mathbf{v}_1$ einem System homogener Differenzialgleichungen mit Koeffizienten, die nur Funktionen des Ortes sind und nicht von der Zeit abhängen.

Die *allgemeine Lösung* ist eine Summe spezieller Lösungen, in denen $\mathbf{v}_1$ über einen Faktor $\mathbf{v}_1(t) \propto e^{-i\omega t}$ von der Zeit abhängt. Die *Frequenzen* ω sind durch die Lösungen mit Randbedingungen bestimmt; sie sind komplex: $\omega \in \mathbb{C}$, $\omega = \omega_1 + i\gamma_1$.

Für den *positiven Imaginärteil* $\gamma_1 > 0$ wächst $e^{-i\omega t}$ unbeschränkt mit t ; die Strömung wird *instabil*. Im Umkehrschluss liegt eine stabile Strömung genau dann vor, wenn $\gamma_1 = \Im(\omega) < 0$ für alle ω .

Die zugehörige mathematische *Stabilitätsuntersuchung* ist kompliziert, und bei stationären Strömungen um Körper mit endlichen Abmessungen ist sie bisher nicht gelöst. Jedenfalls wird die Strömung für $Re > Re_{\text{krit}}$ instabil gegenüber infinitesimalen Störungen; für jeden Strömungstyp gibt es ein eigenes Re_{krit} , z. B. bei Strömungen um feste Körper: $10 \leq Re_{\text{krit}} \leq 100$ (vgl. Kap. 3.4):

$$Re = \frac{vd}{\nu} = \frac{\rho vd}{\eta}, \quad Re_{\text{krit}} \approx 30. \quad (4.3.7)$$

Für Reynolds-Zahlen gilt also:

⁵Nach Lew Dawidowitsch Landau.

- für $Re < Re_{\text{krit}}$ und Störfrequenzen $\omega = \omega_1 + i\gamma_1$ mit $\gamma_1 < 0$: *stabile Strömung*,
- für $Re = Re_{\text{krit}}$: $\exists \omega$ mit $\gamma_1 = 0$, $\gamma_1(Re_{\text{krit}}) = 0$,
- für $Re > Re_{\text{krit}}$ und $\gamma_1 > 0$ (mit $\gamma_1 \ll \omega_1$ bei $Re \approx Re_{\text{krit}}$): *turbulente Strömung*.

Beim Umströmen eines endlichen Körpers (Abb. 4.8) gibt es nur diskrete, keine kontinuierlichen Frequenzen, und es ist $\gamma_1 > 0$.

Für nichtstationäre Bewegung bei großem $Re > Re_{\text{krit}}$ in der Beschreibung von Landau (1944) verwendet man folgenden Ansatz für das Störfeld $\mathbf{v}_1$:

$$\mathbf{v}_1(\mathbf{r}, t) = A(t)\mathbf{f}(\mathbf{r}) \quad \text{mit komplexer Ortsfunktion } \mathbf{f} \quad (4.3.8)$$

und komplexer Amplitude $A(t)$:

$$A(t) = \text{const} \cdot e^{-i\omega t} \quad (4.3.9)$$

$$= \text{const} \cdot e^{\gamma_1 t} e^{-i\omega_1 t} \text{ zu Anfang bei } t \geq 0. \quad (4.3.10)$$

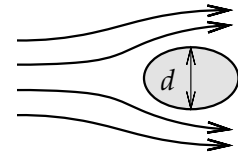


Abbildung 4.8:
Festkörper in Strömung

Wie entwickelt sich die *Amplitude* $|A(t)|$ des Störfeldes *zeitlich*?

Für $Re \approx Re_{\text{krit}}$ strebt die Amplitude des Störfeldes gegen einen endlichen Grenzwert, der sich wie folgt abschätzen lässt: Zu kleinen Zeiten ist

$$|A|^2 = \text{const}^2 e^{2\gamma_1 t} \underbrace{e^{-i\omega_1 t} e^{+i\omega_1 t}}_{=1}. \quad (4.3.11)$$

Die zeitliche Änderung des Betragsquadrats der Amplitude wird für kleine Zeiten zu

$$\frac{d}{dt} |A|^2 = 2\gamma_1 |A|^2. \quad (4.3.12)$$

Für größere Zeiten gibt es jedoch Abweichungen von der anfänglichen Amplitudenform; in einer *Reihenentwicklung* kommen weitere Glieder hinzu.

Es interessiert der *zeitliche Mittelwert*; die Glieder dritter Ordnung enthalten einen periodischen Faktor, der bei Zeitmittelung $\langle |A| \rangle_t$ Null ergibt. Also folgt mit Genauigkeit bis zur vierten Ordnung:

$$\frac{d}{dt} |A|^2 = 2\gamma_1 |A|^2 - \alpha |A|^4, \quad (4.3.13)$$

wobei die *Landau'sche Konstante* α positiv oder negativ sein kann.

Die Lösung der Differenzialgleichung ist gegeben durch (Abb. 4.9)

$$\frac{1}{|A|^2} = \frac{\alpha}{2\gamma_1} + \text{const} \cdot e^{-2\gamma_1 t}. \quad (4.3.14)$$

Für $t \rightarrow \infty$ strebt $|A|^2$ asymptotisch gegen den durch γ_1 und α festgelegten endlichen Grenzwert

$$|A|_{\max}^2 = \frac{2\gamma_1}{\alpha}. \quad (4.3.15)$$

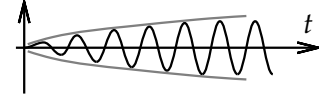


Abbildung 4.9: Zeitentwicklung der Amplitude

Dabei ist γ_1 eine Funktion der Reynolds-Zahl mit $\gamma_1(Re_{\text{krit}}) = 0$. Sie lässt sich in der Nähe von Re_{krit} in einer Potenzreihe entwickeln; in erster Näherung ist

$$\gamma_1 = \text{const} (Re - Re_{\text{krit}}) \quad (4.3.16)$$

$$\Rightarrow |A|_{\max} \approx \sqrt{\frac{2 \cdot \text{const}}{\alpha}} (Re - Re_{\text{krit}})^{1/2}. \quad (4.3.17)$$

Bei der Berücksichtigung eines weiteren Gliedes in der Entwicklung sieht man, dass die fünfte Ordnung bei der Zeitmittelung analog zur dritten Ordnung wegfällt:

$$\frac{d}{dt} |A|^2 = 2\gamma_1 |A|^2 - \alpha |A|^4 - \beta |A|^6 \quad (4.3.18)$$

für $\alpha < 0$ und $\beta > 0$. Die Lösung für $t \rightarrow \infty$ ist

$$|A|_{\max}^2 = \frac{|\alpha|}{2.3} \pm \left[\frac{\alpha^2}{4.3^2} + \frac{2|\alpha|}{\beta} \gamma_1 \right]^{1/2}. \quad (4.3.19)$$

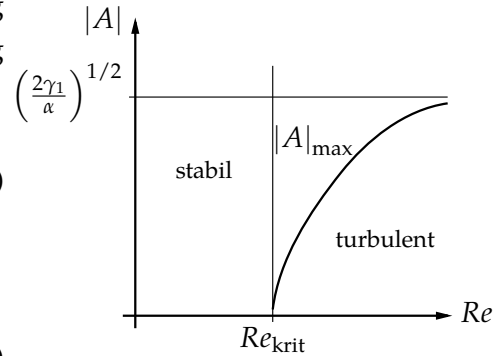


Abbildung 4.10: Endlicher Amplitudengrenzwert

Bei $Re = Re_{\text{krit}}$ nimmt das System sprunghaft eine endliche Amplitude an, $|A| = |\alpha|/\beta$ (Abb. 4.10).

Bei $Re'_{\text{krit}} < Re < Re_{\text{krit}}$ gibt es eine *metastabile Grundströmung*, die *stabil* gegenüber sehr kleinen Störungen ist ($|A| < \frac{|\alpha|}{2.3}$) – sie klingen im Laufe der Zeit ab –, aber *instabil* gegenüber Störungen mit endlicher Amplitude $|A| > \frac{\alpha}{2.3}$.

Für $Re < Re'_{\text{krit}}$ ist die Strömung stabil, für $Re > Re_{\text{krit}}$ gibt es keine stabile Strömung (Abb. 4.11).

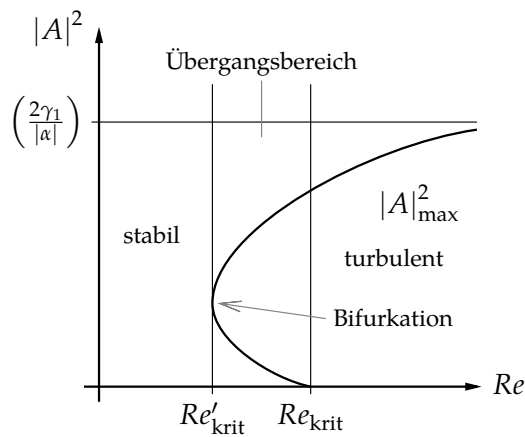


Abbildung 4.11: Bifurkation

Die *Phase* des Störfeldes $A(t)$ bleibt unbestimmt; sie hängt von den zufälligen Anfangsbedingungen ab. Dadurch erhält die Strömung einen Freiheitsgrad, während die stationäre (stabile) Strömung durch die äußeren Bedingungen vollständig bestimmt ist.

4.4 Entwickelte Turbulenz in astrophysikalischen Umgebungen

Turbulenz erscheint auf sehr unterschiedlichen Skalen, vom Labor bis in die größten Strukturen im Universum. Voraussetzung ist nur die Gegenwart eines kontinuierlichen, fluidähnlichen Mediums. Turbulenz ist eine der wichtigsten (und häufigsten) Naturerscheinungen; dennoch sind wir von einem tieferen Verständnis weit entfernt.

Beispiele für entwickelte Turbulenz sind:

- *Planeten*: Turbulenz ist essenziell beim Strukturieren der Atmosphäre sowie zum Wärme- und Impulstransport an der Oberfläche.
- *Terrestrische Planeten*: vergleichsweise kleinskalige Strukturen in der Atmosphäre, z. B. Wirbelströme; Durchmesser von ca. 1 – 10 km (etwa der Hurrikan Katrina).
- *Große Gasplaneten*: großskalige Strukturen; z. B. der Große Rote Fleck⁶ auf *Jupiter* (Abb. 4.12, Abb. 4.13): ein 14 000 km breiter und 30 000 – 40 000 km langer Zyklon, der mit sechs Tagen Umlaufzeit entgegen dem Uhrzeigersinn rotiert. Auf *Saturn* entstand 1990 ein weißer Fleck, der ein Sturmzentrum in der H/He/NH₃-Atmosphäre von ca. 20 000 km Ausdehnung und 10 h 17 min Umlaufzeit ist. Weiter gibt es auf *Neptun* einen ähnlichen blauen Fleck.⁷

⁶Der Große Rote Fleck wurde von Giovanni Domenico Cassini (*1625 Perinaldo bei Nizza, †1712 Paris) 1655 entdeckt und überdauerte die Jahrhunderte.

⁷Entdeckt von Voyager 2, 1989.

- *Sternatmosphären*: Turbulenz ist Bestandteil jeder Theorie über konvektiven Energietransport mit Implikationen für die innere Struktur von Sternen.
- *Interstellares Medium*: Turbulenz in Molekülwolken spielt eine wichtige Rolle bei der Sternentstehung.
- *Galaxien*: Turbulenz spielt eine entscheidende Rolle beim Entstehen von Galaxienclustern, den größten gravitativ gebundenen Objekten im Universum.

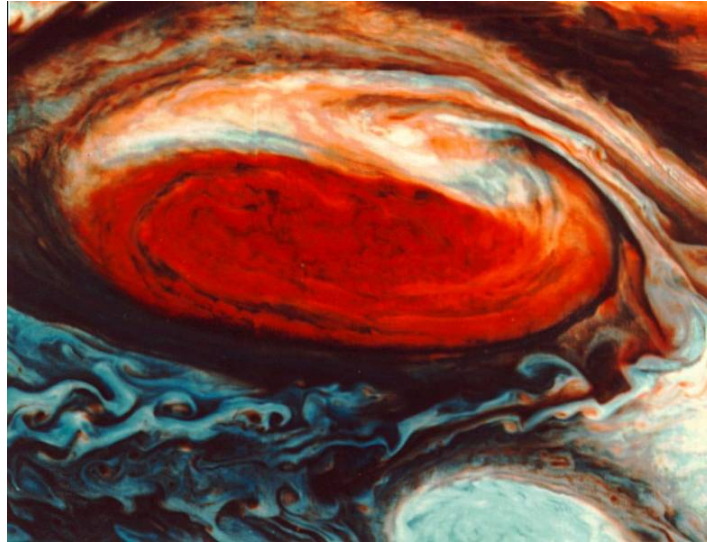


Abbildung 4.12: Beispiel für entwickelte Turbulenz: Jupiters Großer Roter Fleck (NASA)

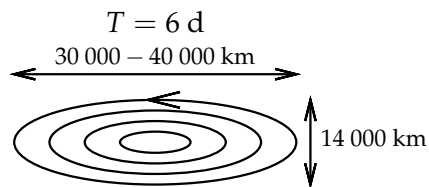


Abbildung 4.13: Maße des Großen Roten Flecks

Literaturverzeichnis

- [1] Kolmogorov, A. N.: The local structure of turbulence. Compt. Rend. Acad. Sci. USSR 30, 301 (1941) (in russisch)
- [2] Onsager, L.: The distribution of energy in turbulence. Phys. Rev. 68, 286(A) (1945)
- [3] von Weizsäcker, C. F.: Das Spektrum der Turbulenz bei großen Reynolds'schen Zahlen. Z. Physik 124, 614 (1948)
- [4] Heisenberg, W.: Zur statistischen Theorie der Turbulenz. Z. Physik 124, 628 (1948)
- [5] Landau, L. D.: On the problem of a turbulence. Dokl. Akad. Nauk SSSR 44, 339 (1944)
- [6] Ruelle, D. und Takens, F.: On the nature of turbulence. Commun. Math. Phys. 20, 167 (1971) und 23, 343 (1971)

5 Grenzschichten

Bei *sehr großen Reynolds-Zahlen* $Re = \frac{vl}{\nu} = \frac{\rho vl}{\eta}$ – entsprechend bei kleinen Werten von η bzw. ν – kann das Fluid allgemein als ideal angesehen werden. Dies gilt jedoch *nicht* in der Nähe fester Wände, da dort für viskose Fluide $v_{\perp} = v_{\parallel} = 0$ am Rand, beim idealen Fluid nur die Normalkomponente $v_{\perp} = 0$ sein muss.

Die *Abnahme* von $\mathbf{v}$ auf 0 für große Reynolds-Zahlen erfolgt fast vollständig in einer dünnen Fluidschicht an den Wänden, der *Grenzschicht* (Abb. 5.1). Hier haben die Geschwindigkeitsgradienten hohe Werte; die Strömung kann dort *laminar* oder *turbulent* sein. Die *Zähigkeit* verursacht den Geschwindigkeitsabfall in der Grenzschicht bis zu $\mathbf{v} = 0$. Der *Rand* der Grenzschicht ist nicht scharf.

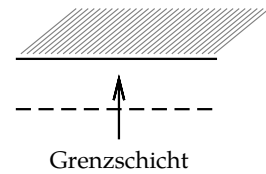


Abbildung 5.1:
Grenzschicht

Beispiel: Stromlinienkörper. Die *Dicke der Grenzschicht* ist im *laminaren* Fall gegeben durch

$$\delta_l = \frac{5l}{\sqrt{Re}} \propto \sqrt{\nu}, \quad (5.0.1)$$

im *turbulenten* Fall durch

$$\delta_t = 0.37 \sqrt[5]{\nu \frac{l^4}{4}}. \quad (5.0.2)$$

Beispielsweise ist für die charakteristische Länge $l = 10$ cm und die Reynolds-Zahl $Re = 1 \times 10^4$ die Dicke der laminaren Grenzschicht $\delta_l = 0.5$ cm (Abb. 5.2).

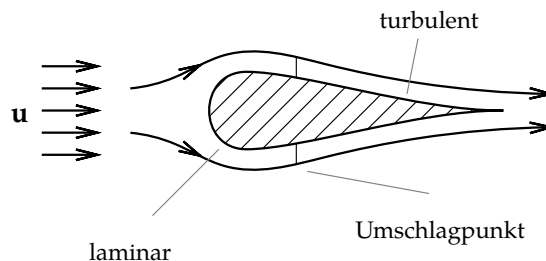


Abbildung 5.2: Stromlinienkörper (Randbedingungen: $v_{\perp} = v_{\parallel} = 0$)

Die Theorie der Grenzschichten [1] wurde formuliert von Prandtl¹ zum Internationalen Mathematiker-Kongress Heidelberg des Jahres 1904.

