QFT

(M)

- $\phi(x)$ Feldop., $x = (t^0, \vec{x})$

- $\phi = \mathcal{U}(\overset{\text{Transl.}}{a}, \overset{\text{Rot.}}{\Lambda})$ Poincaré-Gruppe

$$\phi(x) \to \phi(\Lambda x + a)$$

$$= \underbrace{\mathcal{U}(a,\Lambda)}_{\text{Darstellung von } \phi} \phi(x)\, \mathcal{U}(a,\Lambda)^{-1}$$

- [Kausalität]

$$[\phi(x), \phi(y)] = 0 \qquad (x-y)^2 < 0$$

- Vakuumzustand

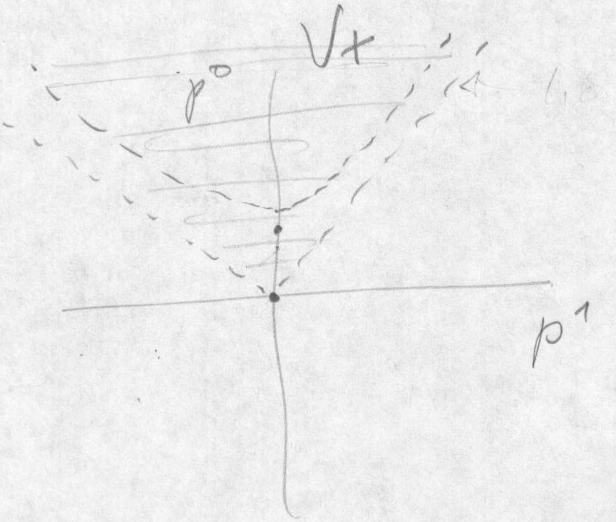
$|0\rangle$

charakterisiert durch Inv. Eigenschaft

$$\mathcal{U}(a,\Lambda)\,|0\rangle = |0\rangle$$

- $U(a) = e^{iPx}$, $P^\mu = (\underset{H}{\overset{\shortparallel}{P^0}}, P^k)$

Spectrum $p^0 \geq 0$, $p^2 \geq 0$



Vorwärts Lichtkegel

- Wightman – Fkt.

$$\left\{ W_n \overset{!}{=} \langle 0 | \, \phi(x_n) \ldots \phi(x_1) \, | 0 \rangle, \; n = 1, \ldots \right\}$$

charakterisieren die Theorie

Schwinger Fkt.

$$\phi(x) = e^{iPx}\,\phi(0)\,e^{-iPx}$$

$$\langle 0|\phi(x_n)\cdots\phi(x_1)|0\rangle$$

$$= \langle 0|\phi(0)\,e^{-iP(x_n-x_{n-1})}\,\phi(0)\cdots e^{-iP(x_2-x_1)}\,\phi(0)|0\rangle$$

$$\tilde{x}_k = x_k - i\xi_k\,, \qquad \xi_{k+1}-\xi_k \in V_+$$

$$-iP(\tilde{x}_{k+1}-\tilde{x}_k) = -iP(x_{k+1}-x_k) - \underbrace{P\cdot(\xi_{k+1}-\xi_k)}_{\geq 0}$$

↳ $\tilde{W}_n$ fortsetzbar in <u>diesen</u> Bereich

insbes. nach $\tilde{x}_k^\mu = (-i\,x_k^4, \vec{x}_k)$

$$x_n^4 > x_{n-1}^4 \cdots > x_1^4$$

$$S(x^{(E)} \ldots x^{(E)}) = \tilde{W}(\tilde{x} \ldots \tilde{x}_1)$$

-2.4

$$S_n(x_n^{(E)}, \dots x_1^{(E)}) \qquad \tau = x^4$$

$$= \langle 0 | \phi(\vec{x}_n) e^{-H(\tau_n - \tau_{n-1})} \phi(\vec{x}_{n-1})$$

