# Beschleunigte Bewegung und Paradoxa in der speziellen Relativitätstheorie

Felix Martins

# Inhaltsverzeichnis

# Einleitung

Diese Ausarbeitung ist eine Zusammenfassung des Vortrages *Beschleunigte Bewegung und Paradoxa in der speziellen Relativitätstheorie*, den ich im Rahmen des Seminars der theoretischen Elektrodynamik von Georg Wolschin im Sommersemester 2012 an der Universität Heidelberg gehalte habe.
Für das Verständnis werden Grundkenntisse der speziellen Relativitätstheorie, insbesondere den Lorentztranssformationen, sowie des mathematischen Formalismus der speziellen Relativitätstheorie vorausgesetzt, weshalb die entsprechenden Fachbegriffe und Schreibweisen nicht erläutert werden. Des Weiteren wird weitesgehend auf Rechnungen verzichtet. So benötigt, können diese vom geneigten Leser ohne grossen Aufwand selbst durchgeführt werden. Der Fokus dieser Ausarbeitung liegt auf der Darstellung des Inhaltes. Besonders für die Ausführungen zum Ehrenfest'schen Paradoxon ist die Kenntnis und Verständnis der gängigen, einfachen Paradoxa der SRT von Nöten, da diese aus Zeit- und Platzgründen nicht Bestandteil des Vortrages sind. Ausreichende Erklärungen dazu können, wenn benötigt, leicht im Internet gefunden werden.

# Kapitel 1

# Beschleunigte Bezugssysteme

## 1.1 Allgemeines

Die Betrachtung jedes physikalischen Problems erfolgt im Rahmen eines *Bezugssystems*. Dieses Bezugssystems ist die Grundlage der Beschreibung der physikalischen Vorgänge. Die Beschreibung eines Systems ist somit immer in Relation zu dem gewählten Bezugssystem zu sehen, weshalb die Angabe dieses Bezugssystems essentiell ist. Oft ist die Beschreibung eines physikalischen Problems in einem bestimmten Bezugssystem erheblich einfacher als im System des Beobachters, sodass ein anderes, passenderes System gewählt wird, um die Lösung zu vereinfachen. Aus diesem Grund ist der Wechsel zwischen Bezugssystemen ein wichtiger Teil der Physik. In der speziellen Relativitätstheorie erfolgt dieser Wechsel mithilfe der *Lorentztransformationen*.

## 1.2 Beschleunigte Bewegung

Wir wählen für die folgenden Betrachtungen als unser Bezugssystem uns selbst als Beobachter in einem Inertialsystem $(t, \vec{x}(t))$.
Betrachten wir nun eine beschleunigte Bewegung, so hat das beschleunigte Objekt zu jedem Zeitpunkt eine bestimmte Geschwindigkeit, sodass wir mit einer Lorentztransformation in dessen Bezugssystem wechseln können. Reihen wir diese Lorentztransformationen zu verschiedenen Zeiten (gemessen in unserem Bezugssystem ) aneinander, so erhalten wir eine *zeitabhängige Lorentztransformation* $\Lambda(t)$.
Je nachdem, von welchem Bezugssystem wir ausgehen, nennt man dies eine aktive oder passive Lorentztransformation . Bei einer aktiven Lorentztransformation wechselt man in das Bezugssystem des bewegten Objektes und bei einer passiven Lorentztransformation in das System der Umgebung, die sich im Bezugssystem des Objektes mit derselben Geschwindigkeit in invertierter Richtung bewegt. Der Unterschied macht sich in der Lorentztransformation als eine Invertierung der Geschwindigkeit bemerkbar.

$$\begin{aligned} u_O(t) &= \Lambda(\vec{\beta}(t))u_O(0) && \text{Aktive Lorentztransformation} \\ u_U(t) &= \Lambda(-\vec{\beta}(t))u_U(0) && \text{Passive Lorentztransformation} \end{aligned}$$