Wir behandeln die Bewegungsgleichung in der Grenzschicht für eine *zweidimensionale stationäre Strömung* (Abb. 5.3) um ein ebenes Teilstück der Oberfläche des Körpers aus den Navier-Stokes-Gleichungen. Außerhalb der Grenzschicht entspricht diese der Bernoulli-Gleichung,

$$p + \rho \frac{u^2}{2} = \text{const} \quad (5.0.3)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = -u \frac{du}{dx}, \quad (5.0.4)$$

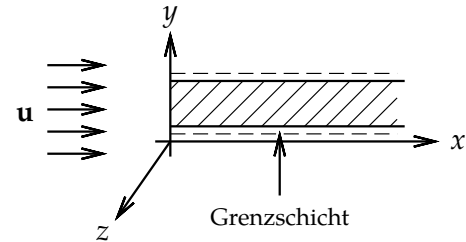


Abbildung 5.3: Grenzschicht in stationärer Strömung

da die Strömung dort eine Potenzialströmung mit der Geschwindigkeit $\mathbf{u}$ der Grundströmung ist. Da die Grenzschicht dünn ist, verläuft die Strömung hauptsächlich parallel zur umströmten Oberfläche,

$$v_y \ll v_x \quad \text{sowie} \quad \partial_x^2 v_c \ll \partial_y^2 v_x. \quad (5.0.5)$$

Also ist es ausreichend, sich mit der ersten Navier-Stokes-Gleichung (der x-Komponente der vektoriellen Gleichung) und der Kontinuitätsgleichung zu beschäftigen. Diese werden zu den *Prandtl'schen Gleichungen* [1, 2]:

$$v_x \partial_x v_x + v_y \partial_y v_x - \nu \partial_y^2 v_x = u \frac{du}{dx}, \quad (5.0.6)$$

$$\partial_x v_x + \partial_y v_y = 0. \quad (5.0.7)$$

Die Randbedingungen geben vor, dass am Rand $v_x = v_y = 0$ gelte.

¹Ludwig Prandtl (*1875 Freising, †1953 Göttingen)

Literaturverzeichnis

- [1] Prandtl, L.: Über Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung. Verhandlungen des III. Internationalen Mathematiker-Kongresses, Heidelberg (1904). Teubner, Leipzig, 484 (1905)
- [2] Großmann, S., Eckhardt, B, Lohse, D: Hundert Jahre Grenzschichtphysik. Phys. J. 10, 31 (2004)

6 Wärmeleitung

Mit Berücksichtigung von *Viskosität* und *Wärmeleitung* besteht das Gleichungssystem der Hydrodynamik aus den Navier-Stokes-Gleichungen, der Kontinuitätsgleichung und einer fünften thermodynamischen Gleichung. Sie tritt an die Stelle der Adiabatangleichung bei idealen Fluiden, deren Bedeutung die Erhaltung der Entropie ist. Wegen der irreversiblen Energiedissipation ist bei viskosen Fluiden die Entropie *nicht* erhalten; vielmehr wächst sie an.

Die *Änderung der Gesamtenergie* in einem bestimmten Volumen pro Sekunde muss gleich dem *Energiestrom* durch dieses Volumen sein. Der *Energiestrom* enthält jetzt außer dem idealen Term einen Term infolge der inneren Reibung. Im *idealen Fluid*:

$$\partial_t \left[\frac{\rho v^2}{2} + \rho \epsilon \right] = -\nabla \cdot \left[\rho \mathbf{v} \left(\frac{v^2}{2} + w \right) \right] = -\nabla \cdot \mathbf{j}_{\text{ideal}} , \quad (6.0.1)$$

wobei ϵ die innere Energie pro Masseneinheit und $w = \epsilon + p/\rho$ die Enthalpie pro Masseneinheit angibt. Die Gleichung beschreibt den Energiestrom aufgrund der Verschiebung der Flüssigkeitsmasse; dazu kommt der Energiestrom infolge innerer Reibung,

$$\mathbf{j}' = -\mathbf{v}\sigma' , \quad j'_k = -v_i \sigma'_{ik} . \quad (6.0.2)$$

Auch bei konstanter Temperatur sorgen die beiden Energietransportmechanismen für *Wärmetransport*.

Ist T *nicht* im ganzen Volumen *konstant*, so gibt es zusätzlichen Wärmetransport durch *Wärmeleitung*: direkte molekulare Energieübertragung von Orten mit höherem zu Orten mit niedrigerer Temperatur T . Sie geschieht auch in einer *ruhenden* Flüssigkeit und ebenso in einem Festkörper, hängt also *nicht* mit makroskopischer Bewegung zusammen.

6.1 Die Wärmetransportgleichung

Sei $\mathbf{q}$ die *Wärmestromdichte* infolge *Wärmeleitung*; $\mathbf{q}$ ist eine Funktion der Temperaturänderung. Ist der Temperaturgradient klein, so kann $\mathbf{q}$ in einer Potenzreihe nach ∇T entwickelt werden, von der wir nur die Glieder niedrigster Ordnung berücksichtigen.

Der konstante Term verschwindet, da $\mathbf{q} = 0 \Leftrightarrow \nabla T = 0$. Also ist

$$\mathbf{q} \approx -\kappa \nabla T \quad (6.1.1)$$

mit der Wärmeleitfähigkeit¹ κ , die > 0 ist, da der Energiestrom von Orten mit hoher zu Orten mit niedriger Temperatur gerichtet ist. $\mathbf{q}$ und ∇T haben entgegengesetzte Richtungen.

Die gesamte *Energiestromdichte* ist also

$$\mathbf{j}_{\text{visc}} = \underbrace{\rho \mathbf{v} \left[\frac{v^2}{2} + w \right]}_{=\mathbf{j}_{\text{ideal}}} - \mathbf{v} \sigma' \underbrace{-\kappa \nabla T}_{=\mathbf{q}}, \quad (6.1.2)$$

und es gilt der *Energieerhaltungssatz*

$$\partial_t \left[\frac{\rho v^2}{2} + \rho \epsilon \right] = -\nabla \cdot \mathbf{j}_{\text{visc}}, \quad (6.1.3)$$

der sich mithilfe der hydrodynamischen Gleichungen umformen lässt zu

$$\partial_t \left[\frac{\rho v^2}{2} + \rho \epsilon \right] = \frac{v^2}{2} \partial_t \rho + \rho \mathbf{v} \cdot \partial_t \mathbf{v} + \rho \partial_t \epsilon + \epsilon \partial_t \rho, \quad (6.1.4)$$

wobei der Term $\partial_t \rho$ aus der Kontinuitätsgleichung, $\partial_t \mathbf{v}$ aus den Navier-Stokes-Gleichungen entnommen ist und die Ableitung $\partial_t \epsilon$ aus der thermischen Beziehung

$$d\epsilon = T ds - p dV \quad (6.1.5)$$

$$= T ds + \frac{p}{\rho^2} d\rho, \quad (6.1.6)$$

$$\Rightarrow \partial_t \epsilon = T \partial_t s + \frac{p}{\rho^2} \partial_t \rho \quad (6.1.7)$$

kommt. Nach Einsetzen folgt durch den Vergleich mit der rechten Seite des Energieerhaltungssatzes die *allgemeine Gleichung für den Wärmetransport*,

$$\rho T \left[\underbrace{\partial_t s}_{\text{lokal}} + \underbrace{\mathbf{v} \cdot \nabla s}_{\text{konvektiv}} \right] = \underbrace{\sigma'_{ik} \partial_k v_i}_{\text{viskos}} + \underbrace{\nabla (\kappa \nabla T)}_{\text{Wärmeleitung}}. \quad (6.1.8)$$

Ohne Viskosität und Wärmetransport verschwindet die rechte Seite; es ergibt sich dann die Energieerhaltung in einer idealen Flüssigkeit, die *Adiabatengleichung*

$$\frac{ds}{dt} = 0. \quad (6.1.9)$$

(Es ist $\sigma'_{ik} \partial_k v_i = \eta \partial_k v_i + \partial_i v_k - \frac{2}{3} \delta_{ik} \partial_l v_l$.)

¹Thermal conductivity in englischsprachiger Literatur.

Die Gesamtentropie der Flüssigkeit

$$S = \int \rho s dV \quad (6.1.10)$$

wächst an aufgrund der irreversiblen Prozesse der *Wärmeleitung* und der *inneren Reibung*.

6.2 Wärmetransport bei inkompressiblen Fluiden

Oft lässt sich die Wärmeleitungsgleichung stark vereinfachen. Falls gilt, dass die Strömungsgeschwindigkeit sehr viel kleiner ist als die Schallgeschwindigkeit, $v \ll c$, so sind die *Druckänderungen* so klein, dass die zugehörigen *Dichteänderungen* vernachlässigbar sind. Die Dichteänderungen infolge einer Temperaturänderung ΔT müssen jedoch berücksichtigt werden.

Bei der Differenziation der thermodynamischen Größen kann man also den Druck, nicht aber die Dichte als konstant annehmen:

$$\partial_t s = (\partial_T)_p \partial_t T, \quad \nabla s = (\partial_{Ts})_p \nabla T, \quad (6.2.1)$$

wobei $(\partial_{Ts})_p = C_p/T$ mit der spezifischen Wärmekapazität bei konstantem Druck $C_p = T(\partial_{Ts})_p$.

$$\Rightarrow \partial_t s = C_p \partial_t T, \quad T \nabla s = C_p \nabla T. \quad (6.2.2)$$

Einsetzen in die Wärmetransportgleichung (6.1.8) ergibt

$$\rho C_p [\partial_t T + \mathbf{v} \cdot \nabla T] = \sigma'_{ik} \partial_k v_i + \nabla (\kappa \nabla T). \quad (6.2.3)$$

Bei *kleinen* Temperaturdifferenzen kann auch die Dichte als konstant angesehen und die Flüssigkeit insgesamt als inkompressibel behandelt werden. Dann ist die Kontinuitätsgleichung

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (6.2.4)$$

und bei kleinem ΔT können wir auch die Temperaturabhängigkeit von η , κ und C_p vernachlässigen. Nach Division durch ρC_p folgt die Wärmetransportgleichung in einem *inkompressiblen Fluid*:

$$\partial_t T + \mathbf{v} \cdot \nabla T = \chi \Delta T + \frac{\nu}{2C_p} [\partial_k v_i + \partial_i v_k]^2 \quad (6.2.5)$$

mit der kinematischen Zähigkeit $\nu = \eta/\rho$ und der Temperaturleitfähigkeit² $\chi = \kappa/(\rho C_p)$.

²Thermometric conductivity in englischsprachiger Literatur.

In einer *ruhenden* Flüssigkeit wird der Energietransport allein durch die *Wärmeleitung* bewirkt; ohne geschwindigkeitsabhängige Terme wird die Gleichung zu

$$\partial_t T = \chi \Delta T , \quad (6.2.6)$$

auch bekannt als *Wärmeleitungsgleichung* oder *Fourier'sche Gleichung*.³

Diese Gleichung folgt auch direkt aus der Energieerhaltung: Die in einem bestimmten Volumen pro Zeiteinheit absorbierte Wärmemenge muss gleich dem Wärmestrom sein, der durch die Oberfläche in das Volumen fließt. Aus der Gleichsetzung von absoluter Wärmemenge und Wärmestrom,

$$\rho C_p \partial_t T = -\nabla q = \kappa \Delta T , \quad (6.2.7)$$

folgt also direkt die Wärmeleitungsgleichung.

Die Wärmeleitungsgleichung ist nur sehr begrenzt anwendbar: Bei Flüssigkeiten im Schwerfeld bewirkt bereits ein kleiner Temperaturgradient eine unmerkliche Störung (freie Konvektion): Nur wenn ∇T der Schwerkraft entgegengerichtet oder die Flüssigkeit sehr zäh ist, gilt die Gleichung. Sie ist dennoch wichtig, da sie auch Wärmeleitung in festen Körpern beschreibt, und soll deshalb hier untersucht werden.

Ist die Temperaturverteilung in einem ungleichmäßig erwärmten, *ruhenden* Medium zeitlich konstant, wird die Wärmeleitungsgleichung – bei konstanter Wärmeleitfähigkeit κ – zur *Laplace-Gleichung*

$$\Delta T = 0 . \quad (6.2.8)$$

Kann κ nicht als konstant angesehen werden, muss man allgemeiner schreiben:

$$\nabla \cdot (\kappa \nabla T) = 0 . \quad (6.2.9)$$

Sind zusätzlich *fremde Wärmequellen* vorhanden, muss zur Wärmeleitungsgleichung ein Zusatzterm addiert werden, z. B. für die Aufheizung durch elektrischen Strom. Sei Q die Wärmemenge, die von Quellen an die Flüssigkeit pro Volumen- und Zeiteinheit abgegeben wird,

$$Q = Q(\mathbf{r}, t) , \quad (6.2.10)$$

so wird die Wärmeleitungsgleichung zu

$$\rho C_p \partial_t T = \kappa \Delta T + Q . \quad (6.2.11)$$

³Nach Jean Baptiste-Joseph Fourier (*1768 Auxerre, †1830 Paris).

Hinzu kommen noch die Randbedingungen.

6.3 Wärmetransport in einem unbegrenzten Medium

Sei die Temperaturverteilung bei $t = 0$ vorgegeben:

$$T = T_0(x, y, z) . \quad (6.3.1)$$

Gesucht wird $T(\mathbf{r}, t > 0)$. Man entwickelt dazu die gesuchte Funktion in einem Fourier-Integral:

$$T(\mathbf{r}, t) = \int T_{\mathbf{k}}(t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \quad (6.3.2)$$

mit $T_{\mathbf{k}}(t) = \int T(\mathbf{r}, t) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d^3 x$.

Für jede Fourier-Komponente der Temperatur,

$$T_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} , \quad (6.3.3)$$

folgt die Wärmeleitungsgleichung

$$\partial_t T = \chi \Delta T : \quad (6.3.4)$$

$$\frac{dT_{\mathbf{k}}}{dt} + k^2 \chi T_{\mathbf{k}} = 0 . \quad (6.3.5)$$

Daraus folgt die Zeitabhängigkeit der Temperatur $T_{\mathbf{k}}$ als

$$T_{\mathbf{k}} = T_{0\mathbf{k}} e^{-k^2 \chi t} , \quad (6.3.6)$$

und mit $T = T_0(\mathbf{r})$ für $t = 0$:

$$T_{0\mathbf{k}} = \int T_0(\mathbf{r}') e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}'} d^3 x' \quad (6.3.7)$$

$$\Rightarrow T(\mathbf{r}, t) = \int T_0(\mathbf{r}') e^{-k^2 \chi t} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')} d^3 x' \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} . \quad (6.3.8)$$

Das Integral über $d^3 k$ ist darstellbar als Produkt dreier gleichwertiger Integrale der Form

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha \xi^2} \cos \beta \xi d\xi = \left(\frac{\pi}{\alpha} \right)^{1/2} e^{-\beta^2 / (4\alpha)} , \quad (6.3.9)$$

wobei ξ einer der Komponenten des Vektors $\mathbf{k}$ entspricht. Das analoge sin-Integral verschwindet, da sin eine ungerade Funktion ist.

Damit ist die zeitabhängige Temperaturverteilung bei gegebener Anfangsverteilung T_0 angegeben durch

$$T(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{8(\pi\chi t)^{3/2}} \int T_0(\mathbf{r}') \exp \left[-\frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')^2}{4\chi t} \right] d^3x'. \quad (6.3.10)$$

Hängt T_0 nur von einer Koordinate ab, $T_0 = T_0(x)$, so lässt sich die $dy'dz'$ -Integration ausführen, und man bekommt

$$T(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2(\pi\chi t)^{1/2}} \int T_0(x') \exp \left[-\frac{(x - x')^2}{4\chi t} \right] dx', \quad (6.3.11)$$

und für eine anfängliche δ -Funktionsverteilung $T_0(\mathbf{r}) = \text{const} \cdot \delta(\mathbf{r})$

$$T(\mathbf{r}, t) = \frac{\text{const}}{2(\pi\chi t)^{1/2}} e^{-r^2/(4\chi t)}. \quad (6.3.12)$$

Bei $r = 0$ nimmt die Temperatur proportional zu $t^{3/2}$ ab, in der Umgebung nimmt sie zu (Abb. 6.1).

Der Verlauf der Temperaturausschüttung wird im Weiteren durch den Exponentialfaktor bestimmt. Die Standardabweichung der Gauß-Funktion ist $\sigma = \sqrt{2\chi t}$, die Breite $\Gamma = \sqrt{8 \ln 2} \sigma$, d. h., $l \propto \sqrt{t}$. Dementsprechend ist die Relaxationszeit für den Wärmeleitungsvorgang, in der sich die Temperaturen merklich angleichen,

$$\tau \propto \frac{l^2}{\chi}, \quad (6.3.13)$$

wobei l die Größenordnung der Abmessungen des Körpers ist, der zunächst ungleichmäßig erwärmt ist.

Thermische Störungen breiten sich instantan über den ganzen Raum aus: Bei anfänglicher δ -Funktion geht die Verteilung schon im nächsten Moment nur im Unendlichen asymptotisch gegen 0. (In räumlich begrenzte Medien kommen die Randbedingungen hinzu.)