$$\dots e^{-H(\tau_2 - \tau_1)} \phi(x_1) | 0 \rangle$$

$$\tau_n > \tau_{n-1} > \dots > \tau_1$$

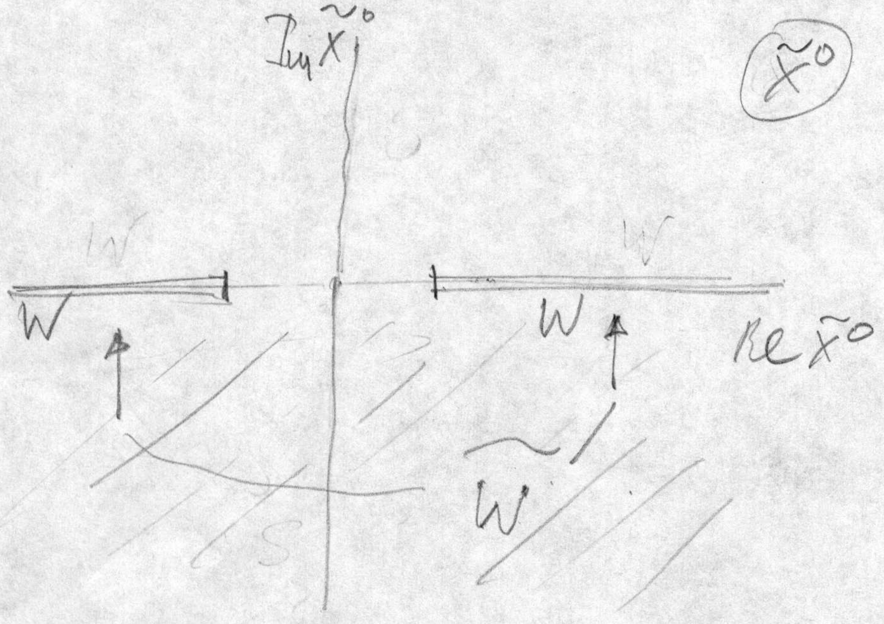
$\hat{=}$ Korrel. von 1.5

"Edge of the wedge"

$n=2$

$$W_2(x_2, x_1) = W(x_2 - x_1)$$

$\tilde{W}(\tilde{x}^0,)$ analyt. in unt. Halb.



$x_1 \leftrightarrow x_2 \quad \hat{=} \quad x \to -x$

$\tilde{W}_\pi(x) := \tilde{W}(-x)$ analytisch in obren Halb.

Für raumartige x : W symm.

$\hookrightarrow \tilde{W}$ fortsetzbar in gesamte Kompl. $\tilde{x}^0$ Ebene

$\to S(x^{(E)}) = \tilde{W}(-ix^4)$ und für $x^4 < 0$

Allg. der Schwinger-Fkt

(Osterwalder Schrader)

$S(x_n, \ldots x_1)$

1) Euklid Invarianz

$$S(x_n, \ldots x_1) = S(\Lambda x_n + a, \ldots, \Lambda x_1 + a)$$

2) symmetrisch

3) Reflexions-Positivität

$$W \Leftrightarrow S$$

$$W(\vec{x}_k, x_k^0\, x_1) = \lim_{\substack{\varepsilon_k \to 0 \\ \varepsilon_{k+1} > \varepsilon_k}} S(\ldots; \vec{x}_k, x_k^4 = i x_k^0 + \varepsilon_k,)$$

$S \quad \leftrightarrow \quad$ n-Pkt.-Fkt $\;\tau_n = \langle 0|\, T(\phi(x_n)\cdots\phi(x_1))\,|0\rangle$

τ_n symmetrised

$$\tau_n(x_1,\ldots,x_n) = \lim_{\varphi\to\pi/2} S(\ \ \vec{x}_k,\, e^{i\varphi} x_k^0) \ldots\ )$$

Reflexions – Positivität

R. Haag
Local Q. Phys.
Kap: General QFT
S. 55 ff

zunächst QM ($\hat{=}$ $d=0$ QM)

Testfkt. $f_+(\tau)$ Träger $\tau > 0$ $\tau > 0$

Betrachte:

konjug. komp.

$$\int d\bar{\tau}\, d\tau \quad f_+(\tau_2)\, \overline{f_+(-\bar{\tau}_1)}\; S(\tau_2, \bar{\tau})$$