## 1.3 Allgemeine Lorentztransformation

### 1.3.1 Eigenschaften

Für die allgemeine Beschreibung von Transformationen des Bezugssystems benötigt man eine *allgemeine Lorentztransformation*. Diese Transformation zwischen Bezugssystemen muss Abstände und Winkel unverändert lassen, um eine konsistente Beschreibung zu ermöglichen. Deswegen fordern wir die *Invarianz der Metrik* unter Lorentztransformationen.

$$\Lambda^T g \Lambda = g$$

Aus dieser Forderung lassen sich einige Eigenschaften der Lorentztransformation ableiten:

$$\begin{aligned} \det \Lambda &= \pm 1 \\ \Lambda^{-1} &= g \Lambda^T g \end{aligned}$$

Mithilfe dieser Eigenschaften können die Lorentztransformation en unterteilt werden in:

1. eigentliche Lorentztransformationen: $\det \Lambda = 1$
2. orthochrone Lorentztransformationen: $\text{sgn } \Lambda_0^0 = 1$

Diese Unterscheidungen sind unabhängig voneinander. Eigentliche Lorentztransformationen sind spiegelungsfrei und orthochrone Lorentztransformationen sind zeitspiegelungsfrei. Diese Spiegelungen können an eine allgemeine, eigentliche, orthochrone Lorentztransformation durch Multiplikation angefügt werden, um eine allgemeine Lorentztransformation zu erhalten, sodass nur eine solche gefunden werden muss.

### 1.3.2 Darstellung

Wir wählen den Ansatz $\Lambda = 1 + \vec{\omega}\vec{\mathrm{L}}$ für eine *Darstellung der Lorentztransformation* . Dabei ist $\vec{\omega}$ eine Menge evtl. zeitabhängiger infinitesimaler Paramter und $\vec{L}$ eine Menge sogenannter Generatoren der Transformation, die hier in Vektorschreibweise verwendet werden, um die Summation über die Elemente zu verdeutlichen. Diese Transformation beschreibt eine infinitesimale Änderung des Bezugssystems. Für eine endliche Transformation führt man unendlich viele dieser Transformationen hintereinander aus. Die Lorentztransformation ergibt sich dann als Grenzwert.

$$\Lambda = \lim_{n\to\infty} (1 + \vec{\omega}\vec{\mathrm{L}})^n = \lim_{n\to\infty} (1 + \frac{\vec{\Omega}}{n}\vec{\mathrm{L}})^n = \exp(\vec{\Omega}\vec{\mathrm{L}})$$

Die gesuchte Transformation ergibt sich also über die Exponentialfunktion aus der Summe der Generatoren, die mit einem (zeitabhängigen) Parameter versehen sind. Nutzt man nun die zweite Eigenschaft der Lorentztransformation und die Reihendarstellung der Exponentialfunktion aus, so ergibt sich folgende Identität:

$$\Lambda^{-1} = \exp(-\vec{\Omega}\vec{\mathrm{L}}) = \mathrm{g}\ \exp(\vec{\Omega}\vec{\mathrm{L}})^T\mathrm{g} = \exp(g\vec{\Omega}\vec{\mathrm{L}}^T g)$$

$$\Rightarrow -\mathrm{g}\vec{\Omega}\vec{\mathrm{L}} = (g\vec{\Omega}\vec{\mathrm{L}})^T$$

$$\Rightarrow g\mathrm{L}\ \text{antisymmetrisch}$$

$$\Rightarrow \mathbf{L} = \begin{pmatrix} 0 & L_1 & L_2 & L_3 \\ L_1 & 0 & -R_1 & R_2 \\ L_2 & R_1 & 0 & -R_3 \\ L_3 & -R_2 & R_3 & 0 \end{pmatrix}$$