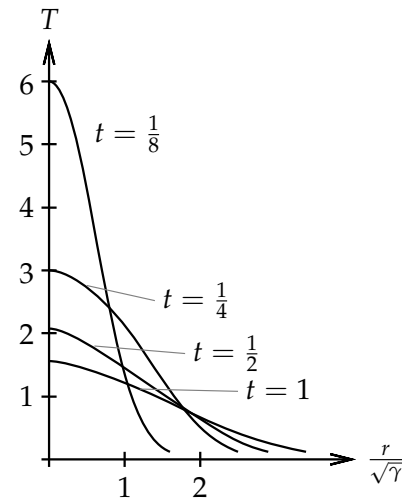


Abbildung 6.1: Temperaturverteilung zu verschiedenen Zeitpunkten

6.4 Konvektion

Konvektion ist die Strömung in einer *ungleichmäßig erwärmten* Flüssigkeit. Sind die Temperaturdifferenzen groß gegen die Temperaturveränderungen durch Wärmeentwicklung bei der Energiedissipation,

$$\Delta T \gg \Delta T_{\text{diss}} , \quad (6.4.1)$$

so kann man den Viskositätsterm in der Wärmetransportgleichung vernachlässigen,

$$\chi \Delta T \gg \frac{\nu}{2C_p} (\partial_k v_i + \partial_i v_k)^2 \quad (6.4.2)$$

und erhält für inkompressible Fluide

$$\partial_t T + \mathbf{v} \cdot \nabla T = \chi \Delta T \quad (6.4.3)$$

mit der Temperaturleitfähigkeit

$$\chi = \frac{\kappa}{\rho C_p} , \quad (6.4.4)$$

wobei κ wieder die Wärmeleitfähigkeit angibt. Zusammen mit den Navier-Stokes-Gleichungen und der Kontinuitätsgleichung wird Konvektion dadurch vollständig beschrieben.

Findet keine zeitliche Änderung der Temperaturverteilung statt, so liegt *stationäre Konvektion* vor. Da $\partial_t T = 0$, fallen die Zeitableitungen heraus, und es bleiben die Gleichungen

$$\mathbf{v} \cdot \nabla T = \chi \Delta T \quad (\text{Konvektion}), \quad (6.4.5)$$

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla \frac{p}{\rho} + \nu \Delta \mathbf{v} \quad (\text{Navier-Stokes-Gleichungen}) \text{ und} \quad (6.4.6)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (\text{Kontinuitätsgleichung}). \quad (6.4.7)$$

$\mathbf{v}$, T und p/ρ sind die unbekannten Funktionen, ν und χ (im Allgemeinen konstante) Parameter.

Die Lösungen hängen über die *Randbedingungen* (z. B. fester Körper in der Strömung) von weiteren Größen ab, etwa:

- der Längenskala eines festen Körpers in der Strömung,
- der Geschwindigkeit $\mathbf{u}$ der Grundströmung,
- der charakteristischen Temperaturdifferenz $T_1 - T_0$ zwischen Fluid und festem Körper.

Die Gleichung für T ist *linear* und *homogen*; sie kann deshalb mit einem beliebigen konstanten Faktor multipliziert werden. Also ist die Maßeinheit der Temperatur willkürlich wählbar. Wir wählen die übliche Einheit K.

Fünf Parameter charakterisieren also die Konvektion. Ihre Einheiten sind

$$[\nu] = [\chi] = \frac{\text{m}^2}{\text{s}}; \quad [u] = \frac{\text{m}}{\text{s}}; \quad [l] = \text{m}; \quad [T_1 - T_2] = \text{K}. \quad (6.4.8)$$

Daraus lassen sich zwei unabhängige dimensionslose Kombinationen bilden:

- die *Reynolds-Zahl* $Re = \frac{ul}{\nu}$, vgl. (3.4.16), und
- die *Prandtl-Zahl* $Pr = \frac{\nu}{\chi} = \frac{\text{kinematische Viskosität}}{\text{Temperaturleitfähigkeit}}$.

Die Prandtl-Zahl, auch bekannt als Wärmeübertragungskennwert, ist eine Materialkonstante, die von T , aber nicht von den Eigenschaften der Strömung abhängt (s. Tab. 6.1). Für Gase ist sie von der Größenordnung 1, für Flüssigkeiten variiert sie stark.

Tabelle 6.1: Prandtl-Zahlen für verschiedene Materialien bei 20° C

	Pr
Quecksilber	0.044
Luft	0.733
Wasser	6.75
Alkohol	16.6
Glycerin	7250

Das Produkt von Re und Pr ist die *Péclet-Zahl*

$$Pe \equiv Re \cdot Pr = \frac{ul}{\chi}. \quad (6.4.9)$$

In die dimensionslose Funktion für die *Temperaturverteilung* gehen Re und Pr als Parameter ein,

$$\frac{T - T_0}{T - T_1} = f\left(\frac{\mathbf{r}}{l}, Re, Pr\right). \quad (6.4.10)$$

In die *Geschwindigkeitsverteilung* geht nur Re ein, da sie durch die Navier-Stokes-Gleichungen und die Kontinuitätsgleichung bestimmt ist, in denen χ bzw. Pr nicht vorkommen:

$$\frac{\mathbf{v}}{u} = \mathbf{f}\left(\frac{\mathbf{r}}{l}, Re\right). \quad (6.4.11)$$

Den Wärmetransport zwischen Flüssigkeit und festem Körper charakterisiert die *Wärmeübergangszahl* α ,

$$\alpha = \frac{q}{T_1 - T_0} . \quad (6.4.12)$$

Dabei ist $q = |\mathbf{q}|$, $\mathbf{q} = -\kappa \nabla T$ die Wärmestromdichte durch die Körperoberfläche, und $T_1 - T_0$ ist die Temperaturdifferenz zwischen festem Körper und Flüssigkeit.

Der Wärmetransport kann durch die dimensionslose *Nusselt-Zahl* charakterisiert werden,

$$Nu \equiv \frac{\alpha l}{\kappa} = f(Re, Pr) . \quad (6.4.13)$$

7 Diffusion

7.1 Flüssigkeitsgemische

Bisher haben wir das Fluid als homogen angenommen. Bei *Gemischen*, deren Zusammenhang vom Ort abhängt, werden die hydrodynamischen Gleichungen wesentlich abgeändert.

Für ein *Gemisch aus zwei Komponenten* ist die Konzentration definiert als

$$c \equiv \frac{m_1}{M}, \quad (7.1.1)$$

wobei $M = m_1 + m_2$ die Gesamtmasse im Volumenelement und m_1 die erste Komponente angibt. Die Verteilung der Konzentration ist zeitabhängig:

- (1) Jedes Teilvolumen bewegt sich als Ganzes mit unveränderter Zusammensetzung: *mechanische Durchmischung*. Diese Konzentrationsänderung ist *reversibel* und bewirkt *keine* Energiedissipation. (Beispiel: Paraffin in H_2O .)
- (2) Die Zusammensetzung ändert sich durch molekularen Massentransport aus einem Teilvolumen in ein anderes. Der Konzentrationsausgleich geschieht durch *Diffusion* und ist zeitlich *irreversibel*.

Neben Wärmeleitung und Viskosität ist *Diffusion* die Ursache der Energiedissipation in einem Flüssigkeitsgemisch.

Ohne Diffusion bleibt die Zusammensetzung eines Fluidelements bei der Bewegung unverändert; es gilt eine Kontinuitätsgleichung für den Substanzstrom $\rho c \mathbf{v}$ ($c = m_1/m$):

$$\partial_t (\rho c) + \nabla \cdot (\rho c \mathbf{v}) = 0. \quad (7.1.2)$$

Integration mit dem Gauß'schen Satz ergibt

$$\partial_t \int \rho c dV = - \oint \rho c \mathbf{v} d\mathbf{f}. \quad (7.1.3)$$

(Der Strom für die zweite Substanz ist analog $\rho (1 - c) \mathbf{v}$.)

Mit *Diffusion* kommt der sogenannte *Diffusionsstrom* hinzu,

$$\partial_t (\rho c) + \nabla \cdot (\rho c \mathbf{v}) = - \nabla \cdot \mathbf{i}, \quad (7.1.4)$$

auch bezeichnet als sechste Grundgleichung der Hydrodynamik bei Gemischen. In integraler Form lautet die Gleichung

$$\partial_t \int \rho c dV = - \oint \rho c \mathbf{v} \cdot d\mathbf{f} - \oint \mathbf{i} \cdot d\mathbf{f}. \quad (7.1.5)$$

Mithilfe der thermodynamischen Größen – die jetzt jedoch auch von der Konzentration c abhängen – erhalten wir außerdem die verallgemeinerte *Wärmetransportgleichung* (auch: die fünfte Gleichung). Sie folgt aus der *Energieerhaltung*

$$\partial_t \left[\frac{\rho v^2}{2} + \rho \epsilon \right] = -\nabla \cdot \mathbf{j}_{\text{visc}} \quad (7.1.6)$$

durch Umformung mithilfe der Kontinuitäts- und der Navier-Stokes-Gleichungen. Jetzt enthalten die Ausdrücke für *Energie* und *Enthalpie* jedoch einen zusätzlichen Term mit dem Differenzial der Konzentration:

- (1) das Energiedifferenzial $d\epsilon = Tds + \frac{p}{\rho^2} d\rho + \mu dc$ und
- (2) das Enthalpiedifferenzial $dw = Tds + \frac{1}{\rho} dp + \mu dc$

mit dem chemischen Potenzial des Gemisches μ , das proportional zur mittleren Teilchenzahl ist.¹

In der Ableitung $\rho \partial_t \epsilon$ kommt zusätzlich der Term $\rho \mu \partial_t c$ vor; analog kommt zu $-\mathbf{v} \cdot \nabla p$ der Term $\rho \mu \mathbf{v} \cdot \nabla c$ hinzu. Damit wird die Gleichung für die zeitliche Änderung der Energie zu

$$\partial_t \left[\frac{\rho v^2}{2} + \rho \epsilon \right] = -\nabla j_{\text{visc}} + \rho T [\partial_t s + \mathbf{v} \cdot \nabla s] - \sigma'_{ik} \partial_k v_i + \nabla \cdot \mathbf{q} - \mu \nabla \cdot \mathbf{i}. \quad (7.1.7)$$

Damit der Energieerhaltungssatz erfüllt ist, muss demnach gelten:

$$\rho T [\partial_t s + \mathbf{v} \cdot \nabla s] = \sigma'_{ik} \partial_k v_i - \nabla \cdot (\mathbf{q} - \mu \mathbf{i}) - i \nabla \mu \quad (7.1.8)$$

mit $\nabla \cdot \mathbf{q} - \mu \nabla \cdot \mathbf{i} = (\mathbf{q} - \mu \mathbf{i}) + i \nabla \mu$. Diese Gleichung für die zeitliche Änderung unter Berücksichtigung der Diffusion ist eine Verallgemeinerung der Wärmetransportgleichung.

Um die Gleichungen zu lösen, müssen der *Diffusionsstrom* $\mathbf{i}$ und der *Wärmestrom* $\mathbf{q}$ durch die *Temperatur- und Konzentrationsgradienten* ausgedrückt werden. Beide Ströme hängen im Allgemeinen von beiden Gradienten ab. Sind diese klein, kann man $\mathbf{i}$ und $\mathbf{q}$ als lineare Funktionen von $\nabla \mu$ und ∇T ansetzen:

$$\mathbf{i} = -\alpha \nabla \mu - \beta \nabla T, \quad (7.1.9)$$

$$\mathbf{q} = -\delta \nabla \mu - \gamma \nabla T + \mu \mathbf{i}. \quad (7.1.10)$$

¹Analog ist die Temperatur proportional zur mittleren Energie, $T \propto \langle E \rangle = \frac{3}{2} k_B T$.

Sofern sich Temperatur und Konzentration nur wenig ändern und es keinen wesentlichen Druckgradienten gibt, lassen sich diese Gleichungen mithilfe thermodynamischer Relationen umformen zu

$$\partial_t c = D \left[\Delta c + \frac{k_T}{T} \Delta T \right], \quad (7.1.11)$$

$$\partial_t T - \frac{k_T}{C_p} (\partial_c \mu)_{p,T} \partial_t c = \chi \Delta T, \quad (7.1.12)$$

d. h., *Temperatur* und *Konzentration* sind durch ein *lineares* Gleichungssystem bestimmt.

Man definiert Diffusionskoeffizient D und Thermodiffusionskoeffizient $k_T D$ durch

$$D = \frac{\alpha}{\rho} (\partial_c \mu)_{p,T} \quad \text{und} \quad (7.1.13)$$

$$k_T D = \frac{\alpha T}{\rho} (\partial_T \mu)_{c,p} + \beta. \quad (7.1.14)$$

Bei *kleinen Konzentrationen* wird $k_T D \rightarrow 0$; es bleibt dann eine reine Diffusionsgleichung:

$$\partial_t c = D \Delta c \quad (7.1.15)$$

zuzüglich der Randbedingungen. Die Diffusionsgleichung hat dieselbe Gestalt wie die Wärmeleitungsgleichung (6.4.3) für eine *ruhende* Flüssigkeit,

$$\partial_t T = \chi \Delta T, \quad (7.1.16)$$

so dass alle Formeln aus Kap. 6 übertragen werden können mit

$$T \rightarrow c, \quad (7.1.17)$$

$$\chi \rightarrow D. \quad (7.1.18)$$

Beispiel: Für die Verteilung einer gelösten Substanz mit δ -Funktionsanfangsbedingungen bei $t = 0$ ergibt sich

$$c(r, t) = \frac{M}{8\rho (\pi D t)^{3/2}} e^{-r^2/(4Dt)} \quad (7.1.19)$$

in dreidimensionalen Polarkoordinaten, wobei M die Gesamtmenge der gelösten Substanz ist.

Die Zeitverteilung der Konzentration im Diffusionsvorgang wird in Abb. 7.1 gezeigt; die Standardabweichung ist gegeben durch $\sigma = \sqrt{2Dt}$, die Breite durch $\Gamma = \sqrt{8 \ln 2} \sigma$.

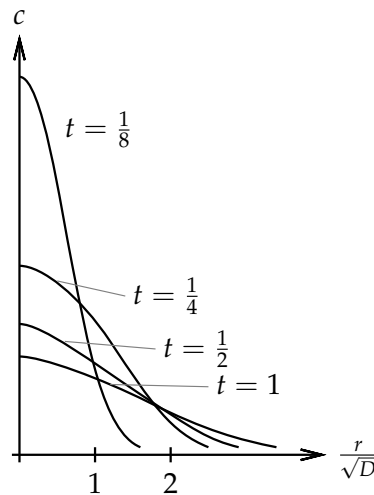


Abbildung 7.1: Konzentrationsverteilung zu verschiedenen Zeitpunkten

7.2 Brown'sche Bewegung

Aufgrund molekularer Stöße machen in einer Flüssigkeit suspendierte Teilchen eine ungeordnete Zitterbewegung (Abb. 7.2), die der Botaniker Brown² bereits 1827 entdeckt hatte und deren Ursache bis zu Einsteins³ Arbeit 1905 [1] unbekannt blieb.

Abbildung 7.2:
Brown'sche
Bewegung

Sei zu $t = 0$ ein Brown'sches Teilchen (z. B. Blütenpollen in Wasser) im Koordinatenursprung; seine Bewegung wird als Diffusionsprozess beschrieben, und die *Aufenthaltswahrscheinlichkeit* tritt an die Stelle der *Konzentration*. Dann lässt sich die Lösung der Differenzialgleichung für die Konzentration (7.1.15),

$$\partial_t W = D \Delta W, \quad (7.2.1)$$

verwenden:

$$W(r, t) = \frac{M}{8\rho (\pi D t)^{3/2}} \exp \left[-\frac{r^2}{4Dt} \right], \quad (7.2.2)$$

abermals in dreidimensionalen Kugelkoordinaten formuliert. *Voraussetzung* dafür ist, dass die Teilchen der gelösten Substanz miteinander nicht wechselwirken, so dass die Teilchenbewegung unabhängig ist vom jeweils nächsten Teilchen.

Die Aufenthaltswahrscheinlichkeit für das Brown'sche Teilchen zur Zeit t in einem Abstand zwischen $[r, r + dr]$ ist angegeben durch $w(r, t)dr$. Nimmt man an, dass $M/\rho \equiv 1$, und mul-

²Robert Brown (*1773 Montrose, +1858 London), schottischer Botaniker.

³Albert Einstein (*1879 Ulm, +1955 Princeton).

tipliziert man das Volumen der Kugelschale hinzu, so erhält man (Abb. 7.3)

$$w(r, t)dr = \frac{1}{2\sqrt{\pi D^3 t^3}} \exp \left[-\frac{r^2}{4Dt} \right] r^2 dr . \quad (7.2.3)$$

Das *mittlere Quadrat* des Abstandes vom Ausgangspunkt des Brown'schen Teilchens zur Zeit t ist (mit $\int_0^\infty e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}/2$)

$$\langle r^2 \rangle = \int_0^\infty r^2 w(r, t) dr = 6Dt , \quad (7.2.4)$$

woraus man auf die Proportionalität

$$\sqrt{\langle r^2 \rangle} \propto \sqrt{t} \quad (7.2.5)$$

schließt.

