Theoretische Physik 4 (Quantentheorie)

Sommersemester 2014

Übungsblatt 8

Aufgabe 8.1: Matrixdarstellung von Operatoren.

Sei $\mathcal{H}$ ein zweidimensionaler Hilbertraum mit einer Orthonormalbasis $\{|v_1\rangle, |v_2\rangle\}$. Für den Operator A gelte:

$$A|v_1\rangle = -|v_2\rangle\,, \qquad A|v_2\rangle = -|v_1\rangle\,.$$

a) Formulieren Sie A als Linearkombination von Produkten $|v_i\rangle\langle v_j|$.

b) Ist A hermitesch?

c) Berechnen Sie $AA^\dagger$, $A^\dagger A$ und A^2.

d) Bestimmen Sie die Eigenwerte und die Eigenzustände von A.

e) Geben Sie die Spektraldarstellung von A an.

5 Punkte.

Aufgabe 8.2: Spektrum kommutierender Operatoren.

Sei $\mathcal{H}$ ein N-dimensionaler Hilbertraum und A und B seien normale lineare Operatoren auf $\mathcal{H}$, die kommutieren: $AB = BA$. Zeigen Sie: A und B sind gemeinsam diagonalisierbar, d.h. $\mathcal{H}$ hat eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren $\{|e_1\rangle, \ldots, |e_N\rangle\}$ von A und B.

Hinweis: betrachten Sie die Wirkung von B auf die Eigenvektoren von A.

3 Punkte.

Aufgabe 8.3: Spektraldarstellung einer Matrix

a) Bestimmen Sie die Spektraldarstellung von $U = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$.

b) Finden Sie eine hermite'sche Matrix A, sodass $U = e^{\mathrm{i}tA}$.

c) Berechnen Sie $B = \mathrm{sgn}(A)$, wobei sgn die Signumfunktion ist, und $e^{\mathrm{i}tB}$.

6 Punkte.

Aufgabe 8.4: Operatorspur

Sei $\mathcal{H}$ ein N-dimensionaler Hilbertraum und $\{|e_1\rangle, \ldots, |e_N\rangle\}$ eine Orthonormalbasis von $\mathcal{H}$. Die Spur eines linearen Operators A ist definiert als

$$\mathrm{Tr}(A) = \sum_{n=1}^{N} \langle e_n | A | e_n \rangle.$$

Zeigen Sie:

a) Die Spur von A ist unabhängig von der verwendeten Orthonormalbasis (*Hinweis:* Vollständigkeitsrelation einsetzen).

b) Die Spur von Operatorprodukten ist zyklisch invariant: für lineare Operatoren A und B gilt

$$\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$$

(*Hinweis:* Vollständigkeitsrelation einsetzen).

Wie lautet die Verallgemeinerung der zyklischen Invarianz der Spur auf das Produkt ABC? Was ist die Spur eines Kommutators $[A, B]$?

c) Die Spur von A ist invariant unter unitärer Konjugation.

d)* Die Abbildung $(A, B) \mapsto \langle A, B \rangle = \mathrm{Tr}(A^\dagger B)$ definiert ein Skalarprodukt auf dem Raum der Operatoren auf $\mathcal{H}$.

e)* Betrachten Sie Spur der Gleichung $[X, P] = \mathrm{i}\hbar$. Was folgt daraus?

6+2 Punkte.

Abgabe am 17.06.2014 vor Beginn der Vorlesung. Viel Erfolg!