Daraus ergeben sich insgesamt 6 freie Parameter, sodass die Gruppe der Lorentztransformationen von 6 Generatoren erzeugt wird. Diese werden möglichst einfach gewählt, wobei die folgende Darstellung die gebräuchlichste ist:

$$\mathbf{B_1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B_3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{R_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{R_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{R_3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Die hier mit B bezeichneten Matrizen generieren Boosts und die mit R bezeichneten Drehungen. Unter Verwendung dieser Generatoren lässt sich die die allgemeine, eigentliche, orthochrone Lorentztransformation mit der oben gewonnenen Darstellung folgendermassen schreiben:

$$\Lambda = \exp(-\vec{\mathrm{y}}\vec{\mathrm{B}} + \vec{\varphi}\vec{\mathrm{R}})$$

Hiermit lassen sich die expliziten Transformationsmatrizen für einen gegebenen Fall von Parametern berechnen.

## 1.4 Konstant beschleunigte Bewegung

Als Beispiel für eine beschleunigte Bewegung wird hier eine konstant beschleunigte Bewegung betrachtet. Allgemein gilt für eine Bewegung:

1. $u^2 = c^2$
2. $u \perp a$

Für die Beschleunigung $\vec{\mathrm{a}} = \mathrm{g}\ \vec{e_1}$ ergibt sich daraus

1. $\mathrm{a}^2 = \mathrm{g}^2$
2. $0 = \mathrm{a}^0\mathrm{g}^0 - \mathrm{a}^1\mathrm{g}^1$

Mithilfe der zuvor gefundenen Darstellung einer zeitabhängigen Lorentztransformation ergibt sich für die Vierergeschwindigkeit $u(\tau) = \Lambda(\tau)u(0)$ und daraus folgende Differentialgleichungen:

1. $\mathrm{a}^0 = \partial_\tau u^0 = \mathrm{g}\ u^1$
2. $\mathrm{a}^1 = \partial_\tau u^1 = \mathrm{g}\ u^0$

Der Parameter $\tau$ beschreibt hierbei die Eigenzeit im Bezugssystem des beschleunigten Objektes. Als Lösung dieser Differentialgleichungen ergeben sich die sogennanten *hyperbolischen Bewegungsgleichungen*:

- $x^0 = (\mathrm{g}^{-1} + \xi^1)\sinh(\mathrm{g}^{-1}\xi^0)$
- $x^1 = (\mathrm{g}^{-1} + \xi^1)\cosh(\mathrm{g}^{-1}\xi^0)$
- $x^2 = \xi^2$
- $x^3 = \xi^3$

Hierbei stehen die $\xi^i$ für die Koordinaten im System des beschleunigten Objektes, insbesondere entspricht $\xi^0$ der Eigenzeit, während die $x^i$ für die Koordinaten im System eines ruhenden (d.h. nicht beschleunigten) Betrachters stehen. Anhand dieser Gleichungen kann man erkennen, dass beschleunigte Bezugssysteme nur *begrenzt eindeutig* sind. Für grosse Werte von $\tau$, d.h. nach einer (relativ) langen Beschleunigung sind verschiedene Orte nicht mehr unterscheidbar. Beschleunigte Bezugssysteme können daher nur für einen begrenzten Bereich gültig sein. Dazu trägt man die Weltlinien verschiedener Orte (d.h. Orte parametrisiert nach der Eigenzeit) des beschleunigten Bezugssystems in ein Minkowski-Diagramm des ruhenden Beobachters ein. Die Weltlinien verschiedener Orte nähern sich alle asymptotisch an den Lichtkegel an, sodass ab eines gewissen Abstandes (d.h. verstrichener Zeit bzw. erfolgter Beschleunigung) unterschiedliche Orte nicht aufgelöst werden können.