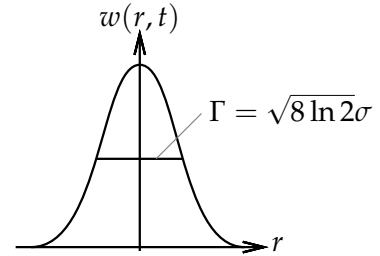


Abbildung 7.3:
Aufenthaltswahrscheinlichkeit
bei Brown'scher Bewegung

Der *Diffusionskoeffizient* D lässt sich aus der *Beweglichkeit* b berechnen: Es wirke eine konstante äußere Kraft (z. B. die Schwerkraft) $\mathbf{F}$ auf die Brown'schen Teilchen. Im *stationären* Zustand ist sie gleich dem *Widerstand* $\mathbf{v}/b$, wobei $b = \text{const}$, gegen die Teilchenbewegung:

$$\mathbf{v} = b\mathbf{F} , \quad (7.2.6)$$

wobei die Beweglichkeit b sich berechnen lässt aus den hydrodynamischen Gleichungen. Bei kugelförmigen Teilchen gibt die *Stokes'sche Formel* den Widerstand an:

$$\mathbf{F} = -6\pi\eta R\mathbf{v} , \quad (7.2.7)$$

so dass

$$b = \frac{|\mathbf{v}|}{|\mathbf{F}|} = \frac{1}{6\pi\eta R} \quad (7.2.8)$$

sein muss.⁴

⁴Bei nichtkugelförmigen Teilchen hängt der Widerstand auch von der Bewegungsrichtung ab:

$$F_i = a_{ik} v_k , \quad (7.2.9)$$

wobei a_{ik} ein symmetrischer Tensor ist. Zur Berechnung von b mittelt man dann über alle Orientierungen, so dass mit den Hauptachsenwerten a_1, a_2 und a_3 von a_{ik} für die Beweglichkeit folgt:

$$b = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} \right) . \quad (7.2.10)$$

Die lineare *Beziehung* zwischen b und D wird *Einstein-Relation* genannt,

$$D = Tb . \quad (7.2.11)$$

Der Diffusionsstrom ist

$$\mathbf{i} = -\rho D \nabla c + \rho cb \mathbf{F} . \quad (7.2.12)$$

Dabei ist der erste Term proportional zum Konzentrationsgradienten, und der zweite Term ist der äußeren Kraft geschuldet, für die $\rho c \mathbf{v} = \rho cb \mathbf{F}$ gilt. Für den Diffusionsstrom folgt also

$$\mathbf{i} = -\frac{\rho D}{(\partial_c \mu)_{T,p}} \nabla \mu + \rho cb \mathbf{F} \quad (7.2.13)$$

mit dem chemischen Potenzial der suspendierten Teilchen μ .

Das chemische Potenzial hängt von der Konzentration ab:

$$\mu = T \ln c + \psi(p, T) \quad (7.2.14)$$

$$\Rightarrow \mathbf{i} = -\frac{\rho D c}{T} \nabla \mu + \rho cb \mathbf{F} . \quad (7.2.15)$$

Im *thermodynamischen Gleichgewicht* gibt es keine Diffusion, $\mathbf{i} = 0$. Mit äußerem Feld muss im Gleichgewicht gelten:

$$\mu + U = \text{const} , \quad (7.2.16)$$

wenn U die potenzielle Energie der suspendierten Teilchen im Feld angibt. Also ist

$$\nabla \mu = -\nabla U = \mathbf{F} , \quad (7.2.17)$$

und mit $\mathbf{i} = 0$ folgt

$$0 = -\frac{\rho D c}{T} \mathbf{F} + \rho cb \mathbf{F} \quad (7.2.18)$$

und also die *Einstein-Relation* $D = Tb$ für die Beziehung zwischen Beweglichkeit und Diffusionskoeffizient, die offenbar über die *Temperatur* verknüpft sind.

Einsetzen der Beweglichkeit bei kugelförmigen Teilchen (7.2.8) ergibt für $k_B = 1$

$$D = \frac{T}{6\pi\eta R} , \quad (7.2.19)$$

die *translatorische* Diffusion⁵ suspendierter Brown'scher Teilchen.⁶

Die Beschreibung von Diffusionsprozessen analog zur Brown'schen Bewegung spielt auch heute eine sehr große Rollen in vielen Forschungszweigen – nicht nur in der Physik einschließlich Umweltphysik und Astronomie, sondern vor allem auch in der Chemie und Biologie [2, 3, 4].

7.3 Diffusion in relativistischen Systemen

Diffusion spielt auch eine Rolle in relativistischen Systemen. Dies sind meist Vielkörpersysteme wie Atomkerne, die aus *Baryonen* bestehen. In Teilchenbeschleunigern (Abb. 7.4) können sie relativistische Energien erreichen:

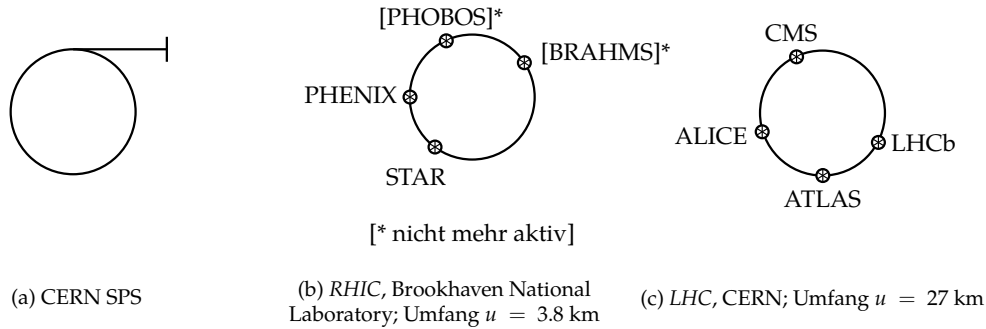


Abbildung 7.4: Schemaskizzen verschiedener Teilchenbeschleuniger mit Detektoren

- Super Proton Synchrotron SPS, CERN: Fixed-Target-Experimente mit schweren Ionen

$$E_L = 158 \text{ GeV/Teilchen } ^{208}\text{Pb} + ^{208}\text{Pb}, \quad (7.3.1)$$

$$E_{c.m.} = \sqrt{s_{NN}} = [2u^2 + 2E_L u]^{1/2} \approx 17.3 \text{ GeV} \quad (7.3.2)$$

mit der Nukleonenmasse $u = 938 \text{ MeV}$; $E_{c.m.}$ ist die Schwerpunktsenergie.

- Relativistic Heavy Ion Collider RHIC, Brookhaven (BNL):

$$100 \text{ GeV/Teilchen } ^{197}_{79}\text{Au} + 100 \text{ GeV/Teilchen Au}, \quad (7.3.3)$$

$$\sqrt{s_{NN}} = 200 \text{ GeV} = 0.2 \text{ TeV}. \quad (7.3.4)$$

⁵Es gibt auch eine Brown'sche Rotations-/Diffusionsbewegung, auf die aber nicht eingegangen wird.

⁶In der Einstein'schen Arbeit wird die folgende Notation verwendet:

$$D = \frac{RT}{N} \frac{1}{6\pi\eta d} \quad (7.2.20)$$

mit der universellen Gaskonstante $R \approx 8.31 \frac{\text{J}}{\text{K mol}}$, der Avogadro-Zahl $N = 6.03 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ und dem Radius d (entspricht R in unserer Konvention). Die Boltzmann-Konstante $k_B = 1.3 \times 10^{23} \text{ J/K}$ ist die auf ein Molekül bezogene Gaskonstante; mit $k_B = R/N \equiv 1$ entspricht das dem obigen Resultat.

Der RHIC besteht aus sechs *intersections* und ursprünglich vier, jetzt noch zwei Experimenten (s. Abb. 7.4b).

- Large Hadron Collider *LHC*, CERN:

$$\text{max. } 2.76 \text{ TeV/Teilchen } {}^{208}_{82}\text{Pb} + 2.76 \text{ TeV/Teilchen } {}^{208}_{82}\text{Pb}, \quad (7.3.5)$$

$$\sqrt{s_{\text{NN}}} = 5.52 \text{ TeV} \quad (7.3.6)$$

mit den vier großen Experimenten ATLAS, CMS, ALICE und LHCb, von denen die ersten drei auch für Experimente mit schweren Ionen geeignet sind. Die stark Lorentz-kontrahierten Kollisionspartner (Abb. 7.5) sind charakterisiert durch

- Teilchenzahlen $N_1, Z_1; N_2, Z_2$,
- Schwerpunktsenergie $\sqrt{s}$,
- Stoßparameter b ,
- Lorentz-Kontraktion $d(v) = d_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$.

Stoßparameter und Lorentz-Kontraktion sind nicht direkt messbar, gehen aber in die theoretische Beschreibung ein.



Abbildung 7.5: Lorentz-kontrahierte Stoßpartner

- 1) In *zentralen Stößen* bei Energiedichten über dem kritischen Wert $\epsilon_{\text{krit}} \approx 1.5 \frac{\text{GeV}}{\text{fm}^3}$ wird ein kurzlebiges *Quark-Gluon-Plasma* für $\approx 1 \times 10^{-23}$ s gebildet. Es entspricht dem Urzustand der Materie im Universum bis $\approx 10 \mu\text{s}$ nach dem Urknall (Abb. 7.6).
- 2) Im Verlauf der Kollision werden aus der verfügbaren relativistischen Energie so viele Teilchen erzeugt, dass eine nichtgleichgewichtstatistische Betrachtungsweise gerechtfertigt ist:
 - bei SPS-Energien $\sim 1\,700$ geladene Hadronen,
 - bei RHIC-Energien $\sim 5\,400$ geladene Hadronen,
 - bei LHC-Energien $\sim 17\,500$ geladene Hadronen.

Es wird dabei die verfügbare relativistische Energie

$$E_{av} = \sqrt{s} - u(A_1 + A_2) \quad (7.3.7)$$

in Ruhemasse und kinetische Energie erzeugter Teilchen umgewandelt. In transversaler Richtung (senkrecht zum Strahl) sind die Energieverteilungen nahe am statistischen Gleichgewicht.

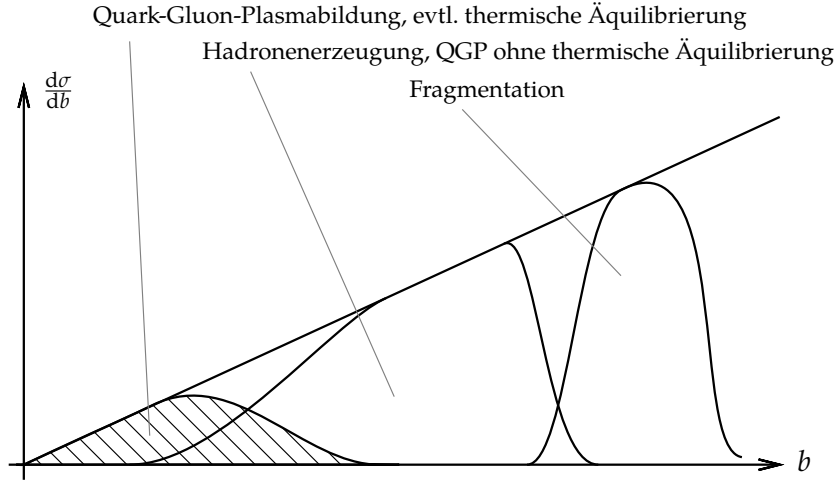


Abbildung 7.6: Kollisionseffekte abhängig vom Stoßparameter

In *longitudinaler* Richtung – parallel zum Strahl – sind die Verteilungsfunktionen entfernt vom thermodynamischen Grenzfall. Dies gilt vor allem für die Verteilung der *Rapidity*⁷ der Teilchen,

$$y = \frac{1}{2} \ln \frac{E + p_{\parallel}}{E - p_{\parallel}} = \operatorname{arctanh} \frac{p_{\parallel}}{E} \approx -\ln \tan \frac{\vartheta}{2} \equiv \eta \quad (7.3.8)$$

mit dem Streuwinkel ϑ , und der sogenannten Pseudorapidity η . Als Folge von *Stößen* und *Teilchenerzeugung* genügt die Verteilungsfunktion der Rapidity einer Diffusionsgleichung; in linearer Näherung ist für $R = R(y, t)$ [5]

$$\partial_t R = \frac{1}{\tau_y} \partial_y [(y - y_{\text{eq}}) R] + \partial_y^2 [D_y R] \quad (7.3.9)$$

mit dem Gleichgewichtswert der Rapidity y_{eq} ($= 0$ für symmetrische Systeme), der Rapidityrelaxationszeit τ_y und dem Diffusionskoeffizienten D_y , bestimmt durch die Verbreiterung der Verteilungsfunktion:

$$D_y \propto \frac{T}{\tau_y}. \quad (7.3.10)$$

Dies ist das *Dissipations-Fluktuations-Theorem*, das analog zur Einstein-Relation (7.2.11) bei der Brown'schen Bewegung die Gleichgewichtstemperatur T und die Rapidityrelaxationszeit über den Diffusionskoeffizienten verbindet.

⁷Die *Rapidity* ist das relativistische (additive) Analogon der Geschwindigkeit.

Die Lösung der linearen Diffusionsgleichung ist

$$R(y, t) = \left[\sqrt{2\pi\tau_y(t)} \cdot 2 \right]^{-1} \left(\exp \left[-\frac{(y + y_b e^{-t/\tau_y})}{2\sigma_y^2(t)} \right] + \exp \left[-\frac{(y - y_b e^{-t/\tau_y})}{2\sigma_y^2(t)} \right] \right) \quad (7.3.11)$$

für symmetrische Systeme und zwei Quellen. Die Varianz ist

$$\sigma_y^2(t) = D_y \tau_y \left[1 - \exp \left(-\frac{2t}{\tau_y} \right) \right] = \frac{T}{2k} \left[1 - \exp \left(-\frac{2t}{\tau_y} \right) \right], \quad (7.3.12)$$

wobei k die Krümmung eines parabolischen treibenden Potenzials im y -Raum ist.

Für große Zeiten $t > t_2$ mit $\Gamma_{\text{FWHM}}(t_2) = \sqrt{8 \ln 2} \sigma_y(t_2) \approx y_1$ wird aus den beiden getrennten Verteilungen eine einzige Verteilung (Abb. 7.7), die bei $y = y_{\text{eq}}$ zentriert ist und für $t \rightarrow \infty$ in die Gleichgewichtsverteilung mit Temperatur T übergeht, wie sie dem thermischen Modell zugrundeliegt. Die im relativistischen Diffusionsmodell berechneten Verteilungsfunktionen für sogenannte Nettobaryonen (Baryonen minus erzeugte Antibaryonen) können dann mit Messwerten verglichen werden, und ermöglichen Voraussagen. Da in der Regel nur geladene Hadronen (stark wechselwirkende Teilchen) gemessen werden, vergleicht man mit Nettoprotonenverteilungen.

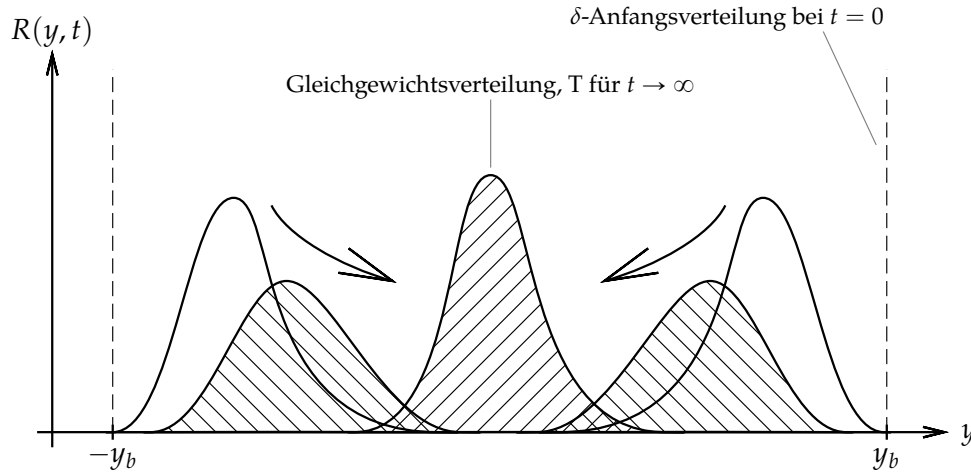


Abbildung 7.7: Schematische Darstellung der Rapidityrelaxation für Nettobaryonen (= Baryonen minus erzeugte Antibaryonen)

Für geladene Hadronen, die in relativistischen Schwerionenreaktionen erzeugt werden, sind die Voraussetzungen für die Anwendung des relativistischen Diffusionsmodells sogar noch besser erfüllt als für Nettobaryonen, da das Teilchenensemble größer ist: In einer zentralen Kollision zwischen Bleiionen am LHC bei 2.76 TeV Schwerpunktsenergie werden ca. 17 500 geladene Hadronen erzeugt, davon etwa 80 % Pionen. Die Rapidityverteilungen (Abb. 7.8) und ihre Zentralitätsabhängigkeiten werden durch das Modell gut wiedergege-

ben, wenn zusätzlich zu den beiden Fragmentationsquellen auch eine dritte Quelle für die Hadronenerzeugung bei mittleren Rapiditäten eingeführt wird. Sie beruht wesentlich auf der Teilchenproduktion in Gluon-Gluon-Stößen bei hohen Energien [6].

