Das Eichprinzip in der Elektrodynamik

Seminarvortrag von Florian Nicolai

Die Maxwellgleichungen (mikroskopisch)

$$\begin{array}{ll} \nabla \times \vec{E} + \frac{1}{c}\dot{\vec{B}} = 0 & \nabla \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\dot{\vec{E}} & \nabla \vec{E} = 4\pi\varrho \end{array}$$

Direkt aus den MWG folgt, dass sich die elektrischen und magnetischen Felder durch Potentiale ausdrücken lassen,

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

$$\vec{E} = -\nabla\Phi - \frac{1}{c}\partial_t \vec{A}$$

wobei $\vec{A}$ ein vektorielles und Φ ein skalares Potential ist. Physikalisch messbar sind allerdings nur die Felder, die Potentiale nicht. Dies erlaubt eine gewisse Freiheit bei der Wahl der (nicht messbaren) Potentiale, solange sich dadurch die (messbaren) Felder nicht ändern. Diese Freiheit nennt man **Eichfreiheit**.

1 Historisches

Das Eichprinzip in der Elektrodynamik ist schon lange bekannt, so schlug beispielsweise schon Maxwell 1865 vor, das Vektorpotential so zu wählen, dass $\nabla\vec{A} = 0$ gilt. Der Name Coulomb-Eichung für diese Wahl von $\vec{A}$ kommt daher , dass man in dieser Eichung das bekannte Coulomb-Potential für Φ erhält. Zwei Jahre später, 1867, führte der dänische Physiker Ludvig Valentin Lorenz die Eichung $\nabla\vec{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial\Phi}{\partial t} = 0$ ein. Diese sog. Lorenz-Eichung wird aber fälschlicherweise häufig dem holländischen Physiker Hendrik Antoon Lorentz zugeschrieben, der diese Eichung erst mehr als 25 Jahre nach seinem dänischen Namensvetter einführte. Grund für die oftmals falsche Zuschreibung ist - neben dem gleichen Namen der beiden - der, dass der holländische Lorentz viel bekannter war als der dänische Lorenz, der zur damaligen Zeit mehr oder weniger in Vergessenheit geriet.

Das Eichprinzip wurde seit seiner Entdeckung lange nur als netter Nebeneffekt angesehen, der einige Rechnungen vereinfachen kann, aber ansonsten nur wenig Bedeutung hat. Die wirkliche Mächtigkeit des Eichprinzips wurde erst 1918 von Hermann Weyl erkannt, der mit Hilfe einer Eichtheorie (Invarinz unter Änderung der Längenskala) versuchte, Maxwells Theorie mit der allgemeinen Relativitätstheorie zu vereinen. Dieser Versuch scheiterte, aber Weyl begründete damit eine ganz neue Herangehensweise an physikalische Probleme.

1954 veröffentlichten R.L. Mills und C.N. Yang eine Arbeit, in der sie die Eichinvarianz der Elektrodynamik verallgemeinerten und dadurch eine Theorie der schwachen und starken Wechselwirkung schufen. In den 1960ern erkannte man, dass alle bisher beobachteten Wechselwirkungen von Elementarteilchen durch Eichtheorien beschrieben werden können. Auch heute spielen Eichtheorien noch eine große Rollen in der Teilchenphysik.

2 Eichtransformationen

Die Felder bleiben invariant unter folgender (gleichzeitiger) Eichtransformation der Potentiale

$$\vec{A} \rightarrow \ \vec{A}' = \vec{A} + \nabla\lambda$$
$$\Phi \ \rightarrow \ \Phi' \ = \Phi - \frac{1}{c}\ \frac{\partial\lambda}{\partial t}$$

wobei λ eine beliebige skalare Funktion ist, die einzige Bedingung, die λ erfüllen muss, ist, dass sie zwei mal differenzierbar sein muss. [1] Setzt man nun die Potentialdarstellung der Felder in die inhomogenen Maxwell-Gleichungen ein, so erhält man zwei ziemlich hässliche Gleichungen:

$$\Delta\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\vec{j} + \nabla(\nabla\vec{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial\Phi}{\partial t})$$

$$\Delta\Phi + \frac{1}{c}\nabla\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = -4\pi\varrho$$

2.1 Lorenzeichung

Um die erste dieser Gleichungen zu vereinfachen, setzt man

$$\frac{1}{c}\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \nabla\vec{A} = 0 \qquad\qquad (\textbf{Lorenz-Eichung})$$

Damit ergibt sich

$$\Delta\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\vec{j}$$
$$\Delta\Phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = -4\pi\varrho$$

Der Vorteil der Lorenz-Eichung ist hier also, dass erstens die Gleichungen einfacher aussehen und zweitens, dass sie entkoppelt sind, d.h. nur von $\vec{A}$ oder nur von Φ abhängen. Lösung dieser Gleichungen in Lorenz-Eichung ergibt die retardierten Potentiale.