# Kapitel 2

# Relativistische Formulierung der Mechanik

## 2.1 Lagrange-Formalismus

### 2.1.1 Ausgangspunkt

Der Formalismus der Mechanik kann umformuliert werden, um relativistische Effekte zu berücksichtigen, sodass auch relativistische Bewegungen beschrieben werden können. Er kann dann auf die gewohnte Weise zur Behandlung von physikalischen Problemen verwendet werden. Zur Beschreibung der Bewegung wählen wir ein beliebiges Bezugssystem $(t, \vec{x}(t))$.

$$x = \begin{pmatrix} ct \\ \vec{x} \end{pmatrix} \quad \dot{x} = \begin{pmatrix} c \\ \vec{v} \end{pmatrix}$$

Der Startpunkt ist die relativistische Wirkung

$$S = \int -mc^2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - V(\vec{x})\ \mathrm{d}t$$

### 2.1.2 Umparametrisierung

Die Bahn des Teilchens $\vec{x}(t)$ kann nun auf einen beliebigen Parameter s umformuliert werden, um die Unabhänigkeit von dem gewählten Bezugssystem und die Invarianz unter Koordinatenwechsel, d.h. Umparametrisierung zu verdeutlichen. Dazu vollziehen wir den Übergang

$$(t, \vec{x}(t)) \to (s, \vec{x}(s))$$

$$\dot{x} = \tfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = \tfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\tfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}$$

$$V' = V\tfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}$$

$$S = \textstyle\int -mc\sqrt{\dot{x}^2(s)} - V'(\vec{x}(s))\ \mathrm{d}s$$

## 2.2 Hamilton-Formalismus

Der Übergang zum Hamilton-Formalismus erfolgt analog zum nicht-relativistischen Fall, wobei jedoch die gesamten Vierervektoren als Variable benutzt werden.

$$p_\mu = \partial_{\dot{x}^\mu} \mathrm{L} = \frac{-mc\dot{x}_\mu}{\sqrt{\dot{x}^2}}$$

$$\mathrm{H} = p_\mu \dot{x}^\mu - \mathrm{L} = V'$$

Die so erhaltene Hamilton-Funktion besteht nur aus dem Potential, was etwas ungünstig ist. Dies liegt an der implizit genutzten Identität $p^2 = m^2c^2$. Diese Bedingung wird nun explizit eingearbeitet, sodass der Viererimpuls $p^\mu$ als unabhängige Variable genutzt und dadurch der Hamilton-Formulismus wie gewohnt verwendet werden kann. Zusätzlich wird ein Parameter N eingeführt, der die Invarianz unter Reparametrisierung sicherstellt.

$$\mathrm{H} = N\frac{p^2 - m^2c^2}{2m} + V'$$

Aus der so gewonnenen Hamilton-Funktion können die Bewegungsgleichungen abgeleitet werden:

$$\dot{p}_\mu = -\partial_\mu \mathrm{H} = -\partial_\mu \mathrm{V'} \quad \dot{x}^\mu = \partial_{p_\mu} \mathrm{H} = N\frac{p^\mu}{m} \quad 0 = \partial_N \mathrm{H} = \frac{p^2 - m^2c^2}{2m}$$

## 2.3 Rückkehr zu Lagrange

Von der gewonnenen Darstellung mit dem Hamilton-Formalismus kann nun der Übergang zurück zum Lagrange-Formalismus vollzogen werden.

$$\mathrm{L} = \dot{x}p - \mathrm{H} = \frac{m\dot{x}^2}{2N} + N\frac{mc^2}{2} - \mathrm{V}'$$

Schreibt man nun mit dieser Lagrange-Funktion die Wirkung wieder als Integral, so kann man die Unabhängigkeit vom Reparametrisierungsparameter N durch Variation nachgepfüft werden:

$$\mathrm{S} = \int \dot{x}p - \mathrm{H} = \frac{m\dot{x}^2}{2N} + N\frac{mc^2}{2} - \mathrm{V}'$$

$$\Rightarrow \frac{\delta \mathrm{S}}{\delta \mathrm{N}} = \frac{-m\dot{x}^2}{2n^2} + \frac{mc^2}{2} \stackrel{!}{=} 0$$

$$\mathrm{N} = \pm\sqrt{\frac{\dot{x}^2}{c^2}}$$

Wird für den Parameter N das negative Vorzeichen gewählt, so erhält man die Wirkung, von der die Überlegungen ausgingen. Der Parameter N kann jetzt in die Bahnparametrisierung (d.h. den Bahnparameter s) hineingezogen werden, indem nun (analog zu oben) der Übergang d$s \rightarrow \mathrm{d}\tau = \mathrm{N} \cdot \mathrm{d}s$ vollzogen wird. Letztendlich erhält man die Wirkung:

$$\mathrm{S} = \int \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{mc^2}{2} - \mathrm{V}''\mathrm{d}\tau$$

