Institut für Theoretische Physik
C. Ewerz, A. Samberg

Universität Heidelberg
Wintersemester 2013/14

10. Übung zur Elektrodynamik

Besprechung der Präsenzaufgaben: 07.–08.01.2014
Abgabe der schriftlichen Aufgaben: 09.01.2014

S 46 Erdmagnetfeld in Heidelberg (optional, +5 Punkte)

Das Magnetfeld der Erde kann an deren Oberfläche in guter Näherung durch das Feld eines im Erdmittelpunkt lokalisierten magnetischen Dipols beschrieben werden. Wie groß ist die Inklination ι (d. h. der Winkel zwischen Erdmagnetfeld und lokaler Horizontalebene) in Heidelberg? Nehmen sie dazu vereinfachend an, dass die magnetische Breite mit der geographischen Breite übereinstimmt. Letztere beträgt für Heidelberg $\beta = 49{,}4°$.
Hinweis: Beachten Sie, dass die geographische Breite bezüglich des Äquators gemessen wird, d. h. am Äquator ist $\beta = 0$, am Nordpol $\beta = 90°$.

S 47 Zur retardierten Green-Funktion der Wellengleichung (optional, +5 Punkte)

Wir betrachten die inhomogene Wellengleichung $\Box\,\psi(\boldsymbol{x},t) = f(\boldsymbol{x},t)$ und wollen ihre retardierte Green-Funktion aus wenigen Annahmen herleiten.
Für eine Green-Funktion $G(\boldsymbol{x},t)$ der inhomogenen Wellengleichung gilt

$$\Box\, G(\boldsymbol{x},t) = \delta^{(3)}(\boldsymbol{x})\delta(t)\,, \tag{1}$$

so dass $\psi(\boldsymbol{x},t) = \int d^3x' \int dt'\, G(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}', t-t')f(\boldsymbol{x}',t')$ eine spezielle Lösung der inhomogenen Wellengleichung ist.

(a) Wir fordern für die gesuchte Funktion G_{ret} Kausalität (wir wollen die *retardierte* Green-Funktion bestimmen) und Rotationssymmetrie in $\boldsymbol{x}$. Welche Bedingungen an $G_{\text{ret}}(\boldsymbol{x},t)$ ergeben sich daraus?

(b) Betrachten Sie nun zunächst Gl. (1) für $\boldsymbol{x} \neq 0$ und zeigen Sie, dass $G_{\text{ret}}(\boldsymbol{x},t) = g(r-ct)/r$ mit einer beliebigen Funktion $g(\xi)$ die allgemeine mit den in (a) erhaltenen Bedingungen verträgliche Lösung ist.

(c) Betrachten Sie nun die volle Gl. (1). Zeigen Sie, dass $g(\xi) = \frac{c}{4\pi}\,\delta(\xi)$ gilt und folgern Sie, dass $G_{\text{ret}}(\boldsymbol{x},t) = \frac{c}{4\pi r}\,\delta(r-ct)$.

P 48 Längenkontraktion am Nordpol (+3 Punkte)

Der Weihnachtsmann hat zu Weihnachten einen neuen Schlitten mit der stattlichen Länge von 10 m geschenkt bekommen. Seine Garage ist aber nur 5 m lang. (Er wollte seine Garage rechtzeitig zu Weihnachten auf die erforderliche Länge umbauen lassen, der Handwerker ist aber nie aufgetaucht.) Deshalb weist er Knecht Ruprecht an, mit $v = \frac{\sqrt{3}}{2}c$ auf die Garage zuzusteuern. Der Schlitten sei ja dann nur noch 5 m lang, so dass er in die Garage passe. Er werde dann schnell das Garagentor schließen. Knecht Ruprecht ist allerdings ein ängstlicher Typ und weist seinen Chef darauf hin, dass die Garage nur noch 2,5 m lang sei, wenn sie mit $v = \frac{\sqrt{3}}{2}c$ auf den Schlitten zukomme. Der Schlitten könne da wohl nicht hineinpassen, so dass der Weihnachtsmann das Tor gar nicht schließen könne, weil noch 7,5 m Schlitten herausragen würden. Wer von den beiden hat mehr Ahnung von Relativitätstheorie und warum?