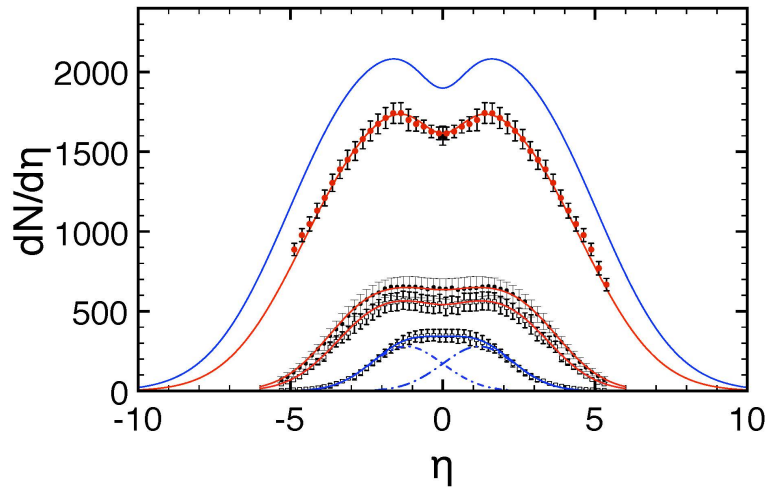


Abbildung 7.8: Verteilungen erzeugter geladener Teilchen in relativistischen Schwerionenreaktionen bei fünf Schwerpunktsenergien im relativistischen Diffusionsmodell [6] im Vergleich mit Daten [7, 8] der Schwerionencollider RHIC und LHC sowie einer Voraussage bei 5.5 TeV

Auch in asymmetrischen Systemen wie Kollisionen von Protonen mit Blei am LHC bei einer Schwerpunktsenergie von 5.02 TeV gibt das Diffusionsmodell mit geeignet gewählten Parametern die Daten gut wieder (Abb. 7.9).

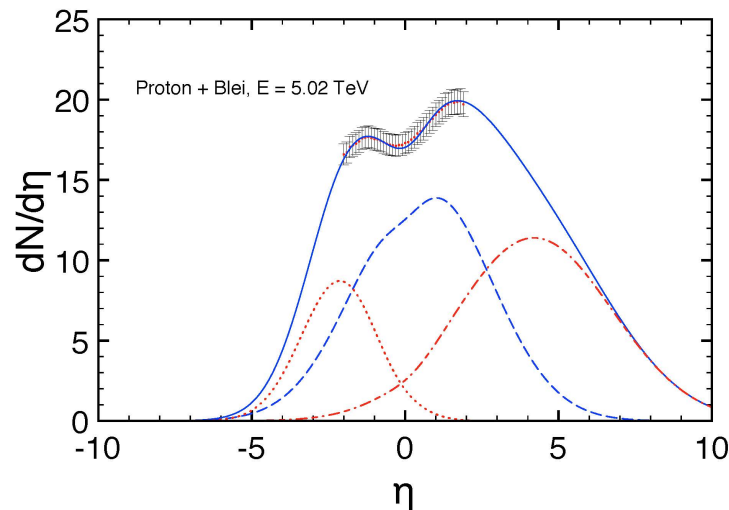


Abbildung 7.9: Verteilungen erzeugter geladener Teilchen in relativistischen Proton-Blei Kollisionen bei 5.02 TeV Schwerpunktsenergie im relativistischen Diffusionsmodell im Vergleich mit Daten [9] vom LHC

Literaturverzeichnis

- [1] Einstein, A.: Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen. Ann. Physik 17, 549 (1905)
- [2] Jost, W.: Diffusion in solids, liquids, gases. 6th printing. Academic Press, New York NY (1970)
- [3] Crank, J.: The Mathematics of Diffusion. 2. Aufl., Oxford University Press, Oxford (1980)
- [4] Cussler, E. L.: Diffusion. Mass Transfer in Fluid Systems. 2. Aufl., Cambridge University Press (1997)
- [5] Wolschin, G.: Relativistic diffusion model. Eur. Phys. J. A5 , 85 (1999)
- [6] Wolschin, G: Ultraviolet energy dependence of particle production sources in relativistic heavy-ion collisions. Phys. Rev. C 91, 014905 (2015)
- [7] Alver, B. et al.: Charged-particle multiplicity and pseudorapidity distributions measured with the PHOBOS detector in Au+Au, Cu+Cu, d+Au, and p+p collisions at ultrarelativistic energies. Phys. Rev. C 83, 024913 (2011).
- [8] Guilbaud, M. et al. (PHOBOS Collaboration): Pseudorapidity density of charged particles and its centrality dependence in Pb-Pb collisions at $\sqrt{s_{NN}} = 2.76$ TeV. Nucl. Phys. A 904, 381c (2013).
- [9] Abelev, B. et al. (ALICE Collaboration): Pseudorapidity Density of Charged Particles in p+Pb Collisions at $\sqrt{s_{NN}} = 5.02$ TeV. Phys. Rev. Lett. 110, 032301 (2013)

8 Relativistische Hydrodynamik

Relativistische Effekte müssen in der Hydrodynamik berücksichtigt werden, wenn

- 1) die Geschwindigkeit der *makroskopischen* Fluidströmung $|\mathbf{v}|$ mit der Lichtgeschwindigkeit c vergleichbar wird *oder*
- 2) die Geschwindigkeiten der *mikroskopischen* Bewegung der Fluidteilchen mit c vergleichbar werden.

Es werden relativistische Bewegungsgleichungen aufgestellt, die für die ideale Flüssigkeit den Euler-Gleichungen im nichtrelativistischen Fall entsprechen. Wir definieren dazu zunächst den Energie-Impuls-Tensor.

8.1 Energie-Impuls-Tensor einer Flüssigkeit

Im Energie-Impuls-Tensor

$$T^{\alpha\beta}, \quad \alpha, \beta, \gamma = 0, 1, 2, 3; \quad i, k, l = 1, 2, 3; \quad x^0 = ct; \quad x^1; \quad x^2; \quad x^3. \quad (8.1.1)$$

steht das Element $T^{00} = T_{00}$ für die Energiedichte, cT^{0i} ist die vektorielle Energiestromdichte (nichtrelativistisch: $\mathbf{j}$) und $\frac{T^{0i}}{c} = -\frac{T_{0i}}{c}$ die Impulsstromdichte.

In einem *lokalen Ruhesystem*, d. h. bei ruhendem Volumenelement, für welches das *Pascal'sche Gesetz* (2.5.2) gilt, ist der von einem bestimmten Flüssigkeitselement ausgeübte Druck in allen Richtungen gleich groß und überall senkrecht zu der Fläche, auf die er wirkt:

$$T^{ik} df_k = p df_i \quad (8.1.2)$$

$$\Rightarrow T_{ik} p \delta_{ik}. \quad (8.1.3)$$

Die Komponenten der Impulsstromdichte $\frac{T^{0i}}{c}$ sind im lokalen Ruhesystem gleich null.

$T^{00} \equiv \epsilon$ ist die Dichte der (*inneren*) Energie des Fluids im lokalen Ruhesystem. Also ist der *Energie-Impuls-Tensor* im lokalen *Ruhesystem*:

$$t^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \epsilon & & & \\ & p & & \\ & & p & \\ & & & p \end{pmatrix}. \quad (8.1.4)$$

Wir wollen ihn nun in ein beliebiges (bewegtes) Bezugssystem transformieren.

Die Komponenten der *Vierergeschwindigkeit* der Flüssigkeitsströmung u^α im lokalen Bezugssystem sind $u^0 = 1$ und $u^i = 0$. Im bewegten System ist der *Energie-Impuls-Tensor*

$$T^{\alpha\beta} = w u^\alpha u^\beta - p g^{\alpha\beta} \quad (8.1.5)$$

mit dem metrischen Tensor

$$g^{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \quad (8.1.6)$$

und der Enthalpie pro Volumeneinheit $w = \epsilon + p$ (auch ϵ ist hier auf die Volumeneinheit bezogen, während es im nichtrelativistischen Fall auf die Masseneinheit bezogen war). Wir sehen sogleich, dass $T^{\alpha\beta} = t^{\alpha\beta}$ für $u^0 = 1$, $u^i = 0$.

In dreidimensionaler Schreibweise sind die Komponenten des Energie-Impuls-Tensors

$$T^{ik} = \frac{w v^i v^k}{c^2 \left[1 - \frac{v^2}{c^2}\right]} + p \delta^{ik}, \quad (8.1.7)$$

$$T^{0i} = \frac{w v^i}{c \left[1 - \frac{v^2}{c^2}\right]}, \quad (8.1.8)$$

$$T^{00} = \frac{w}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - p = \frac{\epsilon + p \frac{v^2}{c^2}}{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (8.1.9)$$

Der *nichtrelativistische Grenzfall* $v \ll c$ beschreibt kleine Geschwindigkeiten der inneren (mikroskopischen) Bewegungen der Fluidteilchen.

Beim Grenzübergang ist zu beachten, dass die relativistische innere Energie ϵ die Ruheenergie Nmc^2 der N einzelnen Fluidteilchen enthält. Die *Teilchenzahldichte* n ist dabei auf die Einheit des Ruhesystems bezogen. In den *nichtrelativistischen* Ausdrücken wird jedoch die Energiedichte auf die Volumeneinheit im Laborsystem bezogen, in dem sich das Fluidele-

ment *bewegt*:

$$mn \xrightarrow{v \ll c} \rho \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \approx \rho - \frac{\rho v^2}{2c^2} \quad (8.1.10)$$

$$\Rightarrow mnc^2 \rightarrow \rho c^2 - \frac{\rho v^2}{2} \quad (8.1.11)$$

mit der nichtrelativistischen Massendichte $\rho = \frac{m}{V}$, der nichtrelativistischen Energiedichte $\epsilon \ll \rho c^2$ und dem nichtrelativistischen Druck $p \ll \rho c^2$. Hier ist ρc^2 die Ruheenergie des Systems. Daraus folgt der nichtrelativistische Grenzwert für die Energiedichte T_{00} :

$$T_{00}^{\text{nr}} = \rho c^2 + \epsilon + \frac{\rho v^2}{2}, \quad (8.1.12)$$

wobei die letzten beiden Summanden der nichtrelativistischen Energiedichte entsprechen, sowie der Impulsstromdichtetensor

$$T_{ik}^{\text{nr}} = \rho v_i v_k + p \delta_{ik}. \quad (8.1.13)$$

Beim Übergang zum nichtrelativistischen Grenzfall geht der einfache Zusammenhang zwischen Impulsdichte und Energiestromdichte

$$c^2 \frac{T^{0i}}{c} = c T^{0i} \quad (8.1.14)$$

verloren, weil die nichtrelativistische Energie die Ruheenergie nicht enthält: $c^2 T_{\text{nr}}^{0i}/c \neq \mathbf{j}$.

8.2 Relativistische Bewegungsgleichungen

Für ideale Fluide (d. h. analog zu den *Euler-Gleichungen*) folgen die Bewegungsgleichungen im nichtrelativistischen Fall direkt aus der *Energie-/Impulserhaltung*:

$$\partial_\beta T_\alpha^\beta = 0 \quad (8.2.1)$$

mit $T^{\alpha\beta} = w u^\alpha u^\beta - p g^{\alpha\beta}$ und der Enthalpie pro Volumeneinheit $w = \epsilon + p$. In diesem Energie-Impuls-Tensor sind dissipative Prozesse (Viskosität, Wärmeleitung) *noch nicht* berücksichtigt, daher ist er nur für ideale Fluide gültig. Die Ableitung des Analogons zu den Navier-Stokes-Gleichungen ist komplizierter [1].

Die *Teilchenzahlerhaltung* wird durch die Entsprechung der *Kontinuitätsgleichung* ausgedrückt:

n^α ist der Vierervektor des Teilchenstromes, n^0 die Teilchenzahldichte und n^i der Vektor des Teilchenstroms, wobei

$$n^\alpha = nu^\alpha \quad \text{mit der skalaren Teilchenzahldichte } u, \quad (8.2.2)$$

$$u^\alpha = \left(\gamma, \gamma \frac{\mathbf{v}}{c} \right) \quad \text{mit } \gamma = 1/\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (8.2.3)$$

In relativistischen Systemen mit Teilchenerzeugung wird die Teilchenzahl durch die Bedingungen des thermischen Gleichgewichts festgelegt.

Die *Kontinuitätsgleichung* besagt, dass die Viererdivergenz des Stromvektors verschwindet,

$$\partial_\alpha (nu^\alpha) = 0. \quad (8.2.4)$$

Zusammen mit dem Energie-/Impulstensor $T^{\alpha\beta} = wu^\alpha u^\beta - pg^{\alpha\beta}$ folgt durch Differenzieren

$$\partial_\beta T_\alpha^\beta = u_\alpha \partial_\beta (wu^\beta) + wu^\beta \partial_\beta u_\alpha + \partial_\alpha p \stackrel{!}{=} 0 \quad (8.2.5)$$

wegen der Energie-/Impulserhaltung. Durch Projektion auf die Richtung von u^α und unter Annahme der Normalisierung $u_\alpha u^\alpha = 1$ sowie mit Verwendung der Invarianz des Viererskalarsprodukts, aus der $u_\alpha \partial_\beta u^\alpha = 0$ folgt, erhält man

$$\partial_\beta (wu^\beta) - u^\beta \partial_\beta p = 0. \quad (8.2.6)$$

Substituiert man wu^β mit $nu^\beta (w/n)$ und benutzt (8.2.4), so fällt der zweite Term im Differenzial weg, und man erhält

$$nu^\beta \left[\partial_\beta \frac{w}{n} - \frac{1}{n} \partial_\beta p \right] = 0. \quad (8.2.7)$$

Aus der Enthalpie gewinnt man das Enthalpiedifferenzial

$$w = T \cdot s + p \quad (8.2.8)$$

$$\Rightarrow dw = Tds + dp \quad (8.2.9)$$

$$\Rightarrow d\left(\frac{w}{n}\right) = Td\left(\frac{s}{n}\right) + \frac{1}{n}dp, \quad (8.2.10)$$

wobei der letzte Ausdruck der Enthalpie für ein Teilchen entspricht. $1/n$ ist das auf ein Teilchen entfallende Volumen und s die auf die Einheit des *Ruhevolumens* bezogene Entropie. Damit wird Gleichung (8.2.7) zu

$$u^\beta \partial_\beta \left(\frac{s}{n} \right) = 0, \quad (8.2.11)$$

d. h., die Bewegung verläuft – wie bei nichtrelativistischen *idealen* Fluiden – *adiabatisch*, die Entropie ändert sich nicht.

Mit der Kontinuitätsgleichung (8.2.4) lässt sich (8.2.11) schreiben als

$$\partial_\beta (su^\beta) = 0, \quad (8.2.12)$$

d. h., die Viererdivergenz des *Entropiestromes* su^β verschwindet.

Die relativistische Verallgemeinerung der *Euler'schen Gleichungen* erhält man durch geeignete Projektion und Umformung der Gleichung für die Energie-/Impulserhaltung als

$$wu^\beta \partial_\beta u_\alpha = \partial_\alpha p - u_\alpha u^\beta \partial_\beta p, \quad (8.2.13)$$

und für eine *isentropen stationäre* Strömung folgt die relativistische Verallgemeinerung der *Bernoulli'schen Gleichung* als

$$\frac{\gamma w}{h} = \text{const} \quad (8.2.14)$$

mit $\gamma = 1/\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \approx 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}$ für $v \ll c$ und der Enthalpie pro Volumeneinheit $w = \epsilon + p$.

Literaturverzeichnis

- [1] Landau, L. D., Lifschitz, E. M.: TP VI – Hydrodynamik, 5. Aufl., Akademie Verlag (1991)

9 Astrophysikalische Hydrodynamik

Das Gebiet der astrophysikalischen Hydrodynamik konzentriert sich auf die Betrachtung statischer und dynamischer Probleme bei Fluiden in nichtterrestrischen Umgebungen. Für weiterführende Literatur wird beispielsweise verwiesen auf das Buch von Shore [1].

Da *Sterne* aus Gasen bestehen, sollten dort kinetische Gastheorie und Gasdynamik dominieren. Das Gas ist jedoch meist im Wesentlichen *homogen* und erzeugt sein eigenes *Gravitationsfeld*; es simuliert so die Bewegung eines *Fluids* im Feld. Die *mittlere freie Weglänge* λ ist im Vergleich zu jeder relevanten Größenskala des Sterns klein, so dass Störungen ausgewaschen werden und die Sternstruktur kontinuierlich ist:

$$\lambda = \frac{u}{\sigma \rho} \quad (9.0.1)$$

$$= \frac{1.7 \times 10^{-27}}{1.5 \times 10^3 \cdot 4 \times 10^{-30}} \text{m} \approx 0.3 \text{ m} \quad (9.0.2)$$

$$\ll R_{\odot} = 6.96 \times 10^8 \text{ m} \quad (9.0.3)$$

mit der Dichte $\rho \approx 1.5 \times 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ in stellarer Materie, der atomaren Masseneinheit $u = 1.7 \times 10^{-27} \text{ kg}$ und dem Wirkungsquerschnitt $\sigma \approx 40 \text{ mb} = 4 \times 10^{-30} \text{ m}^2$.

Sterne (und andere kosmische Materieansammlungen) können also stets auf bestimmten Längen- und/oder Zeitskalen durch eine *hydrodynamische Approximation* beschrieben werden. Alle Arten von hydrodynamischem Fluss, die sich auf der Erde beobachten lassen, finden sich auch im Universum, jedoch auf wesentlich größeren Skalen:

- der magnetohydrodynamische Fluss,
- Turbulenz,
- Überschallbewegung,
- Instabilitäten (Schocks) etc.

Hier wird ein repräsentatives Kapitel herausgegriffen: *Schockwellen in der Astrophysik*.