# Kapitel 3

# Ehrenfest'sches Paradoxon – Die rotierende Scheibe

## 3.1 Darlegung des Problems

Das als *Ehrenfest'sche Paradoxon* bekannte Problem wurde ursprünglich 1909 von Paul Ehrenfest in der Physikalischen Zeitschrift veröffentlicht. er betrachtet dabei einen Zylinder, der um seine Symmetrieachse rotiert. Für die Betrachtungen wird die z-Richtung des Zylinders nicht benötigt, da sie orthogonal zu sämtlichen Geschwindigkeiten und Beschleunigungen ist. Es wird somit nur eine rotierende Scheibe betrachtet. Im Folgenden werden zwei Bezugssysteme verwendet: Das Laborsystem, das als Inertialsystem gewählt wird, in dem sich die Scheibe dreht, und das System de Scheibe, das hier mit gestrichenen Variablen bezeichnet wird.
Die Scheibe sei stabil gewählt, sodass sie weder reissen noch sich wölben kann. Nach Ehrenfest müssen jetzt zwei Dinge gelten:

1. Der Umfang muss lorentz-kontrahiert sein, da er sich entlang seiner Ausdehnung bewegt: $2\pi \mathrm{R}' < 2\pi \mathrm{R}$
2. Der Radius muss unverändert bleiben, da die Bewegung stets senkrecht zu ihm erfolgt: R'=R

Diese beiden Forderungen sind offensichtlich widersprüchlich.

## 3.2 Genaue Betrachtung

Betrachtet man die Scheibe aus dem Laborsystem, so erscheint der Radius unkontrahiert. Die im Laborsystem bedeckte Fläche ist somit konstant und beträgt $\mathrm{A} = \pi R^2$. Der Umfang der bedeckten Fläche auf dem Laborboden ändert sich somit nicht. Legt man nun eine Reihe von Massstäben entlang des Scheibenumfangs sowohl auf den Boden des Laborsystems als auch der Scheibe, so lässt sich damit die Länge des Umfanges messen. Der Einfachheit halber wählen wir die Stäbe mit einer Länge L so, dass genau N Stäbe entlang des Kreises passen; der Umfang beträgt also U=NL. Betrachtet man von dem Laborsystem aus die

Scheibe, so scheinen die Massstäbe, wie erwartet, lorentz-kontrahiert. Der Umfang der Scheibe, gemessen mit diesen Massstäben, wird somit *grösser*. Auch von der Scheibe aus betrachtet erscheinen die Massstäbe auf dem Laborboden kontrahiert, sodass der Umfang der Scheibe *grösser* wird. Die Scheibe wird somit in Wahrheit *gestreckt*.
Betrachtet man nun das Verhältnis des Umfanges und Radius, so erhält man das Resultat $\frac{U}{D} \neq \pi$, da der Umfang um den $\gamma$-Faktor gestreckt wird, sodass er U=$\gamma$NL beträgt. Tatsächlich gilt daher

$$\frac{U}{D} = \gamma\pi$$

Für den $\gamma$-Faktor gilt jetzt aber

$$\gamma = \sqrt{1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}} = \sqrt{1 - \frac{(\omega r)^2}{c^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{U}{D} \text{ r-abhängig}$$

Das Verhältnis ist also im Gegensatz zu einer gewöhnlichen Scheibe nicht konstant, sondern vom Radius abhängig. Die Scheibe besitzt somit eine nicht-euklidische Geometrie.

