
5. ÜBUNG ZUR ELEKTRODYNAMIK

Besprechung der Präsenzaufgaben: 18.–20.11.2013
Abgabe der schriftlichen Aufgaben: 21.11.2013

S 21 Wasserstoffatom II

(5 Punkte)

Wir betrachten noch einmal das Wasserstoffatom im Grundzustand. Die mittlere elektrische Ladungsverteilung durch das Elektron ist gegeben durch

$$\rho_{\text{el}}(\mathbf{x}) = -\frac{e}{\pi a^3} \exp\left(-\frac{2r}{a}\right), \quad (1)$$

wobei a der Bohrsche Radius und e die Elementarladung ist.

- (a) Berechnen Sie das durch diese Ladungsverteilung erzeugte Potential $\varphi_{\text{el}}(\mathbf{x})$.
- (b) Die Ladungsverteilung des Kerns sei ρ_{K} , und der Kern sei als punktförmig angenommen. Weiter sei $\varphi_{\text{K}}(\mathbf{x})$ das durch den Kern erzeugte Potential. Zeigen Sie durch explizite Berechnung der Integrale, dass die Wechselwirkungsenergie des Elektrons im Potential des Kerns,

$$V = \int_{\mathbb{R}^3} \rho_{\text{el}}(\mathbf{x}) \varphi_{\text{K}}(\mathbf{x}) d^3x, \quad (2)$$

übereinstimmt mit

$$V = \int_{\mathbb{R}^3} \rho_{\text{K}}(\mathbf{x}) \varphi_{\text{el}}(\mathbf{x}) d^3x. \quad (3)$$

- (c) Berechnen Sie die Energie W_{el} des Feldes, das alleine durch die Ladungsverteilung des Elektrons erzeugt wird.

S 22 Earnshaw-Theorem

(optional, +4 Punkte)

Wir wollen das Earnshaw-Theorem beweisen: Eine beliebige Konfiguration von Punktladungen kann sich nicht in einem stabilen Gleichgewicht befinden.

- (a) Zeigen Sie zunächst, dass im ladungsfreien Raum der Wert des elektrostatischen Potentials φ am Ort \mathbf{x} gleich dem Mittelwert von φ über eine beliebige Kugeloberfläche mit Mittelpunkt \mathbf{x} ist, d. h. für jedes $R > 0$ gilt

$$\varphi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial B_R(\mathbf{x})} \varphi(\mathbf{x}') d\Omega, \quad (4)$$

wobei $B_R(\mathbf{x})$ die Kugel vom Radius R mit Mittelpunkt \mathbf{x} ist. Dies nennt man die Mittelwerteigenschaft harmonischer Funktionen.

Hinweis: Benutzen Sie das Greensche Theorem mit $\phi = \varphi$ und $\psi = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^{-1}$.

- (b) Benutzen Sie diese Mittelwerteigenschaft, um das Earnshaw-Theorem herzuleiten. Betrachten Sie dazu eine der Punktladungen und zeigen Sie, dass sich diese nicht in einem strengen lokalen Minimum des Potentials befinden kann.

P 23 Multipolmomente & Translation und Parität (+5 Punkte)

Das Dipolmoment \mathbf{p} und der (kartesische) Quadrupoltensor (q_{kl}) einer Ladungsverteilung $\rho(\mathbf{x})$ bezüglich des Punkts $\mathbf{x} = 0$ sind gegeben durch

$$\mathbf{p} = \int \rho(\mathbf{x}) \mathbf{x} d^3x, \quad (5)$$

$$q_{kl} = \int \rho(\mathbf{x})(3x_k x_l - \mathbf{x}^2 \delta_{kl}) d^3x. \quad (6)$$

- (a) Betrachten Sie eine Translation des Koordinatensystems $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}' = \mathbf{x} - \mathbf{a}$. Wie verhalten sich Gesamtladung, Dipolmoment und Quadrupoltensor unter einer solchen Translation? Drücken Sie insbesondere q'_{kl} durch q_{kl} , die Gesamtladung und die Komponenten p_k des Dipolmoments aus. Unter welchen Umständen ist $q'_{kl} = q_{kl}$?
- (b) Wie verhalten sich Gesamtladung, Dipolmoment und Quadrupoltensor unter einer Paritätstransformation, also einer Raumspiegelung $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}' = -\mathbf{x}$?