9.1 Schockwellen

Ursprung der theoretischen Behandlung von Schockwellen ist Riemanns¹ Theorie über die Ausbreitung akustischer Störungen 1860 [2]. Weitere wichtige Erkenntnisse gehen zurück auf Laborversuche zum Überschallfluss von Ernst Mach² 1880 und die Untersuchung von Überschallgrenzschichten durch Ludwig Prandtl 1940, die in das Manhattan-Projekt einfluss.

In der Astrophysik sind *Schockwellen* eher die Regel als die Ausnahme. Viele der Beobachtung zugängliche Regionen im Universum sind *weit entfernt* vom thermodynamischen *Gleichgewicht*; oft sind die Zeitskalen für Energiedissipation sehr groß. Die *Entweichgeschwindigkeiten* sind für die meisten kosmischen Objekte weit *größer* als die Schallgeschwindigkeit, so dass alles Material, das ins interstellare Medium gelangt, supersonische Geschwindigkeiten haben muss und erst später Energie und Impuls dissipiert, bis thermisches Gleichgewicht erreicht wird.

Im *interstellaren Medium* und bei vielen stellaren Phänomenen ist die mittlere freie Weglänge so groß, dass die *Viskosität* in erster Ordnung *vernachlässigbar* ist. Astrophysikalische Schocks können daher zunächst als *nicht viskos* behandelt werden; später wird die Dissipation an der Schockfront einbezogen.

Da Schocks *Diskontinuitäten* im Fluss darstellen, müssen sie stark nichtlinear sein; sie entstehen als Ergebnis einer Instabilität, durch die der Fluss als Funktion der Geschwindigkeit *nichtlinear* wird. Ein typisches Beispiel sind Schallwellen: Hier sind Kontinuitäts- und Bewegungsgleichung erfüllt, und bei anwachsender Dichte wächst die Ausbreitungsgeschwindigkeit. Die Ausbreitung einer Störung verläuft anhand der nachfolgenden Gleichungen:

(1) *Kontinuitätsgleichung* in einer Dimension:

$$\partial_t \rho + \partial_x (\rho u) = 0, \quad (9.1.1)$$

(2) *Bewegungsgleichung* in einer Dimension:

$$\partial_t u + u \partial_x u = -\frac{1}{\rho} \partial_x p, \quad (9.1.2)$$

wobei der Zusammenhang $p(\rho)$ über die Zustandsgleichung gegeben ist.

Es ist $p = p(\rho)$. Ferner gilt

$$\Phi := \partial_\rho p \quad (9.1.3)$$

¹Georg Bernhard Riemann (*1826 Breselenz bei Dannenberg, +1866 Selasca bei Verbania).

²Ernst Mach (*1838 Chirlitz-Turas, +1916 Vaterstetten bei München).

und

$$\Lambda := \ln(\rho/\rho_0) \quad (9.1.4)$$

$$\Rightarrow \partial_x \Lambda = (\partial_x \rho) / \rho, \quad \partial_t \Lambda = (\partial_t \rho) / \rho. \quad (9.1.5)$$

Aus Kontinuitätsgleichung (9.1.1) und Bewegungsgleichung (9.1.2) folgt also

$$\partial_t \Lambda + u \partial_x \Lambda = -\partial_x u \quad \text{und} \quad (9.1.6)$$

$$\partial_t u + u \partial_x u = -\Phi \partial_x \Lambda, \quad (9.1.7)$$

und durch Multiplikation von (9.1.6) mit $\Phi^{1/2}$ und Kombination der beiden Gleichungen erhält man

$$\partial_t u + \left(u - \Phi^{1/2}\right) \partial_x u = \Phi^{1/2} \left[\partial_t \Lambda + \left(u - \Phi^{1/2}\right) \partial_x \Lambda \right]. \quad (9.1.8)$$

Multipliziert man (9.1.6) stattdessen mit $(-\Phi^{1/2})$, so erhält man ein analoges Resultat mit veränderten Vorzeichen in den inneren Klammern. Daraus leiten wir eine neue Propagationsbedingung ab: Die *Störung* bewegt sich mit

$$U_{\pm} = u \pm \Phi^{1/2}. \quad (9.1.9)$$

Durch die Beziehung

$$\Phi = \partial_\rho p \quad (9.1.10)$$

geht die Zustandsgleichung in die Propagationsbedingung ein. Je nach der Abhängigkeit $p(\rho)$ des Drucks von der Dichte wird die Störung im Vergleich zur konstanten Schallgeschwindigkeit *beschleunigt* oder *abgebremst*.

Ist die Schallgeschwindigkeit dichteunabhängig, so bewegt sich die Störung mit konstanter Geschwindigkeit; variiert aber die Schallgeschwindigkeit mit der Dichte, so steigt sie bei Kompression (da $\Phi > 0$); die Welle wird beschleunigt.

Als Bedingungen für die Wellenfront dienen die *Riemann-Invarianten* [2]

$$\left(\frac{dx}{dt} \right)_{\pm} = u \pm (\partial_\rho p)^{1/2}, \quad (9.1.11)$$

die aus der Methode der Charakteristiken hervorgehen. Die zugehörigen Charakteristiken sind Linien in der (x, t) -Ebene. Alternativ können die Riemann-Invarianten (9.1.11) mit der Schallgeschwindigkeit c_S geschrieben werden als

$$\frac{dx}{dt} = v \pm \int \frac{dp}{\rho c_S}. \quad (9.1.12)$$

Die Schallgeschwindigkeit ist über die Zustandsgleichung

$$p = \kappa \rho^n \quad (9.1.13)$$

eine Funktion der Dichte:

$$c_S = (\partial_\rho p)^{1/2} = \left(\frac{\kappa p}{\rho} \right)^{1/2} \quad (9.1.14)$$

mit $n = 1 + 2/f \equiv c_p/c_V$ bei idealen Gasen.

Entlang der so definierten Trajektorien werden die erhaltenen Flussgrößen durch das Fluid transportiert. Ist in einer dieser Größen eine *Diskontinuität* enthalten, so wird sie ebenfalls der durch die Riemann-Invarianten gegebenen Trajektorie folgen.

Beispiel: u ist die Geschwindigkeit eines Kolbens, der in ein Gas stößt. u ist also äußere Bedingung für den Fluss. Ist dieser schneller als der Schall (Abb. 9.1), kann er sich nicht an Änderungen von u anpassen.

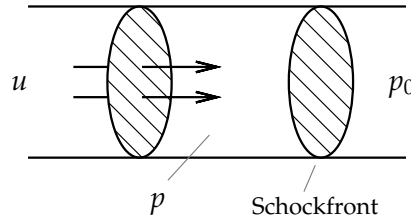


Abbildung 9.1: Schockfront, von Kolben verursacht, in Zylinder

Ausgehend von der Zustandsgleichung (9.1.13) mit $n = c_p/c_V$ folgt für die Riemann-Invarianten

$$\left(\frac{dx}{dt} \right)_\pm = u \pm \frac{2c_S}{n-1}, \quad (9.1.15)$$

und die Ausbreitungsgeschwindigkeit des Fluids ist

$$u_\pm = c_{s,0} \cdot \left(1 \pm \frac{n-1}{n+1} \left[\left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{(n-1)/2} - 1 \right] \right). \quad (9.1.16)$$

Ist sie = 0, so bleibt das Fluid ungestört.

Also wächst mit zunehmender Dichte auch die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Störung; darauf beruht die Ausbildung der Schockwelle. An einem bestimmten Punkt wird das dichtere Material das weniger dichte überholen; die Schockfront baut sich auf.

9.2 Rankine-Hugoniot-Bedingungen

Im Fluss gibt es dabei *drei erhaltene Größen*:

- Massenfluss,
- Impulsfluss,
- Enthalpiefluss.

Daraus erhält man Bedingungen für die Änderung der thermodynamischen Variablen längs einer Schockfront: die *Rankine-Hugoniot-Bedingungen*.

Bei einem gegebenem Dichte- oder Drucksprung und $n = \text{const}$ ($n = 5/3$ für ein ideales Gas) lassen sich die folgenden algebraische Bedingungen für die Änderung der übrigen thermodynamischen Variablen längs der Schockfront ableiten:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(n+1)p_2 + (n-1)p_1}{(n-1)p_2 + (n+1)p_1} \quad (9.2.1)$$

worin die Angaben p_1 und ρ_1 sich auf die Zeit vor dem Schock beziehen, p_2 und ρ_2 auf die Zeit danach. Die Ableitung erfolgt mit den Flussgeschwindigkeiten v_1 und v_2 , der Bedingung $v_2 = (\rho_1/\rho_2)v_1$ (Impulserhaltung) und der Energieerhaltung $\rho_1 v_1^2 + p_1 = \rho_2 v_2^2 + p_2$.

Bei starkem Schock ist $p_2 \ll p_1$, und also

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} \rightarrow \frac{n+1}{n-1}. \quad (9.2.2)$$

Im idealen Gas, wo $n = 5/3$, gilt also $\rho_2/\rho_1 = 4$. Die Kompression ist in einem Medium mit *kleineren* n (wie in einem strahlungsdominierten Gas) *größer* (z. B. $n = 4/3 \Rightarrow \rho_2/\rho_1 = 7$), da das Medium stärker kompressibel ist. Da der *Dichtesprung* umgekehrt proportional zum *Geschwindigkeitssprung* ist, lassen sich die relevanten Größen durch Messen der Geschwindigkeiten über die Schockfront bestimmen.

Beim Schockzylinder ist umgekehrt der Drucksprung gegeben, und der Geschwindigkeitssprung lässt sich aus den Rankine-Hugoniot-Bedingungen bestimmen.

Einige astrophysikalische Anwendungen der Rankine-Hugoniot-Bedingungen sind:

- *Flare an der Sonnenoberfläche* (Eruption): Zeitskalensprung von 1s $\rightarrow$ 1h, Frequenzsprung von Röntgenbereich $\rightarrow$ 100 fm. Hochenergetisches Phänomen; Strahlung und Teilchen werden aus einer kleinen Region in kurzer Zeit freigesetzt. Expandiert in die Corona und das interplanetare Medium (ρ klein) in Form einer Schockwelle. Die Rankine-Hugoniot-Bedingungen geben Aufschluss über die Bedingungen bei der Entstehung.

- *Supernova*: Die Expansionsgeschwindigkeit lässt sich anhand der Spektralverschiebung der Emissionslinien messen. Wie vermischt sich die Materie mit dem interstellaren Medium und was lässt sich über die Produktion der schweren Elemente aussagen? Mit den Rankine-Hugoniot-Bedingungen und dem Geschwindigkeitssprung gelangt man zur *Plasmadiagnostik*, die eine Berechnung der *Häufigkeiten* aus den gemessenen *Emissionslinien* ermöglicht.
- *H-II-Regionen* (z. B. M42 im Orion: vier heiße Sterne im H-II-Nebel, $H-II \equiv$ einfach ionisierter Wasserstoff): Ein Stern ist im Zentrum eines diffusen gasförmigen (interstellaren) Mediums; er sei heiß genug, um das Medium zu ionisieren. Scheint der Stern lange genug, so wird genügend Energie in das Medium gepumpt, so dass es sich aufheizt und expandiert. Also bewegt sich eine Front mit einer Diskontinuität in Druck und Ionisierung auswärts im interstellaren Medium: ein *Ionisierungsschock* mit einer Diskontinuität in der Enthalpie über die Ionisierungsregion.

Die Ionisierung verändert die *Enthalpie* und die *Entropie* des Gases: ein schwacher Schock entsteht. An der expandierenden Front entsteht eine komplexe Struktur, im weiteren bewegt sich jedoch eine *heiße ionisierte Region* in das *kühle interstellare Medium*.

Zwei erweiterte Probleme, die hier aber nicht ausgeführt werden:

1. *Zusätzliches magnetisches Feld*: Erhaltung des magnetischen Flusses $\Rightarrow$ weitere Gleichung zu den Rankine-Hugoniot-Bedingungen, die analog zur Erhaltung des Massenflusses ist; die Sprungkonditionen an der Schockfront ändern sich.
2. *Wechselwirkende Schocks*.

Für die meisten hydrodynamischen Probleme in der Astrophysik sind numerische Rechnungen die Regel. Manchmal sind jedoch analytische Abschätzungen und Überschlagsrechnungen nützlich.

Beispiel: Dichteschockwellen, etwa Spiralarmschocks in Galaxien.

Wir betrachten eine flache Spiralgalaxie mit Dichtestörung in der stellaren Komponente der Scheibe. Diese verursacht eine Störung im Gravitationspotenzial über die Poisson-Gleichung. Das Gas strömt durch die Scheibe und reagiert auf die Störung [3]. Bei Dichtestörungen kann durch Gravitationsbeschleunigung Überschallgeschwindigkeit erreicht werden.³

Wir legen also die folgenden Voraussetzungen zugrunde:

- Die Dichtewelle hat die Frequenz Ω_p ,
- die Scheiben sind dünn und bestehen aus Gas und Sternen,
- sie wird nur von den Sternen unterstützt,

³Das Gas beschleunigt, wenn es in das durch die Stürme erzeugte Gravitationspotenzial eintritt, und brennt ab beim Austritt. Die nichtlinearen Bewegungsgleichungen zeigen dabei Schocklösungen.

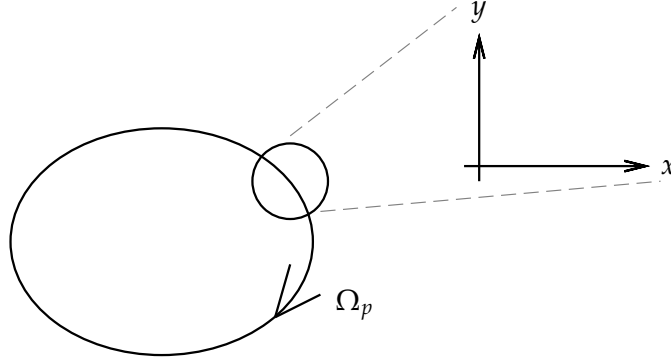


Abbildung 9.2: Rotierendes Bezugssystem

- die Welle bewegt sich langsam im Vergleich zur Rotationsgeschwindigkeit der Galaxie selbst.

All diese Bedingungen begünstigen eine lokale Analyse mit *stationärem* Fluss.

Wir formulieren die Bewegungsgleichungen im rotierenden Bezugssystem (Abb. 9.2):

$$u\partial_x + v\partial_y u + fv = -\frac{c_s^2}{\Sigma}\partial_x\Sigma - \partial_x\Phi, \quad (9.2.3)$$

$$u\partial_x v + v\partial_y v - fu = -\frac{c_s^2}{\Sigma}\partial_y\Sigma - \partial_y\Phi. \quad (9.2.4)$$

Die Kontinuitätsgleichung lautet

$$\partial_x(\Sigma u) + \partial_y(\Sigma v) = 0. \quad (9.2.5)$$

Die Geschwindigkeit der Dichtewelle wird von u , die Geschwindigkeit der Rotation von v angegeben: $\partial_x v = -f$.

Sei nun der Fluss parallel zur x -Richtung, und zudem bestehe keine Abhängigkeit der Bewegung von y . Dann lässt sich das Gravitationspotenzial um das lokale Dichtemaximum im Spiralarm Φ_0 entwickeln:

$$\Phi(x, y) \approx \Phi_0 + \frac{1}{2}(\partial_x^2\Phi)x^2 + \frac{1}{2}(\partial_y^2\Phi)y^2. \quad (9.2.6)$$

Der zweite Term verschwindet, da die Dichte längs des Arms konstant ist. Also vereinfacht sich Gleichung (9.2.3) zu

$$u\partial_x u + fv = \frac{c_s^2}{\Sigma} - (\partial_{x^2}^2\Phi)_0 x^2, \quad (9.2.7)$$

und die Kontinuitätsgleichung (9.2.5) wird zu

$$\Sigma\partial_x u + u\partial_x\Sigma = 0. \quad (9.2.8)$$

Eliminiert man den Druckterm in (9.2.7), so lässt sich der Fluss approximieren:

$$\frac{1}{u} (u^2 - c_S^2) \partial_x u = f v - \Phi_0'' x \quad \text{und} \quad (9.2.9)$$

$$\partial_x v = -f . \quad (9.2.10)$$

Das Gas wird also in Richtung *auf das galaktische Zentrum abgelenkt* als Folge der Störung; dort wird es zu Akkretionsmaterial für das *zentrale schwarze Loch*.

Literaturverzeichnis

- [1] Shore, S. N.: An Introduction to Astrophysical Hydrodynamics. Academic Press, 1992
- [2] Riemann, B.: Ueber die Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungsweite. Abh. Kgl. Ges. Wiss. zu Göttingen, 8, 1 (1860)
- [3] Roberts, W. W.: Large-Scale Shock Formation in Spiral Galaxies and its Implications on Star Formation. Astrophys. Journal 158, 123 (1969)

10 Hydrodynamik der Superflüssigkeiten

10.1 Grundlagen

Als Quantenflüssigkeiten bezeichnet man Flüssigkeiten in der Nähe des absoluten Nullpunkts, wo *Quanteneffekte* ins Spiel kommen. Bis 0 K bleibt nur *Helium* flüssig:

- ^4He : Kern und Atom haben Spin 0 $\Rightarrow$ Bose-Einstein-Statistik (Bose-Flüssigkeit),
- ^3He : Kern und Atom haben Spin $1/2 \Rightarrow$ Fermi-Dirac-Statistik (Fermi-Flüssigkeit).

Wir wollen uns zunächst auf den Fall der Bose-Einstein-Statistik konzentrieren.