S 49 Lorentz-Transformation elektromagnetischer Felder (7 Punkte)

Zeigen Sie, dass die longitudinalen und transversalen Anteile der Felder $\boldsymbol{E}'$ und $\boldsymbol{B}'$ in einem Inertialsystem I', das sich mit der der Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$ relativ zum System I bewegt, von den entsprechenden Komponenten in I abhängen gemäß

$$\boldsymbol{E}'_{\parallel} = \boldsymbol{E}_{\parallel} \qquad \text{und} \qquad \boldsymbol{B}'_{\parallel} = \boldsymbol{B}_{\parallel}\,, \tag{2}$$

$$\boldsymbol{E}'_{\perp} = \gamma(\boldsymbol{E}_{\perp} + \boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{B}) \qquad \text{und} \qquad \boldsymbol{B}'_{\perp} = \gamma(\boldsymbol{B}_{\perp} - \boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{E})\,, \tag{3}$$

wobei wie üblich $\gamma = \sqrt{1 - v^2/c^2}$ und $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{v}/c$.
Hinweis: Es reicht aus, einen Boost in x-Richtung zu betrachten. Untersuchen Sie dann die Lorentz-Transformation des Feldstärketensors $F^{\mu\nu}$, d. h.

$$F'^{\mu\nu} = \Lambda^{\mu}{}_{\rho}\Lambda^{\nu}{}_{\sigma}F^{\rho\sigma} = \Lambda^{\mu}{}_{\rho}F^{\rho\sigma}(\Lambda^T)_{\sigma}{}^{\nu}\,, \tag{4}$$

worin

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}\,, \tag{5}$$

und betrachten Sie die einzelnen Komponenten von $F'^{\mu\nu}$.

S 50 Dualer Feldstärketensor (4 Punkte)

Wir wollen den zum Feldstärketensor $F^{\mu\nu}$ dualen Tensor $\tilde{F}^{\mu\nu}$ betrachten.

(a) Konstruieren Sie explizit den dualen Feldstärketensor $\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\,\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma}$, worin $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ der total antisymmetrische Tensor mit $\epsilon^{0123} = +1$ ist.

Hinweis: Wegen der Antisymmetrie von $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ tragen zu jedem nichtverschwindenden Element von $\tilde{F}^{\mu\nu}$ nur zwei Elemente aus $F^{\mu\nu}$ bei.

(b) Was bedeutet die Gleichung $\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0$ für die Felder $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{B}$?

S 51 Invarianten des elektromagnetischen Feldes (4 Punkte)

Berechnen Sie die lorentzinvarianten Ausdrücke $F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ und $\tilde{F}^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$. Folgern Sie aus der Invarianz dieser beiden Größen:

- Sind die Beträge von $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{B}$ in einem Inertialsystem gleich, so sind sie es in jedem Inertialsystem.
- Stehen $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{B}$ in einem Inertialsystem senkrecht aufeinander, so gilt dies in jedem Inertialsystem.

S 52 Elektromagnetische Dualität und magnetische Monopole

(optional, +12 Punkte)

In dieser Aufgabe wollen wir einige Auswirkungen der hypothetischen Existenz von *magnetischen Monopolen* untersuchen. Dazu führen wir in die Maxwell-Gleichungen magnetische Ladungs- und Stromdichten ein:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}\boldsymbol{E} &= 4\pi\rho_{\mathrm{e}}\,, & \operatorname{rot}\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} &= -\frac{4\pi}{c}\,\boldsymbol{j}_{\mathrm{m}}\,, \\ \operatorname{div}\boldsymbol{B} &= 4\pi\rho_{\mathrm{m}}\,, & \operatorname{rot}\boldsymbol{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} &= \frac{4\pi}{c}\,\boldsymbol{j}_{\mathrm{e}}\,. \end{aligned} \tag{6}$$

(a) Leiten Sie die Kontinuitätsgleichung für magnetische Ladungs- und Stromdichten her.

(b) Verallgemeinern Sie die Dualitätstransformation mit Drehwinkel θ aus Aufg. 41 so, dass die modifizierten Maxwell-Gleichungen (6) invariant sind, indem Sie gleichzeitig die Ladungs- und Stromdichten in geeigneter Weise transformieren.

(c) Nehmen Sie für diese Teilaufgabe an, dass alle Teilchen im Universum ein konstantes Verhältnis von magnetischer zu elektrischer Ladung haben, so dass $\rho_{\mathrm{m}} = \kappa\rho_{\mathrm{e}}$ und $\boldsymbol{j}_{\mathrm{m}} = \kappa\boldsymbol{j}_{\mathrm{e}}$ mit $\kappa \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass man dann durch eine Dualitätstransformation mit geeignetem θ stets $\rho'_{\mathrm{m}} = 0$ und $\boldsymbol{j}'_{\mathrm{m}} = 0$ erreichen kann. Was würde also diese Annahme für die Existenz von magnetischen Monopolen bedeuten?

(d) Betrachten Sie einen magnetischen Monopol der Stärke g, der am Ursprung ruht.