[1] Die erste Transformation folgt aus der Vektoridentität $\nabla \times (\nabla\lambda) = 0$, die zweite durch Einsetzen von $\vec{A}'$ in die Potentialdarstellung von $\vec{E}$

Lösbarkeit der Lorenz-Bedingung

Man kann immer Potentiale finden, die die Lorenz-Eichung erfüllen, denn angenommen, $\vec{A}$ und Φ erfüllen die Lorenz-Bedingung nicht, d.h. $\frac{1}{c}\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \nabla\,\vec{A} \neq 0$. Nun kann man wie oben beschrieben eine Eichtransformation durchführen $\vec{A} \ \rightarrow \ \vec{A}'$, $\Phi \ \rightarrow \ \Phi'$, sodass die gestrichenen Potentiale die Eichbedingung erfüllen, was genau dann der Fall ist, wenn

$$\Delta\lambda - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\lambda}{\partial t^2} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\Phi}{\partial t} - \nabla\vec{A}$$

gilt. Da dies aber eine inhomogene Wellengleichung ist, existiert für die Eichfunktion λ immer eine Lösung.
Darüber hinaus bilden die Potentiale der Lorenz-Eichung eine Eichklasse, d.h. erfüllen die ursprünglichen Potentiale die Lorenz-Bedingung, so auch die transformierten, solange für die Eichfunktion gilt: $\Delta\ \lambda\ -\ \frac{1}{c^2}\ \frac{\partial^2\lambda}{\partial t^2}\ =\ 0$.

2.2 Coulombeichung

In der Coulomb-Eichung setzt man $\nabla\vec{A} = 0$

Lösbarkeit der Coulomb-Bedingung

Auch in der Coulomb-Eichung kann man immer ein $\vec{A}$ finden, dass die Coulomb-Bedingung erfüllt, die Argumentation ist ganz analog zu der bei der Lorenz-Eichung: Angenommen $\nabla\vec{A} = a(\vec{r},t) \neq 0$. Das transformierte Potential soll die Coulomb-Bedingung erfüllen, was genau dann der Fall ist, wenn $\Delta\lambda = -a(\vec{r},t)$. Auch für diese Poisson-Gleichung existiert immer eine Lösung. Mit $\nabla\vec{A} = 0$

vereinfachen sich die beiden hässlichen Gleichungen zu

$$\Delta\Phi = -4\pi\varrho \tag{1}$$

$$\Delta\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\partial_t\nabla\Phi \tag{2}$$

Für das skalare Potential ergibt sich somit nach (1)

$$\Phi(\vec{r},t) = \int d^3r'\,\frac{\varrho(\vec{r'},t)}{|\vec{r}-\vec{r'}|}$$

Hierbei ist auffällig, dass sich eine Änderung am Ort $\vec{r'}$ instantan am Ort $\vec{r}$ auswirkt. Dieser scheinbare Widerspruch zur endlichen Ausbreitungsgeschwindigkeit von Information lässt sich dadurch auflösen, wenn man sich in Erinnerung ruft, dass die Potentiale selbst nicht messbar sind, sondern nur die Felder. Dadurch, dass beim E-Feld noch das Vektorpotential enthalten ist, verändert sich das E-Feld erst nach der retardierten Zeit.
Da bei (2) die Divergenz der rechten Seite verschwindet [2], kann man sich des

[2] $\nabla\left(-\frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\partial_t\nabla\Phi\right) = -\frac{4\pi}{c}\nabla\vec{j} + \frac{1}{c}\partial_t\Delta\Phi = -\frac{4\pi}{c}\nabla\vec{j} - \frac{4\pi}{c}\partial_t\varrho = 0$ wg. der Kontinuitätsgleichung