Hinweis: Die Ladungsdichte transformiert sich in beiden Fällen gemäß $\rho'(\mathbf{x}') = \rho(\mathbf{x})$.

S 24 Gestreckter Quadrupol (3 + 2 Punkte)

Wir betrachten einen gestreckten Quadrupol, d. h. eine Ladungsverteilung bei der sich eine Ladung $-2e$ im Ursprung und jeweils eine Ladung $+e$ in den Punkten $(0, 0, d)$ und $(0, 0, -d)$ befinde.

- (a) Geben Sie das Potential dieser Ladungsverteilung an.
- (b) Berechnen Sie das Dipolmoment und den Quadrupoltensor für diese Ladungsverteilung.
- (c) Geben Sie für den Fall großer Abstände $r = |\mathbf{x}| \gg d$ das Potential bis zur zweiten Ordnung in d/r an. Zeigen Sie, dass das Potential rotationssymmetrisch bezüglich der z -Achse ist, also nicht vom Winkel φ abhängt.
- (d) Im Folgenden benutzen wir Kugelkoordinaten. (optional, +2 Punkte)
- (i) Berechnen Sie in der Näherung aus (c) das elektrische Feld in Kugelkoordinaten.
- (ii) Geben Sie einen analytischen Ausdruck $r = r(\theta)$ für die Äquipotentialflächen an und skizzieren Sie diese. Skizzieren Sie auch die Feldlinien.

S 25 Wechselwirkung zweier Dipole

(5 Punkte)

Ein elektrischer Dipol mit Dipolmoment \mathbf{p}_1 befinde sich im Ursprung, ein zweiter elektrischer Dipol mit Dipolmoment \mathbf{p}_2 bei $\mathbf{x} = (R, 0, 0)$. Berechnen Sie Kraft und Drehmoment, die die Dipole aufeinander ausüben, sowie die potentielle Energie für die Fälle, dass

- (a) die Dipole parallel bzw. antiparallel in x -Richtung ausgerichtet sind,
- (b) die Dipole parallel bzw. antiparallel in z -Richtung ausgerichtet sind.

In welchen dieser Fälle ziehen sich die Dipole an, wann stoßen sie sich ab?

S 26 Fourier-Transformation

(7 Punkte)

Wir betrachten (i. Allg. komplexwertige) Funktionen f einer reellen Variablen, von denen wir annehmen, dass sie absolut integrierbar (d. h. $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty$) und stetig differenzierbar sind.

Die Fourier-Transformation einer solchen Funktion $f(x)$ ist gegeben durch

$$\tilde{f}(k) = \mathcal{F}[f(x); k] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} e^{-ikx} f(x). \quad (7)$$

Die inverse Transformation ist dann

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx} \tilde{f}(k). \quad (8)$$

Seien f, g zwei Funktionen und $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $a \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie folgende Eigenschaften der Fourier-Transformation:

$$\mathcal{F}[\alpha f(x) + \beta g(x); k] = \alpha \mathcal{F}[f(x); k] + \beta \mathcal{F}[g(x); k], \quad (9a)$$

$$\mathcal{F}[f(x - a); k] = e^{-ika} \mathcal{F}[f(x); k], \quad (9b)$$

$$\mathcal{F}[f(ax); k] = \frac{1}{a} \mathcal{F}\left[f(x); \frac{k}{a}\right], \quad \text{mit } a > 0, \quad (9c)$$

$$\mathcal{F}[f(-x); k] = \mathcal{F}[f(x); -k], \quad (9d)$$

$$\mathcal{F}\left[\frac{d}{dx} f(x); k\right] = ik \mathcal{F}[f(x); k], \quad (9e)$$

$$\mathcal{F}[xf(x); k] = i \frac{d}{dk} \mathcal{F}[f(x); k]. \quad (9f)$$

Bemerkung: Man kann die Fourier-Transformation in natürlicher Weise auf Funktionen auf \mathbb{R}^3 erweitern. Dann gelten zu (9a)–(9f) analoge Relationen. Man beachte allerdings, dass in diesem Fall in (9c) der Skalierungsfaktor nun $1/a^3$ ist und dass die Gleichungen (9e) und (9f) komponentenweise formuliert werden müssen.

Weitere Informationen unter:

<http://www.thphys.uni-heidelberg.de/~ewerz/ed13.html>