Kühlt man unter den Siedepunkt von 4.18 K durch Evaporation (Vakuumpumpe), so kocht ^4He mit kleinen Bläschen. Am λ -Punkt bei 2.18 K (Übergang von He I zu He II) kocht es plötzlich stark auf, hört aber anschließend völlig auf: das ^4He ist superfluid geworden (Abb. 10.1). Wärme wird nun nahezu widerstandslos abgeleitet, die *Wärmeleitfähigkeit* steigt unterhalb des λ -Punktes um das $\sim 10^6$ -fache. Weitere Folgen sind:

- Die *Viskosität sinkt* [1] ebenfalls um das 10^6 -fache (Messung: Fluss durch Kapillare¹),
- ^4He kriecht als dünner Film die Wände hoch.

Die Wärmekapazität *divergiert* am Phasenübergang.

Zum λ -Übergang: Der Phasenübergang in der zweiten Ordnung ist ein Knick im Phasendiagramm orthogonal zur Tangente, der dazu führt, dass der Graph Wärmekapazität als Funktion der Temperatur an den griechischen Buchstaben λ erinnert (vgl. Abb. 10.2). Demgegenüber sind Phasenübergänge erster Ordnung durch einen Sprung in der Entropie s (und einer Divergenz der Wärmekapazität und der Kompressibilität) gekennzeichnet (vgl. Abb. 10.3).

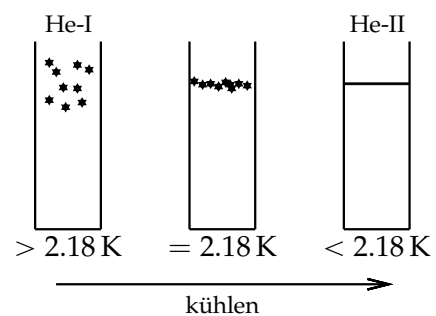


Abbildung 10.1: λ -Übergang

Die Fermi-Flüssigkeit ^3He wird ebenfalls superfluid, jedoch erst bei $T \lesssim 10^{-3}$ K; die Hydrodynamik ist schwieriger als bei ^4He wegen des komplizierten Ordnungsparameters. (Meist hat ^4He einen geringen Anteil ($\sim 1.3 \times 10^{-3} \%$) ^3He als Verunreinigung.)

¹1938 durch Pjotr Leonidowitsch Kapiza (*1894 Kronstadt, †1984 Moskau)

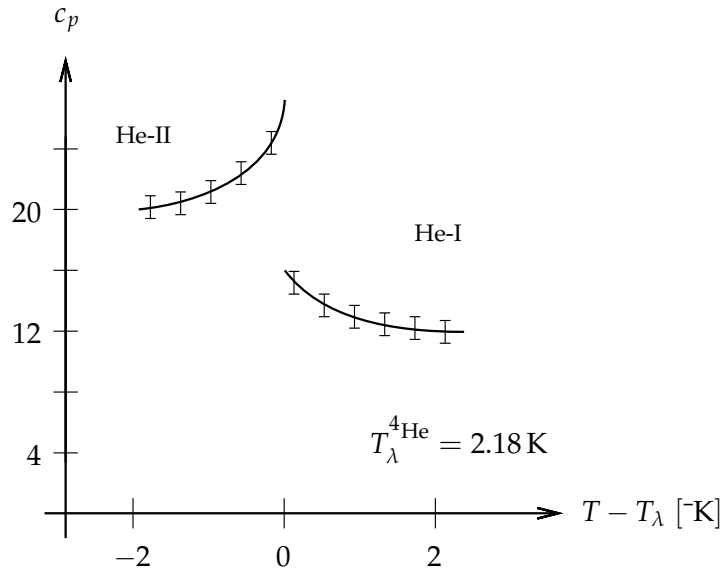
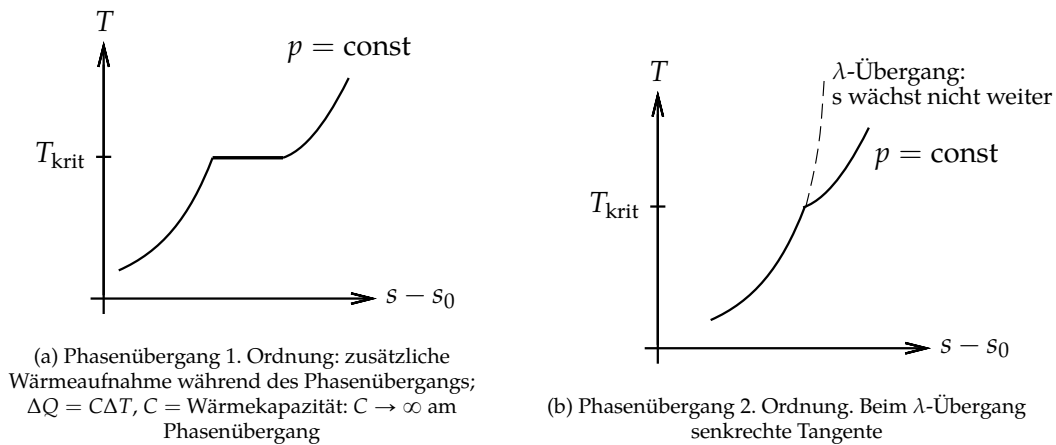
Abbildung 10.2: λ -Übergang

Abbildung 10.3: Phasenübergänge

Die *Hydrodynamik der superfluiden Flüssigkeit* kann auf der Basis einer Theorie beschrieben werden, die Tisza [2] und Landau [3] unabhängig voneinander für He II entwickelt haben². Sie ist ein makroskopisches Zweifluidmodell, bei dem es zwei Arten von Schallwellen gibt. Für $T_\lambda > T > 0$ verhält sich He II wie ein Gemisch aus zwei Flüssigkeiten:

- 1) *superfluid*, ohne Viskosität; mangels Reibung wird kein Impuls zwischen den Flüssigkeiten übertragen,
- 2) *normal*, *viskos*.

Es existieren gleichzeitig *zwei Strömungen*, die durch eine bestimmte effektive Masse charakterisiert sind: eine normal, die andere superfluid (s. die Analogie zur Koexistenz von Flüssigkeit und Dampf in Abb. 10.4; es handelt sich dabei nicht wirklich um die Komponenten eines

²László Tisza 1940 (*1907 Budapest, †2009 Cambridge/Mass.); Lew D. Landau 1941.

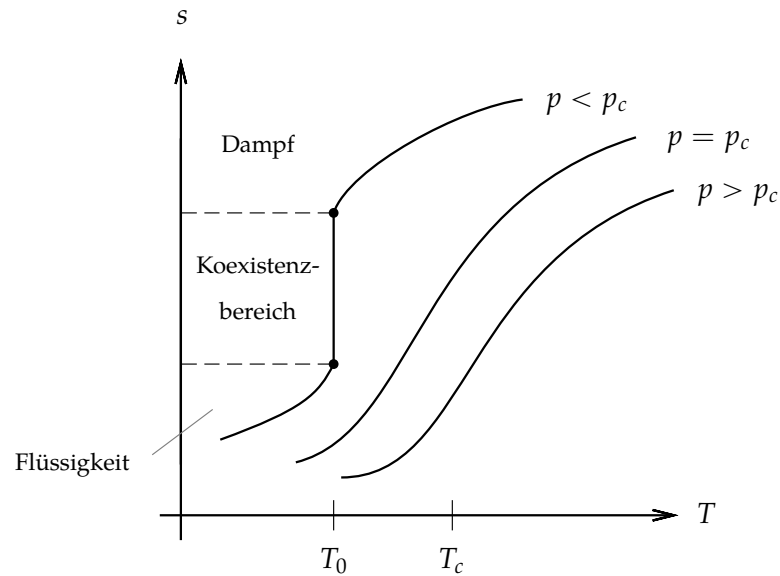


Abbildung 10.4: Koexistenz zweier Phasen

Gemisches). Bei der Kapillarströmung von He II im Spalt handelt es sich um die superfluide Strömung; die normale Strömung bleibt im Gefäß und strömt mit normaler Viskosität durch den Spalt. Eine rotierende Scheibe in He II erzeugt normale Strömung mit der dazugehörigen Viskosität (eine Messung der Zähigkeit durch Dämpfung von Torsionsschwingungen ergibt den normalen η -Wert).

Die *superfluide* Strömung transportiert *keine Wärme*. Sie ist stets eine *Potenzialströmung*.

Die normale Strömung ist eine Strömung des Gases der Elementaranregungen; die Anregungen verhalten sich wie Quasiteilchen, die sich im Flüssigkeitsvolumen bewegen und bestimmte Impulse und Energien haben.

Die *Entropie* von He II wird durch die statistische Verteilung der Elementaranregungen bestimmt. Deshalb wird bei jeder Strömung, bei der das Gas der Elementaranregungen in Ruhe bleibt, *keine* Entropie übertragen: Eine superfluide Strömung verursacht *keine* Entropieübertragung und *keinen* Wärmetransport. Also ist eine rein superfluide Strömung in He II *thermodynamisch reversibel*.

Der Mechanismus für den *Wärmetransport* in He II ist die Wärmeübertragung durch die normale Strömung der Flüssigkeit. Jede Temperaturdifferenz ruft eine *normale* und eine *superfluide* innere Strömung hervor, sie können sich hinsichtlich ihrer *Masse* kompensieren, so dass kein realer *Massentransport* stattfindet.

Sei $\mathbf{v}_s$ die Geschwindigkeit der superfluiden, $\mathbf{v}_n$ die der normalen Strömung. Die Entropiestromdichte ist gegeben durch $\mathbf{v}_n \rho s$, wobei s die Entropie pro Masseneinheit angibt, und $\mathbf{q} = \rho T s \mathbf{v}_n$ ist die Wärmestromdichte. Die superfluide Strömung ist eine *Potenzialströmung*, es

gilt also

$$\nabla \times \mathbf{v}_s = 0 \quad (10.1.1)$$

zu jeder Zeit und im ganzen Volumen des Fluids. Die Elementaranregungen mit großer Wellenlänge (also kleinen Energien und Impulsen) sind Schallquanten (*Phononen*), und die makroskopische Hydrodynamik der superfluiden Strömung lässt keine anderen Schwingungen als Schallschwingungen zu.

Eine *Potenzialströmung* übt *keine Kraft* auf einen stationär umströmten festen Körper aus (d'Alembert'sches Paradoxon).

In einer *normalen Strömung* hat ein Körper einen *Widerstand*. Kompensieren sich normaler und superfluider Massenstrom, so wirkt auf Körper im He II eine Kraft, obwohl *kein* resultierender Massentransport vorhanden ist.

10.2 Hydrodynamische Gleichungen für He II

Die hydrodynamische Strömung ist durch die zwei Geschwindigkeiten $\mathbf{v}_s, \mathbf{v}_n$ besetzt. Die Gleichungen folgen aus der Galilei-Invarianz (nichtrelativistisch) und den notwendigen Erhaltungssätzen.

Bei hinreichend großer Strömungsgeschwindigkeit verliert He II seine Superfluidität (Grenzgeschwindigkeit, kritische Geschwindigkeit); dennoch wollen wir die Gleichung für beliebige Geschwindigkeiten ableiten, um dann zu kleinen v_s überzugehen.

Die Massenstromdichte, also der Impuls pro Volumeneinheit, ist

$$\mathbf{j} = \rho_s \mathbf{v}_s + \rho_n \mathbf{v}_n . \quad (10.2.1)$$

Dabei ist ρ_s die superfluide, ρ_n die normale Dichte; die Gesamtdichte ist

$$\rho = \rho_s + \rho_n . \quad (10.2.2)$$

Für $T \rightarrow 0$ (in reinem ^4He) gilt $\rho_n \rightarrow 0$; für $T \leq T_\lambda$ (normales Fluid) ist $\rho_s \rightarrow 0$. Die Kontinuitätsgleichung, die die Massenerhaltung angibt, ist

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 , \quad (10.2.3)$$

und mit dem Impulsstromdichtetensor Π_{ik} lautet die Impulserhaltung

$$\partial_t j_i + \partial_k \Pi_{ik} = 0 . \quad (10.2.4)$$

Zunächst wollen wir *dissipative Prozesse* vernachlässigen. Dadurch wird die Strömung reversibel, und die Entropie bleibt erhalten. Der Entropiestrom ist $\rho s \mathbf{v}_n$, woraus mit der Kontinuitätsgleichung (10.2.3) die Entropieerhaltung folgt:

$$\partial_t (\rho s) + \nabla \cdot (\rho s \mathbf{v}_n) = 0. \quad (10.2.5)$$

Bedingung für *Potenzialströmung* im Anteil $\mathbf{v}_s$ ist, dass $\nabla \times \mathbf{v}_s = 0$. Die Ableitung von $\mathbf{v}_s$ als Gradient eines Skalars ist

$$\partial_t \mathbf{v}_s + \nabla \left(\frac{v_s^2}{2} + \mu \right) = 0 \quad (10.2.6)$$

mit dem Skalar μ , das wir später mit dem chemischen Potenzial identifizieren werden. Π_{ik} und μ müssen noch festgelegt werden. Aus dem Energieerhaltungssatz und der Galilei-Invarianz folgt

$$\partial_t E + \nabla \cdot \mathbf{Q} = 0, \quad (10.2.7)$$

wobei die Energiestromdichte durch $\mathbf{Q}$ repräsentiert wird. Mit der *Galilei-Transformation* lässt sich die Abhängigkeit aller Größen von $\mathbf{v}_s$ bei fester Relativgeschwindigkeit $\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s$ bestimmen. Dazu muss ein Koordinatensystem eingeführt werden, in dem die Geschwindigkeit der superfluiden Strömung eines gegebenen Fluidelements 0 ist, und das sich mit v_s relativ zum ursprünglichen System bewegt. Der Index 0 bezeichnet Größen im bewegten System:

$$\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}_s + \mathbf{j}_0, \quad (10.2.8)$$

$$E = \frac{\rho v_s^2}{2} + \mathbf{j}_0 \cdot \mathbf{v}_s + E_0, \quad (10.2.9)$$

$$\mathbf{Q} = E \mathbf{v}_s + \frac{v_s^2}{2} \mathbf{j}_0 + \Pi_0 \mathbf{v}_s + \mathbf{Q}_0, \quad (10.2.10)$$

$$\Pi_{ik} = \rho v_{si} v_{sk} + v_{si} j_{0k} + v_{sk} j_{0i} + \Pi_{0ik}, \quad (10.2.11)$$

$$dE_0 = \mu d\rho + T d(\rho s) + (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s) \cdot d\mathbf{j}_0, \quad (10.2.12)$$

$$p = -E_0 + T \rho s + \mu \rho + \rho_n (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s)^2. \quad (10.2.13)$$

mit dem Druck p und dem chemischen Potenzial μ , der freien Enthalpie pro Masseneinheit. Setzen wir E und $\mathbf{Q}$ in den Energieerhaltungssatz ein und eliminieren die Zeitableitungen mithilfe der hydrodynamischen Gleichungen, so folgt nach umfangreichen Rechnungen:

$$\mathbf{Q} = \left(\mu + \frac{v_s^2}{2} \right) \mathbf{j} + T \rho s \mathbf{v}_n + \rho_n \mathbf{v}_n [\mathbf{v}_n \cdot (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s)], \quad (10.2.14)$$

$$\Pi_{ik} = \underbrace{\rho_n v_{ki} v_{nk} + \rho_s v_{si} v_{sk}}_{=\rho v_i v_k \text{ in der üblichen Hydrodynamik}} + p \delta_{ik}. \quad (10.2.15)$$

Damit ist das vollständige System der hydrodynamischen Gleichungen definiert. Die Größen $\rho - s, \rho_n, \mu, s$ sind Funktionen nicht nur der thermodynamischen Variablen p und T ,

sondern auch des Quadrats der Relativgeschwindigkeit der Strömungen $w^2 = (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s)^2$, eines Skalars, das gegenüber Galilei-Transformationen des Bezugssystems und Drehungen der gesamten Flüssigkeit invariant ist.

Die Gleichungen vereinfachen sich im physikalisch relevanten Fall nicht zu großer Geschwindigkeiten (Verhältnis von v_n , v_s zur Ausbreitungsgeschwindigkeit des zweiten Schalls): Abhängigkeiten von ρ_n , ρ_s von $\mathbf{w}$ vernachlässigen wir und entwickeln die übrigen thermodynamischen Größen nach Potenzen der Geschwindigkeit, z. B.:

$$s(p, T, \mathbf{w}) \approx s(p, T) + \frac{w^2}{2} \partial_T \frac{\rho_u}{\rho} \quad (10.2.16)$$

$$\rho(p, T, \mathbf{w}) \approx \rho(p, T) + \frac{\rho^2 w^2}{2} \partial_p \frac{\rho_u}{\rho} \quad (10.2.17)$$

Hinzu kommen, wie bereits gewohnt, die Randbedingungen: An jeder festen ruhenden Oberfläche muss die dazu orthogonale Komponente des Massenstromes $\mathbf{j}$ verschwinden. Ferner muss die Tangentialkomponente von $\mathbf{v}_n$ an der Wand verschwinden:

$$\mathbf{v}_{n\parallel} = 0 \text{ an der Wand,} \quad (10.2.18)$$

$$\mathbf{v}_{n\perp} \text{ stetig an der Wand.} \quad (10.2.19)$$

Dies ist für $\mathbf{v}_s$ eine übliche Randbedingung für eine *ideale*, bei $\mathbf{v}_n$ für eine *zähe* Flüssigkeit.

