Institut für Theoretische Physik — Universität Heidelberg
C. Ewerz, F. Paccetti Correia — Sommersemester 2008

11. Übung zur Elektrodynamik

Besprechung der Präsenzaufgaben: 25.06.2008
Abgabe der schriftlichen Aufgaben: 27.06.2008

S 44 Brechung und Reflexion an Grenzflächen von Dielektrika (5 Punkte)

Die Ebene $z = 0$ bilde die Grenzfläche zwischen zwei homogenen, isotropen und nichtleitenden Dielektrika mit den Dielektrizitätskonstanten ε_1 bzw. ε_2 und den Permeabilitäten μ_1 bzw. μ_2.
Eine monochromatische ebene Welle

$$\mathbf{E}_e = \boldsymbol{\epsilon}_e e^{i(\mathbf{k}_e \cdot \mathbf{x} - \omega_e t)} \tag{1}$$

falle im ersten Dielektrikum auf die Grenzfläche ein. Ein Teil der elektromagnetischen Energie wird in das erste Dielektrikum reflektiert als monochromatische ebene Welle

$$\mathbf{E}_r = \boldsymbol{\epsilon}_r e^{i(\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{x} - \omega_r t)}\,, \tag{2}$$

der Rest dringt als durchgehende monochromatische ebene Welle

$$\mathbf{E}_d = \boldsymbol{\epsilon}_d e^{i(\mathbf{k}_d \cdot \mathbf{x} - \omega_d t)} \tag{3}$$

in das zweite Medium ein.

(a) Zeigen Sie, daß aus den Stetigkeitsbedingungen für die Tangential- bzw. Normalkomponenten der Felder **E**, **D**, **B** und **H** folgt, daß

$$\omega_e = \omega_r = \omega_d\,, \tag{4}$$

$$\frac{|\mathbf{k}_e|}{\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}} = \frac{|\mathbf{k}_r|}{\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}} = \frac{|\mathbf{k}_d|}{\sqrt{\varepsilon_2\mu_2}}\,. \tag{5}$$

(b) Zeigen Sie, daß die drei Wellenvektoren $\mathbf{k}_e$, $\mathbf{k}_r$ und $\mathbf{k}_d$ in einer Ebene liegen.

Wir bezeichnen mit θ_e, θ_r und θ_d die Winkel, die die Vektoren $\mathbf{k}_e$, $\mathbf{k}_r$ und $\mathbf{k}_d$ jeweils mit dem Lot auf die Grenzfläche einschließen.

(c) Zeigen Sie, daß $\theta_e = \theta_r$. Leiten Sie das Snelliussche Brechungsgesetz her:

$$\frac{\sin\theta_e}{\sin\theta_d} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2\mu_2}{\varepsilon_1\mu_1}}\,. \tag{6}$$

S 45 Hohlraumstrahlung (5 Punkte)

Wir wollen zeigen, daß im Inneren eines Quaders mit den Kantenlängen a, b, und c zeitlich veränderliche elektromagnetische Felder existieren können. Die Oberflächen des Quaders sollen aus (ideal) leitendem Material bestehen, und im Quader sollen keine Ladungen und Ströme vorhanden sein. Benutzen Sie dazu den Ansatz

$$E_\alpha(\mathbf{x}, t) = E^0_\alpha \cos(k_\alpha x_\alpha) \sin(k_\beta x_\beta) \sin(k_\gamma x_\gamma) e^{-i\omega t} \tag{7}$$

mit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \{(1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2)\}$.

Welche Einschränkungen an $\mathbf{E}$ folgen aus den Maxwell-Gleichungen und den Randbedingungen? Wie lautet $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t)$? Welches ist die kleinstmögliche Frequenz, so daß $\mathbf{E} \neq 0$?

Hinweis: Beachten Sie, daß die Tangentialkomponente von $\mathbf{E}$ auf den Oberflächen des Quaders verschwindet.

P 46 Energie und Impuls ebener Wellen (5 Punkte)

Wir schreiben elektromagnetische Wellen oft in Form komplexer Vektoren. Physikalisch relevant ist aber nur der Realteil.

(a) Geben Sie ein Beispiel dafür an, daß für einen komplexwertigen Vektor $\mathbf{a}$ im allgemeinen $\mathrm{Re}\,\mathbf{a}^2 \neq (\mathrm{Re}\,\mathbf{a})^2$, wobei $\mathrm{Re}\,\mathbf{a} = (\mathbf{a} + \mathbf{a}^*)/2$.

(b) Es seien $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{a}(\mathbf{x})e^{i\omega t}$ und $\mathbf{b}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{b}(\mathbf{x})e^{i\omega t}$. Geben Sie einen Ausdruck für $d = (\mathrm{Re}\,\mathbf{a}) \cdot (\mathrm{Re}\,\mathbf{b})$ an. Was ergibt sich für $\langle d\rangle_t$, d. h. für den zeitlichen Mittelwert von d über eine Periode $T = (2\pi)/\omega$?

Wir wollen nun eine ebene elektromagnetische Welle mit

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)} \tag{8}$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{k}}{k} \times \mathbf{E} \tag{9}$$

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{k} = 0 \tag{10}$$

im Vakuum betrachten.

(c) Bestimmen Sie die Energiedichte u der Welle sowie ihr zeitliches Mittel $\langle u\rangle_t$. Berechnen Sie den Poynting-Vektor $\mathbf{S}$ und sein zeitliches Mittel $\langle \mathbf{S}\rangle_t$. Wie hängen u und $\mathbf{S}$ zusammen, und wie $\langle u\rangle_t$ und $\langle \mathbf{S}\rangle_t$? Wie läßt sich das Resultat interpretieren?

Hinweis: Drücken Sie dabei überall das magnetische durch das elektrische Feld aus.

(d) Geben Sie die Impulsdichte $\mathbf{g}$ des elektromagnetischen Feldes und ihr zeitliches Mittel $\langle \mathbf{g}\rangle_t$ an.

S 47 Strahlungsdruck auf eine absorbierende Kugel (5 Punkte)

Eine durch $\mathbf{E}(\mathbf{x},t) = \mathbf{E}_0 \cos(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega t)$, $\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{k} = 0$ gegebene elektromagnetische Welle falle auf eine Kugel vom Radius R. Sie werde von der Oberfläche vollständig absorbiert.

(a) Geben Sie das magnetische Feld der Welle an.

(b) Berechnen Sie mit Hilfe des Maxwellschen Spannungstensors die Kraft, die die Welle im zeitlichen Mittel auf die Kugel ausübt.

Weitere Informationen unter:
http://www.thphys.uni-heidelberg.de/∼ewerz/ed08.html