Beschleunigte Bewegung in der SRT und Ehrenfest‘sches Paradoxon

Felix Martins

Seminar der theoretischen Elektrodynamik

bei Georg Wolschin

Gliederung

1. Beschleunigte Bezugssysteme
2. Formulierung der Mechanik
3. Ehrenfest'sches Paradoxon

Beschleunigte Bezugssysteme

- Betrachtung aus Inertialsystem $(t, \vec{x}(t))$
- Zeitabhängige Lorentz-Transformation
- Aktive/Passive LT: Beschleunigung des Teilchens /der Umgebung

$$u_G(t) = \Lambda(\vec{\beta}(t))u_G(0)$$

$$u_U(t) = \Lambda(-\vec{\beta}(t))u_U(0)$$

Allgemeine Lorentz-Transformation

- Forderung: Metrik invariant

$$\Lambda^T g \Lambda = g$$

$$\Rightarrow \det(\Lambda^T g \Lambda) = \det(\Lambda)^2 \det(g) = \det(g)$$

$$\Rightarrow \det(\Lambda) = \pm 1$$

- $\det(\Lambda) = 1$: eigentlich
- $\mathrm{sgn}(\Lambda^0{}_0) = 1$: orthochron

- Ansatz: infinitesimale Transformation $\Lambda = 1 + \vec{\omega}\vec{L}$

Konstante Beschleunigung

- Allgemein: $u^2 = c^2$

$$a\ u = \partial_\tau(u)u = \partial_\tau(u\ u) - u\partial_\tau(u) = \partial_\tau(c^2) - u\ a$$

$$= -a\ u$$

$$\Rightarrow a \perp u$$

$$\vec{a} = g\vec{e_1} \qquad a^2 = g^2$$

$$0 = a\ u = a^0 u^0 - a^1 u^1$$

- $$\Rightarrow a^0 = \partial_\tau u^0 = g\ u^1$$

$$a^1 = \partial_\tau u^1 = g\ u^0$$

Hyperbolische Bewegung

$$x^0 = (g^{-1} + \xi^{1'})\sinh(g^{-1}\xi^{0'})$$

$$x^1 = (g^{-1} + \xi^{1'})\cosh(g^{-1}\xi^{0'})$$

$$x^2 = \xi^{2'}$$

$$x^3 = \xi^{3'}$$

Formulierung der Mechanik

- Betrachtung in beliebigem Koordinatensystem $x = (t, \vec{x}(t))$

$$x = \begin{pmatrix} ct \\ \vec{x} \end{pmatrix} \qquad \dot{x} = \frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} c \\ \vec{v} \end{pmatrix}$$

- Ausgangspunkt: relativistische Wirkung

$$S = \int -mc^2 \sqrt{1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}} - V(\vec{x})dt$$

Formulierung der Mechanik

- Hamiltonfunktion:

$$H(x, p, N) = N\,\frac{p^2 - m^2c^2}{2m} + V$$

$$\dot{p}_\mu = -\partial_\mu H = -\partial_\mu V \qquad \dot{x}^\mu = \partial_{p_\mu} H = N\,\frac{p_\mu}{m} \qquad 0 = \partial_N H = \frac{p^2 - m^2c^2}{2m}$$

- Wirkung:

$$S = \int \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{mc^2}{2} - V \quad d\tau$$

Das Ehrenfest‘sche Paradoxon

- Physikalische Zeitschrift 1909:
- „Gleichförmige Rotation starrer Körper und Relativitätstheorie“

- Rotierender Zylinder mit Symmetrieachse als Drehachse

- Lorentzkontraktion des Scheibenumfangs

$$2\pi R' < 2\pi R$$

- Radius senkrecht zu Geschwindigkeit

$$R' = R$$

Die rotierende Scheibe

- Annahme: Stabile Scheibe, d.h. kein Wölben oder Reissen

  $\vec{R} \perp \vec{v} \quad \Rightarrow \quad R = const.$

  $U_{LS} = const.$

- Kette aus Maßstäben auf dem Scheibenrand
- LS: Maßstäbe kontrahieren → Umfang wird größer
- RS: Umgebung kontrahiert → Umfang wird größer

- Verwendung von Maß aus anderem System
- $\frac{U}{D} \neq \pi$

Die rotierende Scheibe

$$\frac{U}{D} = \gamma\pi \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{(wr)^2}{c^2}}}$$

$$\Rightarrow \frac{U}{D} \quad \text{r – abhängig}$$

Nichteuklidische Geometrie

Die rotierende Scheibe

- Metrik der Scheibe

$$t = t' \qquad dt = dt'$$

$$r = r' \qquad dr = dr'$$

$$\varphi = \varphi' + \omega\, t' \qquad d\varphi = d\varphi' + \omega\, dt'$$

$$z = z' \qquad dz = dz'$$

$$\Rightarrow ds^2 = dt^2 - dr^2 - r^2 d\varphi^2 - dz^2$$

$$= (1 - \omega^2 r'^2)dt'^2 - dr'^2 - r'^2\, d\varphi'^2 - 2r'^2\, \omega\, d\varphi'\, dt' - dz'^2$$

$$\Rightarrow \qquad \begin{aligned} g_{00} &= (1 - \omega^2 r'^2) \\ g_{rr} &= -1 \\ g_{\varphi\varphi} &= -r'^2 \\ g_{0\varphi} &= -r'^2\, \omega = g_{\varphi 0} \\ g_{zz} &= -1 \end{aligned}$$

Die rotierende Scheibe

- Umformulierung Metrik:

$$= \left(1-\frac{\omega^2 r'^2}{c^2}\right)\left(cdt' - \frac{r'^2 \frac{\omega}{c}}{1-\frac{\omega^2 r'^2}{c^2}} d\varphi'\right)^2 - dr'^2 - \frac{r'^2}{1-\frac{\omega^2 r'^2}{c^2}} d\varphi'^2 - dz'^2$$

$$U = \int_0^{2\pi} \frac{r'\,d\varphi}{\sqrt{1-\frac{\omega^2 r'^2}{c^2}}} = \frac{2\pi\, r'}{\sqrt{1-\frac{\omega^2 r'^2}{c^2}}} = NL\gamma$$

Quellen

- Georg Wolschin : Vorlesungsskript zur Elektrodynamik
- Jackson: Klassische Elektrodynamik 11-12
- Misner, Thorne, Wheeler: Gravitation p169ff
- Jörg Main: Vorlesungsskript zur speziellen Relativitätstheorie
- Iring Bender: Vorlesungskript zur ART, Kapitel 6