Institut für Theoretische Physik
C. Ewerz, F. Paccetti Correia

Universität Heidelberg
Sommersemester 2008

10. Übung zur Elektrodynamik

Besprechung der Präsenzaufgaben: 18.06.2008
Abgabe der schriftlichen Aufgaben: 20.06.2008

P 40 Felder an Grenzflächen zwischen Materialien (6 Punkte)

Wir wollen das Verhalten von elektrischen und magnetischen Feldern an Grenzflächen zwischen Materialien mit verschiedenen Dielektrizitätskonstanten und Permeabilitäten untersuchen. Dabei nehmen wir an, daß die freibeweglichen Ladungs- und Stromdichten an den Grenzflächen verschwinden.

(a) Leiten Sie die Stetigkeitsbedingungen für die Tangential- bzw. Normalkomponenten der Felder $\mathbf{E}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{B}$ und $\mathbf{H}$ an einer Grenzfläche zwischen verschiedenen Materialen her.

(b) Geben Sie Gleichungen für die nichtstetigen Komponenten der Felder an.

(c) Leiten Sie aus den Stetigkeitsbedingungen die 'Brechungsgesetze' für die elektrischen bzw. magnetischen Feldlinien an Grenzflächen her.

S 41 Punktladung vor Dielektrikum (8 Punkte)

Der gesamte Raum sei mit zwei homogenen isotropen Dielektrika der Dielektrizitätskonstanten ε_1 und ε_2 gefüllt: ε_1 für $x > 0$ und ε_2 für $x < 0$. Außerdem befinde sich eine Punktladung q bei $(a, 0, 0)$ mit $a > 0$.

(a) Zeigen Sie, daß das elektrostatische Potential durch den Ansatz

$$x > 0: \qquad \varphi_1(\mathbf{x}) = \frac{1}{\epsilon_1}\left(\frac{q}{|\mathbf{x} - a\mathbf{e}_1|} - \frac{q'}{|\mathbf{x} + b\mathbf{e}_1|}\right) \tag{1}$$

$$x < 0: \qquad \varphi_2(\mathbf{x}) = \frac{1}{\epsilon_2}\frac{q''}{|\mathbf{x} - a\mathbf{e}_1|} \tag{2}$$

dargestellt werden kann. Bestimmen Sie aus den Stetigkeitsbedingungen an der Grenzfläche die Konstanten b, q' und q'' und berechnen Sie das elektrische Feld.

Bemerkung: Beachten Sie die Ähnlichkeit dieses Ansatzes mit dem, den man mittels Spiegelladungen für eine metallische Grenzfläche erhält.

(b) Betrachten Sie die beiden Grenzfälle $\varepsilon_2 \to \infty$ und $\varepsilon_2 \to 0$. Was ist die physikalische Bedeutung dieser beiden Grenzfälle? Was erhält man für $\varepsilon_2 = \varepsilon_1$?

(c) Skizzieren Sie die elektrischen Feldlinien für die Fälle $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$ und $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$.

(d) Berechnen Sie die Polarisationsladungsdichte auf der Grenzfläche $x = 0$.

S 42 Dielektrische Kugel im homogenen Feld (optional, +15 Punkte)

In ein unendlich ausgedehntes dielektrisches Medium der Dielektrizitätskonstanten ε_a, in dem ein homogenes elektrisches Feld $E_0\mathbf{e}_3$ herrscht, werde eine elektrisch neutrale Kugel aus homogenem dielektrischen Material mit ε_i gebracht.

(a) Berechnen Sie das Potential $\varphi_i(\mathbf{x})$ innerhalb und $\varphi_a(\mathbf{x})$ außerhalb der Kugel aus Ansätzen der Form

$$\varphi(\mathbf{x}) = \sum_{l=0}^{\infty}(A_l r^l + B_l r^{-(l+1)})P_l(\cos\theta) \tag{3}$$

mit den Legendre-Polynomen P_l.

(b) Bestimmen Sie daraus die Feldstärke und die Polarisation innen und außen.

(c) Wie groß ist die auf der Kugeloberfläche sitzende Polarisationsladungsdichte σ und das Dipolmoment $\mathbf{d}$ der Kugel?

(d) Veranschaulichen Sie Ihre Ergebnisse und beachten Sie dabei auch den Fall $\varepsilon_i < \varepsilon_a$, speziell $\varepsilon_i = 1$, und den Grenzfall $\varepsilon_i \to \infty$.

S 43 Telegraphengleichung (6 Punkte)

Wir betrachten ein homogenes Medium mit zeitlich und räumlich konstanter Dielektrizitätskonstante ε, Permeabilität μ und spezifischer Leitfähigkeit σ. Es sei angenommen, daß sich keine freibeweglichen Ladungen im Medium befinden, d. h. das Medium ist elektrisch neutral.

(a) Leiten Sie aus den makroskopischen Maxwell-Gleichungen und den Materialgleichungen $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$ und $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ sowie dem Ohmschen Gesetz $\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}$ Differentialgleichungen zweiter Ordnung für die Felder $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$ her. Diese Differentialgleichungen heißen Telegraphengleichungen und gehören zu den Wellengleichungen.

(b) Zeigen Sie, daß man für Isolatoren, d. h. für $\sigma = 0$, aus den Telegraphengleichungen die bekannten Wellengleichungen mit einer modifizierten Lichtgeschwindigkeit erhält.

Weitere Informationen unter:
http://www.thphys.uni-heidelberg.de/~ewerz/ed08.html