Helmholtz-Theorems bedienen, das besagt, dass man ein beliebiges Vektorfeld, welches im Unendlichen abklingt, in zwei Terme zerlegen kann: $\vec{j} = \vec{j}_{rot} + \vec{j}_{irrot}$ mit $\nabla \cdot \vec{j}_{rot} = 0$ und $\nabla \times \vec{j}_{irrot} = 0$ Somit lässt sich (2) umschreiben zu

$$\Delta\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\vec{j}_{rot}$$

3 Ableitung der homogenen MWG

Bisher haben wir gesehen, dass aus den MWG die Eichinvarianz der Potentiale folgt. Nun wollen wir umgekehrt vorgehen: Wir fordern eine Invarianz der Bewegungsgleichungen unter den Eichtransformationen

$$\vec{A} \to \ \vec{A}' = \vec{A} + \nabla\lambda \tag{3}$$

$$\Phi \ \to \ \Phi' \ = \Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\lambda}{\partial t} \tag{4}$$

und wollen daraus die Feldgleichungen ableiten.

Aus der analytischen Mechanik ist bekannt, dass die Bewegungsgleichungen durch die Wirkung $S = \int\limits_{t_1}^{t_2} L\,dt$ gegeben sind (L die Lagrange-Funktion). Ebenso ist bekannt, dass sich die Wirkung nicht ändert, wenn zur Lagrange-Funktion eine totale Zeitableitung dazuaddiert wird. Wir wollen also nun erreichen, dass die Transformation der Potentiale die Lagrange-Funktion eines elektrischen Teilchens genau um eine solche totale Zeitableitung

$$\Delta L = \frac{q}{c}\frac{d\lambda}{dt} = \frac{q}{c}\left(\dot{\vec{r}} \cdot \nabla\lambda + \frac{\partial\lambda}{\partial t}\right) \tag{5}$$

ändert. Durch Vergleich von (3), (4) und (5) findet man für den Wechselwirkungsteil Teilchen $\leftrightarrow$ Feld der Lagrange-Funktion

$$L_{WW} = \frac{q}{c}\dot{\vec{r}} \cdot \vec{A}(\vec{r},t) - q\Phi(\vec{r},t)$$

und für die komplette Lagrange-Funktion, bei der noch der Term des freien Teilchens dazuaddiert werden muss

$$L_{frei,WW} = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 + \frac{q}{c}\dot{\vec{r}} \cdot \vec{A}(\vec{r},t) - q\Phi(\vec{r},t) \tag{6}$$

Anwendung der Euler-Lagrange-Gleichung ($\frac{d}{dt}\left(\nabla_{\dot{r}}L\right) = \nabla L$) auf (6) führt schließlich zu [3]

$$m\ddot{\vec{r}} = q\underbrace{\left(-\nabla\Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)}_{=:\vec{E}} + \frac{q}{c}\dot{\vec{r}} \times \underbrace{(\nabla \times \vec{A})}_{=:\vec{B}}$$

was nichts anderes als die Lorentz-Kraft ist. Weiterhin folgen aus dieser Definition des $\vec{E}$- und $\vec{B}$-Feldes sofort die beiden homogenen Maxwellgleichungen $\nabla\vec{B} = 0$ und $\nabla \times \vec{E} + \frac{1}{c}\dot{\vec{B}} = 0$.

[3] hierbei wurde die Vektoridentität $\nabla(\dot{\vec{r}} \cdot \vec{A}) = \dot{\vec{r}} \times (\nabla \times \vec{A}) + \frac{d\vec{A}}{dt} - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$ verwendet

4 Ableitung der inhomogenen MWG

Zur Erinnerung: Definition einiger Vierervektoren

$$x^\mu = \begin{pmatrix} ct \\ \vec{x} \end{pmatrix}, \quad A^\mu = \begin{pmatrix} \Phi \\ \vec{A} \end{pmatrix}, \quad j^\mu = \begin{pmatrix} c\varrho \\ \vec{j} \end{pmatrix}, \quad \partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \begin{pmatrix} \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} & , & \nabla \end{pmatrix}$$

In Viererschreibweise lässt sich die Lorenz-Eichung kompakt schreiben als $\partial_\mu A^\mu = 0$ und die Eichtransformationen (3) und (4) vereinheitlichen sich zu

$$A^\mu(x) \to A^{\mu'}(x) = A^\mu(x) - \partial^\mu \lambda(x) \tag{7}$$

Bei der Ableitung der inhomogenen Maxwellgleichungen betrachtet man wieder die Lagrange-Funktion. Im Gegensatz zur Herleitung der homogenen MWG, bei der man den Anteil des freien Teilchens und den Wechselwirkungsanteil Teilchen $\leftrightarrow$ Feld betrachtete, kommt nun noch ein zustzlicher Feldanteil hinzu, der das Verhalten des Feldes auch ohne Materie in ihm beschreibt. Um diesen Anteil L_{Feld} wollen wir uns im Folgenden kümmern.