  (i) Bestimmen Sie mit Hilfe des Gaußschen Satzes sein magnetisches Feld $\boldsymbol{B}_g$ und berechnen Sie den magnetischen Fluss durch eine Kugel um den Ursprung. Folgern Sie, dass nicht $\boldsymbol{B}_g = \operatorname{rot}\boldsymbol{A}$ mit einem überall regulären (d. h. nicht singulären) Vektorpotential $\boldsymbol{A}$ gelten kann.

  (ii) Wir folgen im Weiteren einem Vorschlag von P.A.M. Dirac. Dazu stellen wir den Monopol als Ende einer unendlich dünnen und unendlich langen Spule dar, die vom Ursprung entlang der negativen z-Achse bis ins Unendliche reicht. Argumentieren Sie, dass das Feld dieses Solenoids durch

$$\boldsymbol{B}_{\mathrm{sol}} = g\,\frac{\boldsymbol{x}}{r^3} + 4\pi g\,\theta(-z)\delta(x)\delta(y)\boldsymbol{e_z} \tag{7}$$

gegeben ist. Vergleichen Sie $\boldsymbol{B}_g$ mit $\boldsymbol{B}_{\text{sol}}$. Zeigen Sie, dass für $\boldsymbol{B}_{\text{sol}}$ überall $\operatorname{div} \boldsymbol{B}_{\text{sol}} = 0$. Es gibt also ein Vektorpotential $\boldsymbol{A}_{\text{sol}}$ mit $\operatorname{rot} \boldsymbol{A}_{\text{sol}} = \boldsymbol{B}_{\text{sol}}$.

(iii) Die Linie, entlang derer wir das *gedachte* Solenoid legen, nennt man *Dirac-String*. Entnehmen Sie Gleichung (7), dass der Dirac-String einen magnetischen Fluss gleich dem, der vom Monopol ausgeht, führt. Drücken Sie das magnetische Feld $\boldsymbol{B}_g$ des Monopols durch das Vektorpotential $\boldsymbol{A}_{\text{sol}}$ und den Beitrag des Dirac-Strings aus.

Sie können unter Ausnutzung der Kugelsymmetrie das Vektorpotential $\boldsymbol{A}_{\text{sol}}$ bestimmen und können in Kugelkoordinaten (r, φ, ϑ) z. B. finden:

$$\boldsymbol{A}_{\text{sol}}(\boldsymbol{x}) = \frac{g}{r} \frac{1 - \cos\vartheta}{\sin\vartheta} \boldsymbol{e}_\varphi \,. \tag{8}$$

Wie erwartet ist dieses Vektorpotential singulär, nämlich auf der negativen z-Achse, entlang des Dirac-Strings.

Bemerkung: Die Lage des Dirac-Strings im Raum kann man durch Eichtransformationen verändern. Aus der Forderung, dass der Dirac-String unbeobachtbar sein soll, hat Dirac im Rahmen der Quantenmechanik die Beziehung $\frac{eg}{\hbar c} = \frac{n}{2}$ mit $n \in \mathbb{N}$ hergeleitet, die die Quantisierung der elektrischen Ladung impliziert, falls mindestens ein magnetisch geladenes Teilchen existiert.

S 53 Doppler-Effekt und extrasolare Planeten (5 Punkte)

Ein Stern sende in der zur Erde zeigenden 1-Richtung eine linear polarisierte ebene elektromagnetische Welle aus, die wir auf der Erde empfangen, die sich mit der Geschwindigkeit $\boldsymbol{v} = v\boldsymbol{e_1}$ relativ zum Ruhesystem des Sterns von ihm wegbewegt.

(a) Berechnen Sie die Doppler-Verschiebung der Frequenz ν'/ν und die Lichtgeschwindigkeit c' im Ruhesystem der Erde

(i) mittels einer Galilei-Transformation.

(ii) mittels einer Lorentz-Transformation.

(b) Extrasolare Planeten kreisen mit ihrem Stern um den gemeinsamen Schwerpunkt. Dadurch bewegt sich der Stern periodisch, was sich in einer Doppler-Verschiebung des von ihm ausgesandten Lichts bemerkbar macht. Fast alle bisher bekannten extrasolaren Planeten wurden durch die Beobachtung dieser Verschiebung gefunden. Derzeit kann man bei Sternen relative Verschiebungen $\tilde{\lambda}/\lambda - 1$ der Wellenlängen von Absorptionslinien im sichtbaren Bereich mit einer Genauigkeit von 10^{-8} und besser messen. Wie schnell bewegt sich ein Stern, dessen sichtbares Licht um diesen Betrag verschoben ist?

Frohe Weihnachten!