Zur Berücksichtigung *dissipativer Prozesse* ist – wie in der gewöhnlichen Hydrodynamik – die Einführung zusätzlicher Terme erforderlich, die *linear* in den räumlichen Ableitungen von $\mathbf{v}_n$ und T sind. Dabei werden *fünf unabhängige kinetische Koeffizienten* (η , ξ_1 , ξ_2 , ξ_3 , κ) eingeführt; die erste Zähigkeit η ist mit $\mathbf{v}_n$ verknüpft (analog dem gewöhnlichen η); κ ist analog zur *Wärmeleitfähigkeit* eines normalen Fluids. Die zweite Zähigkeit ξ wird jetzt durch drei Koeffizienten ξ_1 , ξ_2 , ξ_3 ersetzt.

10.3 Schallausbreitung in Superfluiden

Für die Beschreibung von Schallwellen bemühen wir abermals die lineare Näherung: wir setzen voraus, dass die Strömungsgeschwindigkeiten in der Schallwelle im Vergleich zu den Schallgeschwindigkeiten klein sind, und dass ρ , p und s nur gering von ihren Gleichgewichtswerten abweichen. Dann können wir die hydrodynamischen Gleichungen linearisieren, in-

dem wir ihre quadratischen Glieder vernachlässigen:

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 , \quad (10.3.1)$$

$$\partial_t (\rho s) + \rho s \nabla \cdot \mathbf{v}_n = 0 \quad (\rho s \text{ vor } \nabla \cdot \text{ gezogen, da dieser Term } \mathbf{v}_n \text{ bereits enthält}), \quad (10.3.2)$$

$$\partial_t \mathbf{j} + \nabla p = 0 , \quad (10.3.3)$$

$$\partial_t \mathbf{v}_s + \nabla \mu = 0 . \quad (10.3.4)$$

Kombination der Zeitableitung von (10.3.1) mit dem Gradienten von (10.3.3) ergibt

$$\partial_t^2 \rho = \Delta p , \quad (10.3.5)$$

und mit thermodynamischen Identitäten folgt nach einigen Umformungen

$$\partial_t^2 s = \frac{\rho_s s^2}{\rho_n} \Delta T . \quad (10.3.6)$$

Diese Gleichungen beschreiben die *Schallausbreitung im Superfluid*. Da es zwei Gleichungen gibt, folgen zwei *Geschwindigkeiten* der Schallausbreitung.

Für den Grenzfall $\rho_s = 0$ (nur normales Fluid) bleibt nur die gewöhnliche Schallgeschwindigkeit

$$u^2 = (\partial_\rho p)_s , \quad (10.3.7)$$

während sich allgemein die Relation ergibt

$$u^4 - u^2 \left[(\partial_\rho p)_s + \frac{\rho_s T_s^2}{\rho_n c_V} \right] + \frac{\rho_s T_s^2}{\rho_n c_V} (\partial_\rho p)_T = 0 \quad (10.3.8)$$

mit

$$u_1 = \sqrt{\partial_\rho p} , \quad u_2 = \sqrt{\frac{T s^2 \rho_s}{c_p \rho}} , \quad c \simeq c_p \simeq c_V . \quad (10.3.9)$$

Während u_1 nahezu konstant bleibt, ist u_2 stark T -abhängig und verschwindet mit ρ_s um den λ -Punkt (zweiter Schall).

Nahe am λ -Punkt lässt sich der Unterschied $c_p - c_V$ nicht vernachlässigen; es folgt

$$u_2 = \sqrt{\frac{T s^2 \rho_s}{c_p \rho}} . \quad (10.3.10)$$

Bei *sehr niedrigen Temperaturen* sind fast alle Elementaranregungen im Fluid *Phononen*, und es gilt

$$c = 3s, \quad \rho_n = \frac{cT\rho}{3u_1^2}, \quad \rho_n \approx \rho \quad (10.3.11)$$

$$\Rightarrow u_2 = \sqrt{\frac{Ts^2\rho_s}{c^2T\rho} \cdot 3u_1^2} \quad (10.3.12)$$

$$= \frac{s}{c} u_1 \cdot \sqrt{3} \quad (10.3.13)$$

$$= \frac{u_1}{\sqrt{3}}. \quad (10.3.14)$$

Im Grenzfall $T \rightarrow 0$ gilt (10.3.14) und also

$$\frac{u_1}{u_2} \rightarrow \sqrt{3}. \quad (10.3.15)$$

In einer Welle des *zweiten Schalls* schwingen normale und superfluide Flüssigkeit gegeneinander, der *resultierende Massenstrom* verschwindet.

In einer Schallwelle des *normalen (ersten)* Typs ist $v_n \approx v_s$ (bei einer *ebenen* Welle), d. h., die Flüssigkeit in jedem Volumenelement schwingt als Ganzes, normale und superfluide Masse bewegen sich gemeinsam – entsprechend *gewöhnlichen* Schallwellen.

Strömungen von *Superfluiden* lassen sich *nicht* wie gewöhnliche Strömungen durch eine *Reynolds-Zahl* charakterisieren; vielmehr divergieren die Strömungsgeschwindigkeiten, und Theorien zur *Turbulenzentstehung* sind nicht mehr direkt anwendbar [4]. *Rotation* ist nur durch Bildung von Wirbelschläuchen möglich, die eine *quantisierte Zirkulation* tragen; sie können in sich geschlossen sein.

Literaturverzeichnis

- [1] Kapitza, P.: Viscosity of liquid helium below the λ -point. Nature 141, 74 (1938)
- [2] Tisza, L.: Sur la théorie des liquides quantiques. Application a l'hélium liquide. J. Phys. Radium 1, 164 (1940)
- [3] Landau, L. D.: The theory of superfluidity of helium II. Zh. Eksp. Teor. Fiz. 11, 592 (1941); J. Phys. USSR 5, 71 (1941)
- [4] Niemetz, M., Kerscher, H., Schoepe, W.: Intermittent Switching between Potential Flow and Turbulence in Superfluid Helium at mK Temperatures. J. Low Temp. Phys. 126, 287 (2002)

11 Aufgaben

11.1 Kontinuitätsgleichung für die Entropie

In Abschnitt 2.2 wurde die Kontinuitätsgleichung für die Entropie (2.2.12) vorgestellt:

$$\partial_t (\rho s) + \nabla \cdot (\rho s \mathbf{v}) = 0 . \quad (11.1.1)$$

Leiten Sie diese Gleichung aus der Kontinuitätsgleichung (2.1.10) und der Adiabatangleichung (2.2.11) ab.

11.2 Schwingungsgleichung

Bestimmen Sie für die eindimensionale Schwingungsgleichung (2.4.18),

$$\partial_t^2 p = c^2 \partial_x^2 p , \quad (11.2.1)$$

die *d'Alembert'sche Lösung*

$$p(x, t) = F_1(x + ct) + F_2(x - ct) \quad (11.2.2)$$

mit willkürlichen reellen Funktionen F_1, F_2 .

11.3 Hydrostatik

- a) Bestimmen Sie für ein ruhendes inkompressibles Fluid in einem zylindrischen Gefäß (vgl. Abb. 2.11) aus den Euler-Gleichungen im Schwerfeld,

$$\nabla p = \rho \mathbf{g} , \quad (11.3.1)$$

den Druck als Funktion der z -Koordinate, $p = p(z)$.

- b) Berechnen Sie das Druckprofil, wenn der Zylinder mit $\omega = \text{const}$ um die Vertikale rotiert. (Hinweis: verwenden Sie das Zentrifugalpotenzial $U_r = -\frac{1}{2}\rho r^2 \omega^2$.)

11.4 Inkompressible Fluide

Eine inkompressible Flüssigkeit füllt den Raum, und ein kugelförmiges Volumen mit Radius a wird entfernt (vgl. Abb. 2.23). Nach welcher Zeit hat sich der Hohlraum mit Flüssigkeit gefüllt?

Hinweis: Verwenden Sie die Euler-Gleichungen und die Kontinuitätsgleichung für inkompressible Fluide ($\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$) in sphärischen Koordinaten (das Problem ist kugelsymmetrisch!).

11.5 Wasserwellen

- a) Berechnen Sie aus der Gleichung (2.11.24) für das Geschwindigkeitspotenzial Φ (mit $\mathbf{v} = -\nabla\Phi$),

$$\partial_t \Phi = -gy, \quad (11.5.1)$$

die Dispersionsrelation im flachen ($h \ll \lambda$) Wasser, wobei $\lambda = 2\pi/k$ die Wellenlänge ist.

- b) Berechnen Sie für Kapillarwellen mit der Oberflächenspannung σ aus der Potenzialgleichung (2.11.25)

$$-\partial_t \Phi + \frac{p}{\rho} = 0 \quad (11.5.2)$$

die (anomale) Dispersionsrelation $v = v(\lambda)$.

11.6 Poiseuille-Strömung

- a) Bestimmen Sie für die Rohrströmung (s. Abb. 3.2) einer inkompressiblen zähen Flüssigkeit aus den Navier-Stokes-Gleichungen

$$\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \frac{\eta}{\rho} \Delta \mathbf{v} \quad (11.6.1)$$

mit den in Abschn. 3.2 gemachten Annahmen die Bewegungsgleichung in Polarkoordinaten ($\mathbf{v}(\mathbf{r}) \rightarrow v(r)$).

- b) Lösen Sie die Gleichung (per Integration) für $v(r)$ für ein Rohr der Länge l mit dem Druckgefälle δp . (Beachten Sie die Randbedingungen: $v(r) = 0$ für $r = \pm R$!)

11.7 Laminarer Nachlauf

Eine zähe Flüssigkeit mit Geschwindigkeit $\mathbf{u}$ umströmt einen festen Körper (s. Abb. 3.8). Die wahre Strömungsgeschwindigkeit sei $\mathbf{u} + \mathbf{v}$; für $\mathbf{v} = -\mathbf{u}$ herrscht Stillstand.

- a) Zeigen Sie durch Einsetzen, dass die Lösung im Nachlauf in Kugelkoordinaten (3.6.2),

$$v_r(\vartheta) = -\frac{F_r}{4\pi\rho\nu r} \exp\left[-\frac{ur\vartheta^2}{4\nu}\right], \quad (11.7.1)$$

die Oseen'sche Gleichung (3.5.6) erfüllt,

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{v}. \quad (11.7.2)$$

- b) Außerhalb des Nachlaufs ist die Strömung eine reine Potenzialströmung. Lösen Sie hier die Laplace-Gleichung für das Geschwindigkeitspotenzial, $\Delta\Phi = 0$ (mit $\mathbf{v} = -\nabla\Phi$).

11.8 Stabilität stationärer Strömungen

Mit den Landau'schen Konstanten $\alpha < 0$ und $\beta > 0$ lautet die Differenzialgleichung für die Amplitude $A(t)$ einer kleinen, nicht stationären Störung der Bewegung eines zähen Fluids (mit $\gamma_1 \geq 0$)

$$\frac{d}{dt} |A|^2 = 2\gamma_1 |A|^2 - \alpha |A|^4 - \beta |A|^6. \quad (11.8.1)$$

- a) Lösen Sie die Gleichung für Glieder bis zur vierten Ordnung (d.h., vernachlässigen Sie den Term in der sechsten Potenz).
- b) Wie lautet die Lösung der kompletten Gleichung für $t \rightarrow \infty$? (Probe durch Einsetzen)

11.9 Wärmeleitung

In einem unbegrenzten Medium gelte die Wärmeleitungsgleichung

$$\partial_t T = \chi \Delta T, \quad (11.9.1)$$

wobei T die Temperatur und χ die Temperaturleitfähigkeit angeben. Berechnen Sie die Temperaturverteilung aus dem Fourier-Integral

$$T(\mathbf{r}, t) = \int T_0(\mathbf{r}') e^{-k^2 \chi t} e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} d^3 \mathbf{r}' \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \quad (11.9.2)$$

für eine anfängliche Temperaturverteilung $T_0(\mathbf{r}) = \text{const} \cdot \delta(\mathbf{r})$ und ein eindimensionales Problem ($\mathbf{r} \rightarrow r, T(\mathbf{r}, t) \rightarrow T(r, t)$).

Hinweis: $\mathbf{k}$ -Integration zuerst ausführen, dann Integration über $d^3 x$!

Mit $e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}} = \cos \mathbf{k} \cdot \mathbf{R} + i \sin \mathbf{k} \cdot \mathbf{R}$ verschwindet das Integral über die ungerade sin-Funktion, und es ist

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha \xi^2} \cos \beta \xi d\xi = \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{1/2} e^{-\beta^2/(4\alpha)}, \quad (11.9.3)$$

wobei ξ eine Komponente des Vektors $\mathbf{k}$ angibt.

(Die Lösung verläuft analog zur Ableitung von (6.3.12) aus (6.3.10), aber in einer Dimension, so dass man

$$T(\mathbf{r}, t) = \frac{\text{const}}{8 (\pi \chi t)^{3/2}} e^{-r^2/(4\chi t)} \quad (11.9.4)$$

erhält.)

11.10 Diffusion

Welche Zeit τ benötigt ein in einem Fluid suspendiertes Brown'sches Teilchen, um eine Distanz $d \approx 2R$ durch Diffusion (Abb. 11.1) zurückzulegen?

(Lösung: es ist

$$\langle r^2 \rangle = 6Dt \quad \text{und also} \quad (11.10.1)$$

$$\tau = \frac{d^2}{6D} = \frac{2R^2}{3D}, \quad (11.10.2)$$

und mit der Einstein-Relation

$$D = \frac{k_B T}{6\pi\eta R} \quad (11.10.3)$$

folgt direkt $\tau = \frac{4\pi\eta R^3}{k_B T}$.)

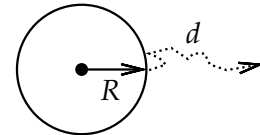


Abbildung 11.1:
Brown'sche Bewegung

11.11 Energie-Impuls-Tensor

Berechnen Sie den Energie-Impuls-Tensor

$$T^{\alpha\beta} = wu^\alpha u^\beta - pg^{\alpha\beta} \quad (11.11.1)$$

mit der Enthalpie pro Volumeneinheit $w = \epsilon + p$, der inneren Energiedichte ϵ , dem Druck p , der Vierergeschwindigkeit u^α und dem metrischen Tensor $g^{\alpha\beta}$ im nichtrelativistischen Grenzfall $v \ll c$.

Hinweis: Im relativistischen Fall wird die Teilchenzahldichte n auf die Einheit des Ruhevolumens bezogen; die Energiedichte ist dann mnc^2 . Im *nichtrelativistischen* Fall wird dagegen die Energiedichte auf die Volumeneinheit im Laborsystem bezogen, in dem sich das Fluid bewegt. Beim nichtrelativistischen Grenzübergang muss deshalb mnc^2 analog zu (8.1.10) ersetzt werden.

11.12 Entropieerhaltung in relativistischer Hydrodynamik

Die Bewegung idealer relativistischer Fluide verläuft adiabatisch; die auf die Einheit des Ruhevolumens bezogene Entropie s ändert sich nicht:

$$u^\beta \partial_\beta \left(\frac{s}{n} \right) = 0 \quad (11.12.1)$$

mit der Vierergeschwindigkeit $u^\beta = (\gamma, \gamma \mathbf{v}/c)$ und der skalaren Teilchendichte n .

Zeigen Sie, dass daraus die Erhaltung der Viererdivergenz des Entropiestromes su^β folgt,

$$\partial_\beta (su^\beta) = 0. \quad (11.12.2)$$

12 Bibliographie

Acheson, D. J.: Elementary fluid dynamics, Clarendon Press (1990)

Choudhuri, A. R.: The Physics of Fluids and Plasmas, Cambridge University Press (1998)

Faber, T. E.: Fluid dynamics for physicists, Cambridge University Press (1995)

Godrèche, C. und Manneville, P. (Hrsg.): Hydrodynamics and nonlinear instabilities, Cambridge University Press (2005)

Greiner, W. und Stock, H.: Hydrodynamik, Verlag H. Deutsch (1991)

Landau, L. D. und Lifschitz, E. M.: TP VI – Hydrodynamik, 5. Aufl., Akademie Verlag (1991)

Lüst, R.: Hydrodynamik, B I Wissenschaftsverlag (1978)

Michalas, D.: Stellar Atmospheres, 2. Aufl., Freeman, San Francisco (1978)

Shore, S. N.: An introduction to astrophysical hydrodynamics, Academic Press (1992)

Shu, F. H.: The physics of astrophysics, Bd. 2, Univ. Science books (1994)

Swinney, H. L. und Gollub, J. P. (Hrsg.): Hydrodynamic Instabilities and the Transition to Turbulence, Springer-Verlag (New York) (1981)

Sommerfeld, A.: Mechanik der deformierbaren Medien, Dieterich'sche Verlagsbuchhandlung, Wiesbaden (1947)

Tritton, D. J.: Physical Fluid Dynamics, 2. Aufl., Clarendon Press (1988)

Wolschin, G.: Particle production sources at LHC energies, J. Phys. G40, 045104 (2013)

Yaglom, A. M. und Frisch, U. (Hrsg.): Hydrodynamic Instability and Transition to Turbulence, Springer-Verlag (2012)