Institut für Theoretische Physik
C. Ewerz, F. Paccetti Correia

Universität Heidelberg
Sommersemester 2008

1. Übung zur Elektrodynamik

Besprechung der Präsenzaufgaben: 16.04.2008
Abgabe der schriftlichen Aufgaben: 18.04.2008

Schriftlich zu bearbeitende Aufgaben sind mit einem S gekennzeichnet, Präsenzaufgaben mit einem P. Die Präsenzaufgaben sollen **vor** den Übungen gelöst werden. Die Punkte für diese Aufgaben gibt es für die Bereitschaft zum Vorrechnen. Es empfiehlt sich, dann auch eine Lösung parat zu haben. (Sonst werden die Punkte wieder abgezogen.)

P 1 Delta-Distribution (4 Punkte)

Wir betrachten Distributionen in einer Dimension.

(a) Berechnen Sie die zweite Ableitung von $x\theta(x)$.

(b) Zeigen Sie für $a \neq 0$

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\,\delta(x)\,. \tag{1}$$

(c) Zeigen Sie für eine Funktion $f(x)$ mit endlich vielen einfachen Nullstellen $x_1, \ldots, x_n$:

$$\delta(f(x)) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{|f'(x_i)|}\,\delta(x - x_i)\,. \tag{2}$$

Hinweis: Zeigen Sie dies hier nur für den Fall einer beliebig oft differenzierbaren Funktion $f(x)$, indem Sie Intervalle um die Nullstellen betrachten und dort $f(x)$ in eine Taylorreihe entwickeln.

(d) Zeigen Sie, daß die Delta-Funktion mittels

$$\lim_{\epsilon\to 0} f_\epsilon(x - x_0) = \delta(x - x_0) \tag{3}$$

dargestellt werden kann, wenn

$$f_\epsilon = \begin{cases} (2\epsilon)^{-1} & \text{für } |x| \leq \epsilon \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}\,. \tag{4}$$

Zeigen Sie, daß sie auch eine Darstellung mittels der Gaußkurve besitzt, d. h.

$$\lim_{\sigma\to 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(x - x_0)^2}{2\sigma^2}\right] = \delta(x - x_0)\,. \tag{5}$$

P/S 2 Vektoranalysis I (2+6 Punkte)

Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke, in denen $r = |\mathbf{x}|$, $f(r)$ eine differenzierbare Funktion und $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$ ein konstanter Vektor ist:

P(a) $\operatorname{grad} r^2$, $\operatorname{grad} r$, $\operatorname{div} \mathbf{x}$, $\operatorname{rot} \mathbf{x}$

S(b) $\operatorname{grad}(\mathbf{c} \cdot \mathbf{x})$, $\operatorname{grad} f(r)$, $\operatorname{div}(\mathbf{c} \times \mathbf{x})$, $\operatorname{rot}(\mathbf{c} \times \mathbf{x})$, $\operatorname{grad} 1/r$, $\operatorname{div} \frac{\mathbf{c}}{r}$.

P/S 3 Integration von Vektorfeldern (4+4 Punkte)

P(a) Berechnen Sie für das Vektorfeld $\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ das Flächenintegral

$$\int_{\mathcal{F}} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{f}\,, \tag{6}$$

wobei die Fläche $\mathcal{F}$ die Halbsphäre mit $\mathbf{x}^2 = 1, x_3 \geq 0$ sein soll.
Berechnen Sie weiter das Linienintegral

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{s}\,, \tag{7}$$

wobei der Weg $\mathcal{C}$ die positiv orientierte Kreislinie $x_1^2 + x_2^2 = 1, x_3 = 0$ ist. Verifizieren Sie den Satz von Stokes für dieses Integral.

S(b) Gegeben sei das Vektorfeld $\mathbf{b}(\mathbf{x}) = (3x_3, x_1^2 + x_2^2, x_1 x_3)$. Das zweidimensionale Flächenstück $\mathcal{F}$ im $\mathbb{R}^3$ sei gegeben durch

$$\mathcal{F} = \{(x_1, x_2, x_3) |\, x_3 = x_1 x_2 \text{ mit } |x_1| \leq 1, |x_2| \leq 1\}\,. \tag{8}$$

Es sei so orientiert, daß im Ursprung $(0,0,1)$ positiv orientierter Normalenvektor ist. Berechnen Sie

$$\int_{\mathcal{F}} \mathbf{b} \cdot d\mathbf{f}\,. \tag{9}$$

Weitere Informationen unter:
http://www.thphys.uni-heidelberg.de/~ewerz/ed08.html