## 3.3 Metrik

Die Geometrie eines Objektes wird durch die Metrik charakerisiert. Um die Metrik der rotierenden Scheibe zu erhalten, führen wir eine Koordinatentransformation in en mitrotierendes Bezugssystem durch.

$$\begin{aligned} t &= t' & \mathrm{d}t &= \mathrm{d}t' \\ r &= r' & \mathrm{d}r &= \mathrm{d}r' \\ \varphi &= \varphi' + \omega t' & \mathrm{d}\varphi &= \mathrm{d}\varphi' + \mathrm{d}\omega t' \\ z &= z' & \mathrm{d}z &= \mathrm{d}z' \end{aligned}$$

Um die Elemente der Metrik zu bestimmen, wird das infinitesimale invariante Abstandselement gebildet.

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}r^2 - r^2\mathrm{d}\varphi^2 - \mathrm{d}z^2$$

$$= (1 - \omega^2 r'^2)\mathrm{d}t'^2 - \mathrm{d}r'^2 - r'^2\mathrm{d}\varphi'^2 - 2r'^2\omega\mathrm{d}\varphi'\mathrm{d}t' - \mathrm{d}z'^2$$

Daraus lassen sich die Elemente der Metrik ablesen:

$$\Rightarrow \qquad \begin{aligned} g_{00} &= 1 - \omega^2 r'^2 \\ g_{rr} &= -1 \\ g_{\varphi\varphi} &= -r'^2 \\ g_{0\varphi} &= -r'^2\omega = g_{\varphi 0} \\ g_{zz} &= -1 \end{aligned}$$

Die Metrik kann so umformuliert werden, dass sich für den räumlichen Anteil ein einfacher Ausdruck ergibt:

$$\mathrm{d}s^2 = \left(1 - \frac{\omega^2 r'^2}{c^2}\right)\left(c\mathrm{d}t' - \frac{r'^2 \frac{\omega}{c}}{1 - \frac{\omega^2 r'^2}{c^2}}\mathrm{d}\varphi'\right)^2 - \mathrm{d}r'^2 - \frac{r'^2}{1 - \frac{\omega^2 r'^2}{c^2}} 1 - \frac{\omega^2 r'^2}{c^2}\varphi'^2 - 1 - \frac{\omega^2 r'^2}{c^2} z'^2$$

Mithilfe dieser Metrik gewinnt man den Umfang der Scheibe sehr einfach wie gewohnt durch Integration über das entsprechende Wegelement:

$$\mathrm{U} = \int_0^{2\pi} \frac{r'\mathrm{d}\varphi'}{\sqrt{1 - \frac{\omega^2 r'^2}{c^2}}} = \frac{2\pi r'}{\sqrt{1 - \frac{\omega^2 r'^2}{c^2}}} = \gamma \mathrm{NL}$$

Das anscheinende Paradoxon kann also durch eine genaue Betrachtung aufgelöst werden. Die Lösung besteht darin, von der Annahme der euklidischen Geometrie Abstand zu nehmen und eine allgemeinere Betrachtung durchzuführen.
Die so betrachtete Scheibe ist selbstverständlich nicht als real zu sehen, da eine reale Scheibe schon lange bevor solche Effekte auftreten durch die mechanischen Belastungen reissen würde. Sie ist als Modellsystem für rotierende Systeme zu verstehen, wie sie z.B. in Gaswolken in Galaxien auftreten, die um das Zentrum rotieren.

# Quellenverzeichnis

[1] Georg Wolschin : Vorlesungsskript zur Elektrodynamik

[2] Jackson: Klassische Elektrodynamik 11-12

[3] Misner, Thorne, Wheeler: Gravitation p169ff

[4] Jörg Main: Vorlesungsskript zur speziellen Relativitätstheorie

[5] Iring Bender: Vorlesungskript zur ART, Kapitel 6