In Abwesenheit von Materie ist es zweckmäßig, die Lagrange-Funktion über eine Lagrange-Dichte $\mathcal{L}$ zu formulieren: $L(t) = c\int \mathcal{L}(\vec{r},t)d^3r$. Ziel ist es nun, die Lagrange-Dichte $\mathcal{L}_{Feld}(x)$ so zu formulieren, dass sie invariant bleibt unter der Eichtransformation (7). Man findet dabei recht schnell, dass dies der Fall ist, wenn $\mathcal{L} = \mathcal{L}(F^{\mu\nu})$ gilt, mit $F^{\mu\nu} := (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)$ der Feldstärketensor, da dieser selbst schon invariant unter (7) ist. Die generalisierte Koordinate des Euler-Lagrange-Formalismus, nach dem variiert wird, ist in diesem Fall also das 4-Potential. Da in der Elektrodynamik das Superpositionsprinzip gilt, d.h. man Potentiale und Felder linear addieren kann, muss $\mathcal{L}$ quadratisch sein in $F^{\mu\nu}$, denn nach Anwenden der Euler-Lagrange-Gleichung, bei der nach der generalisierten Koordinate abgeleitet wird, muss was lineares herauskommen. Diese Überlegungen führen schließlich zu [4]

$$\mathcal{L}_{Feld}(x) = -\frac{1}{16\pi} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$$

Der Faktor $\frac{1}{16\pi}$ ist spezifisch für das Gausssystem, in anderen Maßsystemen lautet er anders.

Somit ergibt sich für die gesamte Wirkung, bei der noch der freie und der Wechselwirkungsanteil vorhanden sind

$$S = \int \left(q\frac{\dot{\vec{r}}}{c}\vec{A}(\vec{r},t) - q\Phi(\vec{r},t) \right) dt + \frac{1}{c}\int \mathcal{L}_{Feld}(x) d^4x$$

$$= \frac{1}{c}\int \left(\frac{\vec{j}(\vec{r'},t)}{c}\vec{A}(\vec{r},t) - \varrho(\vec{r'},t)\Phi(\vec{r},t) \right) d^4x + \frac{1}{c}\int \mathcal{L}_{Feld}(x) d^4x$$

[4] denkbar wäre auch eine Abhängigkeit vom dualen Feldstärketensor $\tilde{F}^{\mu\nu}$ allerdings führt die Kombination $\tilde{F}^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ wieder zu einer totalen Ableitung, die den reinen Feldanteil in der Lagrange-Funktion unerheblich machen würde, was ja gerade nicht erwünscht ist

$$= \frac{1}{c} \int \left(\frac{j_\mu}{c} A^\mu + \mathcal{L}_{Feld}(x) \right) d^4x$$

($\vec{j}$ und ϱ sind in diesem Fall eines Punktteilchens δ-Funktionen)
woraus schließlich die vierdimensionale Formulierung der inhomogenen Maxwellgleichungen folgt [5]:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\nu$$

5 Quellen

- **D. J. Griffiths:** Elektrodynamik - Eine Einführung
  S.524-536 (3. Auflage)
  Pearson Verlag

- **J. D. Jackson:**Klassische Elektrodynamik
  S.277-282 (4. Auflage)
  Verlag Walter de Gruyter

- **L.D. Landau / E.M. Lifschitz:**Lehrbuch der Theoretischen Physik - Band 2: Klassische Feldtheorie
  27 - 30 (12. Auflage)
  Verlag Harry Deutsch

- **J. D. Jackson, L.B. Okun:**Historical roots of gauge invariance
  Rev. Mod. Phys. 73, 2001

- **F. Gronwald, J. Nitsch:**The Structure of the Electromagnetic Field as Derived from First Principles
  IEEE Antennas and Propagation Magazine Vol. 43, No.4, August 2001

- **Georg Wolschin:**Skript Elektrodynamik
  Universität Heidelberg, WS 2011/2012

- **Stephan Mertens:**Skript Elektrodynamik
  Kap. 24, Universität Magdeburg, SS 2009

- **C.C. Noack:**Skript Quantenelektrodynamik
  Universität Bremen, SS 2005

[5]vgl. hierzu beispielsweise Skript Prof. Wolschin S.88