Im Integr. Bereich autom. $\tau_2 > \tau_1$

$$= \int d\tau\, d\bar{\tau} \quad f_+(\tau)\, \overline{f_+(-\bar{\tau})}$$

$$\langle 0 |\; \mathfrak{A}(\tau)\;\; \mathfrak{A}(\bar{\tau})\, | 0 \rangle$$

$$= \langle 0 | \int f_+(\tau_1)\, \mathfrak{A}(\tau_1) \int \overline{f_+(\bar{\tau}_1)}\, \mathfrak{A}(-\bar{\tau})\, | 0 \rangle$$

$$\mathfrak{A}(\tau) = e^{H\tau}\, \mathfrak{A}\, e^{-H\tau}$$

$$\mathfrak{A}(\tau)^* = e^{-H\tau}\, \mathfrak{A}\, e^{H\tau} = \mathfrak{A}(-\tau)$$

$$\langle 0 | \left(\int f_+(\tau)\, \mathfrak{A}(\tau)\right) \left(\int f_+(\tau)\, \mathfrak{A}(\tau)\right)^* | 0 \rangle \geq 0$$

2.12
Verallg

$f_+(\tau_2,\tau_1)$ Träger $\tau_2 > \tau_1 > 0$

$\Theta f_+(\bar\tau_2,\bar\tau_1) := \overline{f_+(-\bar\tau_1,-\bar\tau_2)}$

$-\bar\tau_1 > -\bar\tau_2$

$\bar\tau_1 < \bar\tau_2$

$f_+(\tau_2,\tau_1)\cdot\Theta f_+(\bar\tau_2,\bar\tau_1)$

Träger $\tau_2 > \tau_1 > 0 > \bar\tau_2 > \bar\tau_1$

$$\int f_+(\tau_2,\tau_1)\,\Theta f_+(\bar\tau_2,\bar\tau_1)\;\underbrace{S(\tau_2,\tau_1,\bar\tau_2,\bar\tau_1)}$$

$$\langle 0|\,\phi(\tau_2)\,\phi(\tau_1)\,\phi(\bar\tau_2)\,\phi(\bar\tau_1)\,|0\rangle$$

$$= \langle 0|\,\overbrace{\int f_+(\tau_2,\tau_1)\,\phi(\tau_2)\,\phi(\tau_1)}^{\Theta}$$

$$\cdot\underbrace{\int \overline{f_+(\bar\tau_1,\bar\tau_2)}\,\phi(-\bar\tau_2)\,\phi(-\bar\tau_1)}\;|0\rangle$$

$$\int \overline{f_+(\bar\tau_2,\bar\tau_1)}\,\phi(-\bar\tau_1)^*\,\phi(-\bar\tau_2)$$

OS $= \langle 0|\,\Theta\,\Theta^*\,|0\rangle \geq 0$

jetzt QFT

$$\{ S(x_n, \dots x_1), N = 1, \dots \}$$

$$f_+(x_k, \dots x_1), \quad x_k^4 > \dots x_1^4 > 0$$

$$\Theta f_+(x_k, \dots, x_1) := \overline{f_+(\Theta x_1, \dots \Theta x_k)}$$

$$\text{mit } \Theta(\vec{x}, x^4) = (\vec{x}, -x^4)$$

$$\int f_+(x)\, \Theta f_+(\bar{x})\, S(x_n, \dots x_1, \bar{x}_n, \dots, \bar{x}_1)$$

$$= \langle 0 | \mathcal{O}\, \mathcal{O}^* | 0 \rangle \geq 0$$

mit

$$\mathcal{O} = \int f_+(x)\, e^{H x_n^4} \phi(\vec{x}_n) e^{-H x_n^4} \cdots e^{H x_1^4} \phi(\vec{x}_1) e^{-H x_1^4}$$

$$\mathcal{O}^* = \int \overline{f_+(x)}\, e^{-H x_1^4} \phi(\vec{x}_1) e^{H x_1^4} \cdots e^{-H x_n^4} \phi(\vec{x}_n) e^{H x_n^4}$$

Feld - Darstellung

$$\phi(\vec{x})\, \Psi[\phi] = \phi(\vec{x})\, \Psi[\phi]$$

$$\pi(\vec{x})\, \Psi[\phi] = \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta\phi(\vec{x})} \Psi[\phi]$$

$$H = \int d\vec{x} \left[\underbrace{\tfrac{1}{2}\pi(\vec{x})^2}_{H_0} + \underbrace{\tfrac{1}{2}(\nabla\phi(x))^2 + V(\phi(x))}_{V} \right]$$

In Not. von 1.1 $\quad H_0 + V \quad$ gekoppelte anharm. Osz.

$$\langle \phi_+(\,) | e^{-H_0 \tau} | \phi_-(\,) \rangle \overset{?}{=}$$

$$\overset{?}{\sim} \; e^{-\frac{1}{2\tau}\int d\vec{x}\, \left(\phi_+(x) - \phi_-(x)\right)^2}$$

siehe nachf. Seiten

Normierungsfaktor $\quad \left(\frac{1}{2\pi\tau}\right)^{\#/2} \; ?$

$\# =$ Anz. Freiheitsgr. $= \infty$

erfüllt

$$\Psi_\tau[\phi] = \Phi(\tau)\, e^{-\frac{1}{2\tau}\int_x \left(\phi(x)-\phi_0(x)\right)^2} \quad \text{(2.17)}$$

die Schrödingergl $\partial_\tau \Psi_\tau = - H_0 \Psi_\tau$?

$$\partial_\tau \Psi_\tau[\phi] = \left(\frac{\partial_\tau \Phi}{\Phi} + \frac{1}{2\tau^2} \int_{\vec{x}} \left(\phi(x) - \phi_0(x)\right)^2 \right) \Psi_\tau[\phi]$$

$$\frac{\delta}{\delta\phi(x)} \Psi_\tau[\phi] = -\frac{1}{\tau}\left(\phi(x) - \phi_0(x)\right)\Psi[\phi]$$

$$\frac{\delta}{\delta\phi(x)} \frac{\delta}{\delta\phi(x)} \Psi_\tau$$

$$= \frac{1}{\tau^2}\left(\phi(x) - \phi_0(x)\right)^2 \Psi[\phi]$$

$$- \frac{1}{\tau} \left(\text{"} \frac{\delta \phi(x)}{\delta\phi(x)} \text{"} \right) \Psi[\phi]$$

↳

$$\int_x \left(\frac{\delta}{\delta\phi(x)} \right)^2 \Psi_\tau[\phi]$$

$$= \frac{1}{\tau^2} \int \left(\phi(x) - \phi_0(x)\right)^2 \Psi[\phi]$$

$$- \frac{1}{\tau} \int \text{"} \frac{\delta\phi(x)}{\delta\phi(x)} \text{"} \Psi[\phi]$$

2.18

Schröd. Gl. ?

$$\partial_\tau \Psi_\tau = -H_0 \Psi_\tau$$

$$= \frac{1}{2}\int_x \left(\frac{\delta}{\delta\phi(x)}\right)^2 \Psi_\tau$$

erfüllt falls

$$\frac{\partial_\tau \Phi(\tau)}{\Phi(\tau)} = -\frac{1}{2\tau}\,{}^{\prime\prime}\!\left(\int_x \frac{\delta\phi(x)}{\delta\phi(x)}\right)^{\prime\prime}$$

$$\Phi(\tau) = C\cdot\left(\frac{1}{\tau}\right)^{\frac{1}{2}\underbrace{{}^{\prime\prime}\left(\int \frac{\delta\phi(x)}{\delta\phi(x)}\right)^{\prime\prime}}_{\#\;\hat{=}\;\text{Zahl der Freiheitsgrade}}}$$

$\Rightarrow$ Notwendigkeit der Diskretisierung

- Gitterkonst a $\quad \int_x \longleftrightarrow \sum_{\substack{x = z a \\ z \in \mathbb{Z}}}$
- endl. Vol. L, e.g. per. $\quad \sum_{z\in\mathbb{Z}} \rightarrow \sum_{0 \le z \le \frac{L}{a}-1}$